المشـــــتقات 3ع

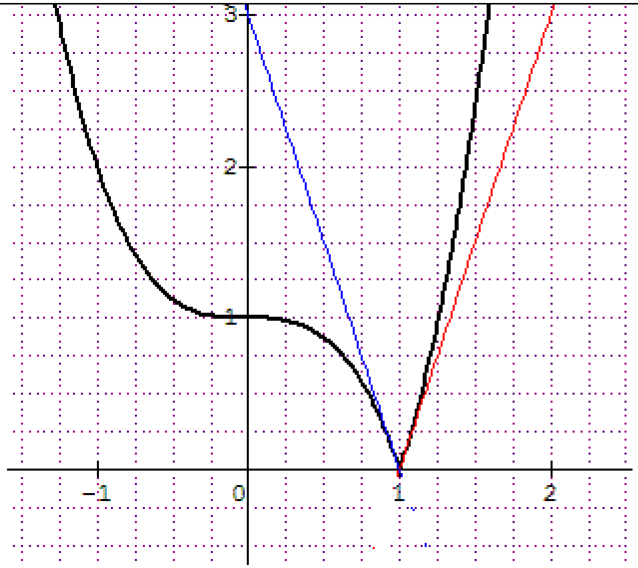
ملخص:

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f نقطة $A(x_0, f(x_0))$

العدد المشتق عند x_0	العدد المشتق على يمين x_0	العدد المشتق على يسار x_0
$x_0 \in D_f$	$x_0 \in D_f$	$x_0 \in D_f$
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h} = a$ $a \neq \pm\infty$	$\lim\limits_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h} = a$ $a \neq \pm\infty$	$\lim\limits_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h} = a$ $a \neq \pm\infty$
معادلة المماس عند $y = f'(x_0)(x-x_0) f +(x)$		
إذا كان من اجل كل x_0 من I يوجد عدد مشتق $f'(x_0)$ فإن الدالة قابلة الاشتقاق على I	إذا كانت: $\lim\limits_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ فإن الدالة قابلة الاشتقاق عند x_0	

خوص :

- معادلة مماس عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I فإن الدالة f مستمرة على I



1 مستمرة عند

$$\lim\limits_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \neq \lim\limits_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

غير قابلة للاشتقاق عند 1

النقطة $A(1, f(1)=0)$ نقط زاوية

تمرين.01

- ادرس قابلية اشتقاق باستعمال التعريف في كل حالة من الحالات التالية .
- ليكن (C_f) تمثلها البياني في المستوي منسوب لمعلم متعامد و متجانس فسر هندسيا النتيجة. من اجل x_0:

(1 $x_0 = 1 \ ; D_f = \Re \ ; f(x) = x^3 - 2$

(2 $x_0 = -1 \ ; D_f = [-1; +\infty[\ ; f(x) = \sqrt{x+1}$

(3 $x_0 = 0 \ ; D_f = \Re - \{1\} \ ; f(x) = \frac{|x|}{x-1}$

تمرين.02

لتكن f الدالة المعرفة على $\Re$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\left|x^2-4\right|}{x+2} & ; \ x\neq -2 \\ f(-2)=-4 \end{cases}$$

1) ادرس استمرارية الدالة f عند $x_0=-2$

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=-2$

حل مختصر:

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-4 \,/\, \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=4 \,/\, f(-2)=-4$ **:مستمرة على يسار (-2) وغير مستمرة على يمين (-2) .**

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left|h^2-2h\right|+4}{h^2}=\infty$

،غير قابلة الاشتقاق عند (-2).

تمرين.03.

لتكن f الدالة المعرفة على $\Re$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1} & ; \ x>1 \\ f(x)=\sqrt{x^2+3} & ; \ x\leq 1 \end{cases}$$

1) بين أن الدالة f مستمرة عند $x_0=1$.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=1$.أعطى تفسير بيانيا للنتيجة.

حل مختصر

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=2$ **: الدالة مستمرة عند 1.**

$\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^2}{h}=0$ **:نصف مماس يوازي $(x0x')$ في $A(1;2)$**

$\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}=\dfrac{2}{4}$ **: نصف مماس**

$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

مشتقات دوال مرجعية

$f(x)=......$		$f'(x)=........$
k	k عدد حقيقي ثابت	**0**
x^n	$n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}
$ax+b$	a,b أعداد حقيقية ثابت	a
$a\cos(bx+c)$		$-ab\sin(bx+c)$
$a\sin(bx+c)$		$ab\cos(bx+c)$

عماليات على الدوال المشتقات

u,v دالتين قابل الاشتقاق، k عدد حقيقي ثابت ، n عدد طبيعي.

$f=......$	$f'=........$
$u+v$	$u'+v'$
$k\times u$	$k\times u'$
$u\times v$	$u'\times v+u\times v'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$
u^n	$n\times u'\times u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(u\circ v)$	$(u'\circ v)\times v'$

تمرين.04. الدالة f معرفة على $\Re-\{-2\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^2+\alpha x+\beta}{x+2}$

عين العددين الحقيقيين $\alpha\,;\beta$ بحث المنحني الممثل للدالة عند النقطة $(1\,;-3)$ يقبل مماسا معامل توجيهه $\frac{2}{3}$

حل مختصر: $3-//\,7-$

تمرين.05. احسب مشتق الدالة f في كل حالة من الحالات التالية و تحديد $D_{f'}$

$1)\ f(x)=x^3-4x+5$	$2)\ f(x)=\left(x^2-1\right)^3$	$4)f(x)=-\sin(4x^2+3)$
$3)f(x)=\dfrac{3x^2+4x-5}{2x+1}$	$6)f(x)=\dfrac{4}{(2\sin x+3)^2}$	$5)\ f(x)=\sqrt{2+\cos 2x}$
$7)f(x)=\sqrt{3x-6}$	$8)f(x)=3\cos(3x+\pi)$	$9)f(x)=x\sqrt{x^2+1}$
$10)f(x)=x+\sin^3(\pi x)$	$11)f(x)=\sqrt{x^2+4x}$	$12)f(x)=\left\|x^2+4x-5\right\|$

حل مختصر:

$1)f'(x)=3x^2-4x\ /D_{f'}=\square\ \ /2)f'(x)=3(2x)(x^2-1)^2\ /D_{f'}=\square$

$3)f'(x)=\dfrac{6x^2+6x+14}{(2x+1)^2}\ /D_{f'}=\square-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}\ /4)\ f'(x)=-8x\cos(4x^2+3)/D_{f'}=\square\ /$

$5)f'(x)=\dfrac{-2\sin 2x}{2\sqrt{2+\cos 2x}}/D_{f'}=\square\ /6)f'(x)=\dfrac{-4[(2\cos x)(2\sin x+3)]}{(2\sin x+3)^2};/D_{f'}=\square$

$7)\ f'(x)=\sqrt{3x-6}\ /,D_f=[2;+\infty[\ /D_{f'}=]2;+\infty[\ /9)f'(x)=\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}};D_{f'}=\square$

$8)\ f'(x)=-9\sin(3x+\pi)/D_{f'}=\square\ /10)f'(x)=1+3\pi\sin^2(\pi x)\cos(\pi x);D_{f'}=\square$

$12)f'(x)=\begin{cases}2x+4;x\in]-\infty;-5[\cup]1;+\infty[\\ -2x-4;x\in]-5:1[\end{cases}\ /$

$11)f'(x)=\dfrac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}}\ ;D_f=]-\infty;-4]\cup[0;+\infty[;D_{f'}=]-\infty;-4[\cup]0;+\infty[$

التقارب التآلفي:

تعريف: نسمي $\left(f(x)+hf'(x)\right)$ التقريب التآلفي ل $f(x+h)$ من اجل h قريب من **0** المرفق بالدالة f .

تمرين 06: عين التقارب التآلفي في كل من الحالات التالية :

$1)\ \dfrac{1}{4+h}$	$2)\ (3+h)^3$	$3)\ \sqrt{\dfrac{1}{4}+h}$	$4)\ \dfrac{1}{\sqrt{1+h}}$	$5)\ \dfrac{1}{(1+h)^2}$

حل مختصر

$1)\ \dfrac{1}{4+h}\approx\dfrac{1}{4}-\dfrac{h}{16}$	$2)\ (3+h)^3\approx 27+27h$
$3)\ \sqrt{\dfrac{1}{4}+h}\approx\dfrac{1}{2}+h$	$4)\ \dfrac{1}{\sqrt{1+h}}\approx 1-\dfrac{1}{2}h$
$5)\ \dfrac{1}{(1+h)^2}\approx 1-2h$	

تمرين.07. عين القيمة المقاربة للكميات التالية:

$1)\ 1{,}021^2$	$2)\ \sqrt{1{,}038}$	$3)\ \dfrac{1}{1{,}013}$
$4)\ 0{,}983^2$	$5)\ \sqrt{0{,}984}$	$6)\ \dfrac{1}{0{,}988}$

حل مختصر:

1) $1,021^2$ / $f(x)=x^2$ / $f(1+0,021)\approx 1+0,021\times 2\times 1$ $f(1+0,021)\approx 1,042$	2) $\sqrt{1,038}$ / $f(x)=\sqrt{x}$ / $f(1+0,038)\approx 1+0,038\times\frac{1}{2}\times 1$ $f(1+0,021)\approx 1,019$	3) $\frac{1}{1,013}$ / $f(x)=\frac{1}{x}$ / $f(1+0,013)\approx 1+0,013\times\frac{-1}{1}$ $f(1+0,021)\approx 0,987$
4) $0,983^2$ / $f(x)=x^2$ / $f(1-0,017)\approx 1-0,017\times 2\times 1$ $f(1-0,017)\approx 0,966$	5) $\sqrt{0,984}$ / $f(x)=\sqrt{x}$ / $f(1-0,016)\approx 1-0,016\times\frac{1}{2}\times 1$ $f(1-0,016)\approx 0,992$	6) $\frac{1}{0,988}$ / $f(x)=\frac{1}{x}$ / $f(1-0,012)\approx 1-0,012\times\frac{-1}{1}$ $f(1-0,021)\approx 1,012$

__تمرين__.08 1) عين معادلة المماس في الحالات التالية: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x)$

$f(x)=......$	$f'(x)=........$	$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x)$
$f(x)=x^2\ ;x_0=1$		$y_1=.....$
$f(x)=\sqrt{x}\ ;x_0=1$		$y_2=.....$
$f(x)=\frac{1}{x}\ ;x_0=1$		$y_3=.....$
$f(x)=x^3\ ;x_0=1$		$y_4=.....$

1) أكمل الجدول التالي باستعمال السؤال 1

1) $x=1,021$	$y_1=.....1,042$
2) $x=1,038$	$y_2=.....1,019$
3) $x=1,013$	$y_3=.....0,987$

__تمرين__.09

المنحى التالي ممثل للدالة f و المعرفة على $\Re$ في معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

1) بقراءة بيانية عين ما يلي :

أ) نهايات الدالة f عند كل من $+\infty$ و $-\infty$

ب) $f(0)\ ;\ f\left(\frac{-3}{2}\right)\ ;\ f'(0)\ \ ;f'\left(\frac{-3}{2}\right)$

ت) اكتب معادلة المماس عند o و عند النقطة $A\left(\frac{-3}{2};2\right)$

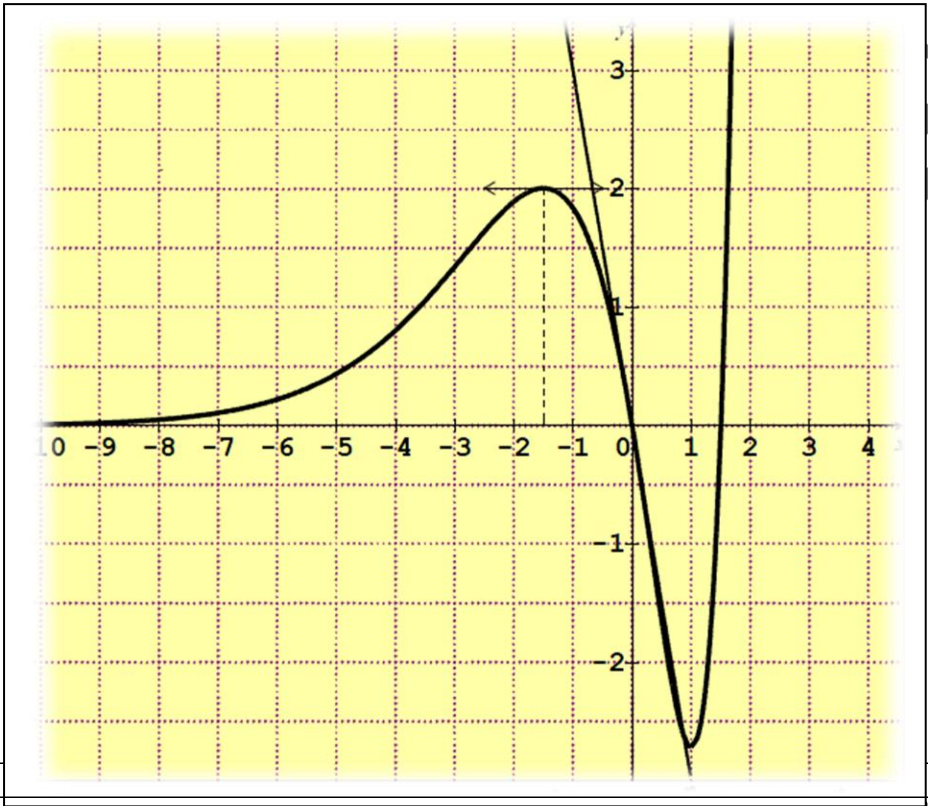
ث) حدد اشارة كلا من $f(1)$ و $f(2)$.استنتج ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا و حيدا α من المجال $]1;2[$.

ج) حل بيانيا المتراجحات : $f'(x)\leq 0\ ;\ f'(x)\geq 0$

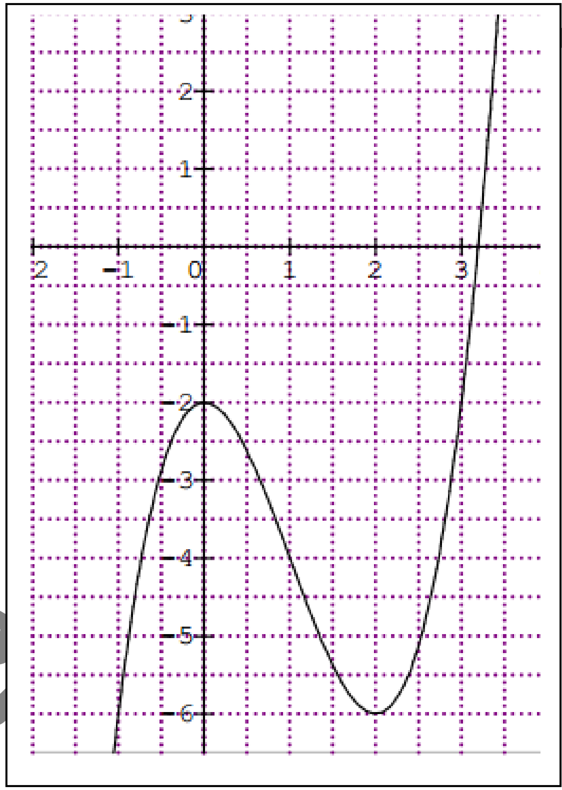
2) g دالة عددية معرفة على حيث : $g(x)=\left[f(x)\right]^2$

أ) احسب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g .



تمرين.10.



(C_g) هو التمثيل البياني للدالة المعرفة على المجال ℝ بـ :

$$g(x)=ax^3+bx+c$$

1) بقراءة بيانية :

أ) جد $g(0)\ ;\ g'(1)\ ;\ g(-1)$

ثم عين الأعداد الحقيقية $a;b;c$

ب)شكل جدول التغيرات g

2) ا)بين أن

3) المعادلة : $x^3-3x^2-2=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]3;4[$ ،ثم استنتج إشارة $g(x)$

ب)عين مجال ل α سيعته 10^{-1}

I. f دالة معرفة على $\Re-\{1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$ وليكن (C_f) تمثلها البياني.

1) احسب نهايات f عند حدود مجال التعريف .

2) ا) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\Re-\{1\}$.

ب) تحقق أن $f(x)'=\dfrac{(x-1)g(x)}{(x-1)^4}$ و استنتج إشارته.

3) بين أن $f(\alpha)=3+\dfrac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ ، ثم عين حصرا لـ$f(\alpha)$

4) ارسم جدول تغيرات f .

5) عين الدالة h بحيث يكون $f(x)-x-2=h(x)$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلة له

6) ادرس الوضع النسب للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ).

7)

---

8) **تمرين. 11**. f دالة معرفة على $\Re$ بـ : $f(x)=-x+\sqrt{x^2+8}$

وليكن (C_f) تمثلها البياني في المستوي منسوب لمعلم متعامد و متجانس.

1) احسب نهايات f عند أطراف مجموعة التعريف.

2) بين أن $x-\sqrt{x^2+8}<0$ من اجل كل عدد حقيقي x.

3) احسب $f'(x)$ و استنتج إشارته ثم شكل جدول تغيرات f .

4) بين أن المستقيم $(\Delta): y=-2x$ مقارب للمنحنى (C_f).

5) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة (Δ).

6) احسب $f(0)$ ،ثم ارسم (C_f) و (Δ).

7) g دالة معرفة على $\Re$ بـ : $g(x)=-x-\sqrt{x^2+8}$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

بين ان (C_g) و (C_f) متناظران بالنسبة للمبدأ O ثم ارسم (C_g)