ملخص الدرس

العماليات على النهايات			حالات عدم التعيين
$(a \neq 0)$ $+\infty + a = +\infty$ $-\infty + a = +\infty$ $+\infty + \infty = +\infty$ $-\infty - \infty = +\infty$	$(a \neq 0)$ $a \times \infty = \infty$ $\infty \times \infty \; \square \; \infty$	$(a \neq 0)$ $\frac{\infty}{a} = \infty$ $\frac{a}{\infty} = 0$ $\frac{a}{0} = \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$ $0 \times \infty$ $\infty - \infty$

التفسير الهندسي للنهاية	$\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = l$ معناه المستقيم $y = l$ مستقيم مقارب يوازي محور الفواصل ل (C_f)
	$\lim\limits_{\|x\| \to a} f(x) = \infty$ معناه المستقيم $x = a$ مستقيم مقارب يوازي محور الترتب ل (C_f)
	$\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = \infty$ معناه احتمال وجود مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f)

المستقيم المقارب المائل	(Δ) : $y = ax + b$ مستقيم مقارب ل (C_f) عند ∞ يعني $\lim\limits_{x \to \infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$ $\varphi(x) = 0$ $= \left[f(x) - (ax+b) \right]$
	ادا كان $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ و $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$ فان $y = ax + b$

	مقاري مائل ل (C_f)
	لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) : $y = ax + b$ ندرس إشارة الفرق $\varphi(x) = \left[f(x) - (ax+b) \right]$ إدا كان $\varphi(x) > 0$ فان (C_f) فوق (Δ) إدا كان $\varphi(x) < 0$ فان (C_f) تحت (Δ) و إدا كان $\varphi(x) = 0$ فان (C_f) يقطع (Δ)

مخطط دراسة الخطوط المقاربة:

نهاية دالة مركبة	$f = v\circ u$ / إذا $\lim_{x\to a} u(x)=b$ و $\lim_{x\to b} v(x)=c$ فان $\lim_{x\to a} f(x)=c$	
النهايات و الترتيب	إذا $g(x)\le f(x)\le h(x)$ و $\lim_{x\to\infty} g(x)=l$ و $\lim_{x\to\infty} h(x)=l$ فان $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$	
	إذا $g(x)\le f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ فان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	إذا $g(x)\ge f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ فان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to x_0} |f(x)|=+\infty$

المستقيم ذو المعادلة $x=x_0$ مقارب ويوازي (yy')

$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)$

$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=y_0$

المستقيم ذو المعادلة $y=y_0$ مقارب ويوازي (xx')

$\left|\lim_{|x|\to+\infty} f(x)\right|=+\infty$

احتمال وجود خط مقارب مائل ذو المعادلة : $y=ax+b$

$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=a, (a\neq 0)$

$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$

للمنحنى (c_f) فرع قطع مكافئ في اتجاه (xx')

$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$

للمنحنى (c_f) فرع قطع مكافئ في اتجاه (yy')

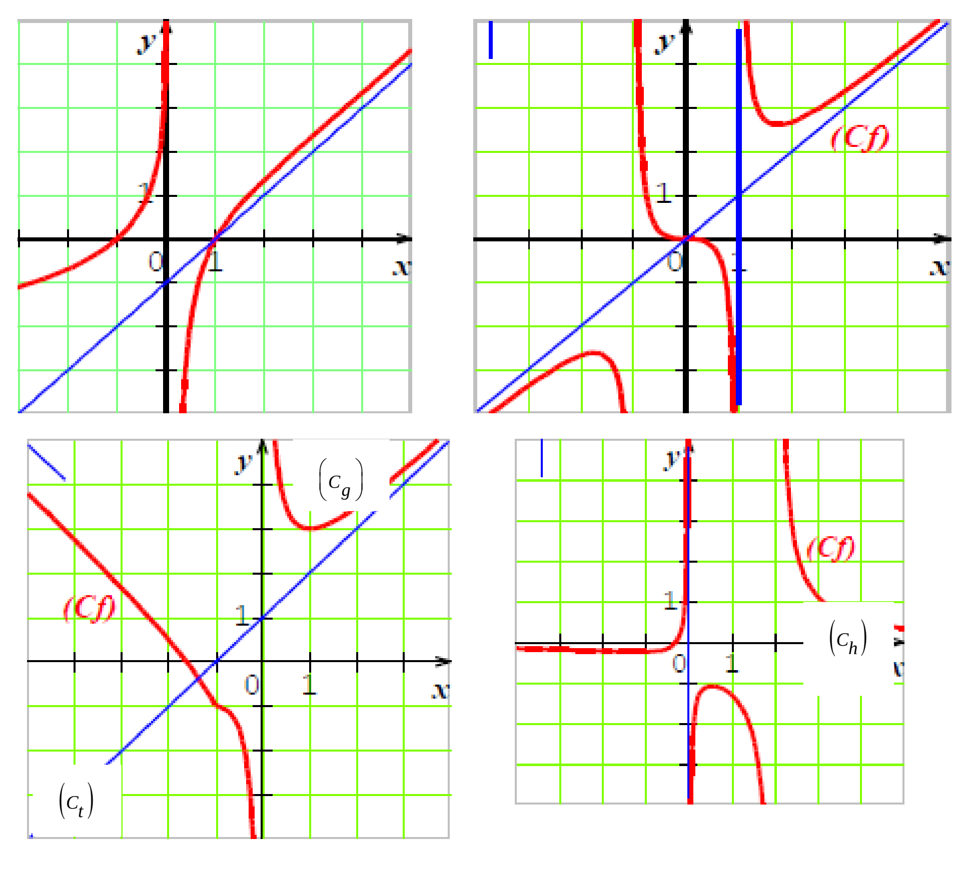
$\lim[f(x)-ax]=b$

$\lim[f(x)-ax]=+\infty$

نهاية الدالة المركبة و نهاية بالمقارنة:

تمـــــــريـــن 01 ::

في كل حالة من الحالات التالية خمن النهايات ف أطرف مجموعة التعريف و أعط



عين مجموعة التعريف ثم احسب النهايات للدالة عند حدود مجموعة تعريفا :

$f(x)=3x^2+2\|x+1\|+3$	$f(x)=-x^3+x^2$

1)

$R;D_f=\mathbb{R}\ /\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty/\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

2)

$R;D_f=\mathbb{R}\ /\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty/\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

3) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x-2}$

$R;D_f=\mathbb{R}-\{2\}/\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty/\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty/\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty/\ \lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$

4) $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2+x+1}$

$R;D_f=\mathbb{R}\ /\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty/\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

5) $f(x)=1+\dfrac{3+4x}{1-x}$

$R;D_f=\mathbb{R}-\{1\}/\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-3/\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3/\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty/\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$

6) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{x^2-4x-5}$

$R;D_f=\mathbb{R}-\{-1,5\}/\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1/\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1/\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty/\ \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty/\ \lim\limits_{x\to5^-} f(x)=+\infty\ \lim\limits_{x\to5^+} f(x)=-\infty$

7) $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$

$R;D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}/\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1/\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1/\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\frac{5}{4}/\ \lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\frac{5}{4}/\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty/\ \lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=+\infty$

8) $f(x)=1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}$

$R;D_f=\mathbb{R}^*/\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1/\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1/\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty/\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=+\infty/$

9) $f(x)=\dfrac{2x^2+8x+8}{(x+2)^2}$

$R;D_f=\mathbb{R}-\{-2\}/\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2/\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2/\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=2$

10) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$

$R;D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}/\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0/\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0/\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\frac{1}{2}/\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\frac{1}{2}/\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty/\ \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$

النهايات المركبة

11) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

$R;D_f=]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[/\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty/\ \lim\limits_{x\to-3} f(x)=f(-3)=0/\ \lim\limits_{x\to+3} f(x)=f(+3)=0$

12) $f(x)=\sqrt{\left|\dfrac{x^2-9}{x-3}\right|}$

$R;D_f=\mathbb{R}-\{3\}/\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty/\ \lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\sqrt{6}$

14) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^3+x}}$

$R;D_f=[1;+\infty[/\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0/\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)=0/$

13) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^3+x}}$

$R;D_f=[-1;0[\cup[1;+\infty[/\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0/\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)=0/\ \lim\limits_{x\to-1} f(x)=f(-1)=0/\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=+\infty$

النهاية بالمقارنة:

تمـــــــــــرين 03 ::

f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=2+\dfrac{\cos x}{x}$

1) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما :

$$-\frac{1}{x}\le\frac{\cos x}{x}\le\frac{1}{x}$$

2) هل الدالة تقبل نهاية عند $+\infty$

$R2;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=2$

تمـــــــرين 04 ::

f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=-x+\sin x$

1) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما :

$$-x+1\leq -x+\sin x\leq -x+1$$

2) احسب نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى $+\infty$

$R2;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

تمـــــــرين 05 ::

f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$

1)احسب نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى $+\infty$

$R2;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

تمـــــــرين 06 ::

العداد المشتق

احسب النهايات التالية :

$2)\lim_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{bx}$	$1)\lim_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$
$R;\lim_{x\to0} f(x)=\dfrac{a}{b}$	$R;\lim_{x\to0} f(x)=1$
$4)\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}$ $R;\lim_{x\to0} f(x)=0$	$3)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ $R;\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=-1$
$5)\lim_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$ $R;\lim_{x\to0} f(x)=0$	$6)\lim_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ $R;\lim_{x\to0} f(x)=3$

الخطوط المقاربة

التمرين 07:

f دالةعددية معرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$

1) عين مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف.

2) حدد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني الدالة f .

$R1;D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[/\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=2/$
$\lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty/\ \lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$
$R2:y=2/x=-1$

تمرين 08

نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re-\{-1\}$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}.$$

1) عين a , b , c و d بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x+1)^2}$.

2) استنتج أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $-\infty$ و $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له .

3) حدد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى (Δ) .

$R1;a=1;b=1;c=3;d=2/R2;\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x+2}{(x+1)^2}\right)=0;y=x+1/$

$R3:(C)sur(\Delta)x\in\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[;(C)sou(\Delta)x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;-\frac{2}{3}\right[$

$x=-\frac{2}{3}(C)coupe(\Delta)$

<u>تمرين 09</u>

f دالة عددية معرفة على $IR-\{2\}$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{x^2+x-1}{x-2}$$

و لتكن (C_f) تمثيلها البياني فى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) عين الأعداد الحقيقية a , b , c بحيث من اجل كل عدد حقيقي x من $IR-\{2\}$ يكون

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$$

2) استنتج ان المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائل (Δ) عند $+\infty$ و $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

3) حدد وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

<u>تمرين 09 :</u>

f **دالة عددية معرفة على $]-1\ ;+\infty[$ كما يلي :**

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x+1}$$

و لتكن (C_f) تمثيلها البياني فى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ هو خط مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

2) ادرس و ضعية المنحني (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ).

<u>تمرين 10</u> f **دالة عددية معرفة على $]-1;4[\cup]4;+\infty[$ كما يلي :**

$$f(x)=\frac{x^2+2x+5}{x-4}$$

و لتكن (C_f) تمثيلها البياني فى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

ا) احسب $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

ب) احسب $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right]$

ج) استنتج معادلة الخط المقارب المائل.

د) ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى هذا المستقيم .

$R1;\lim\limits_{x\to\pm\infty}=\pm\infty/R2;\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=1;\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]=6;y=x+6/$
$R3;\left[f(x)-(x+6)\right]=\dfrac{29}{x-4}(C)sur(\Delta)x\in]4;+\infty[;(C)sou(\Delta)x\in]-1;4[$

<u>تمرين 11 :</u> f دالة عددية معرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2+4|x-1|}{x+1}$ و لتكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) عين مجموعة تعريف
2) اكتب دون رمز القمة المطلقة .
3) بين ان المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين(يطلب تعين المعادلة) .

$R1;D_f=\mathbb{R}-\{-1\}/R2:f(x)=\dfrac{x^2+4x-4}{x+1};x\in[1;+\infty[;/f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x+1};x\in]-\infty,-1[\cup]-1;1]/$
$R3:v(+\infty);f(x)=x+3-\dfrac{7}{x+1},y=x+3/v(-\infty);f(x)=x-5+\dfrac{9}{x+1},y=x-5$

<u>تمرين 12</u> : f دالة عددية معرفة على IR كما يلي :

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}$$

و لتكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1) احسب نهاية الدالة عند $+\infty$ و $-\infty$
2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+5}-(x+1))$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x+5}+(x+1))$
3) استنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين $(\Delta);(\Delta')$ يطلب تعيين معادلتيهما.
4) حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من $(\Delta);(\Delta')$

$R1;\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty/R2:\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x+5}+(x+1))=0/\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+5}-(x+1))=0$
$R3;(\Delta):y=x+1/(\Delta'):y=-x-1/R4:(c_f)sur(\Delta'),x\in]-\infty,-1[,(c_f)sur(\Delta),x\in]-\infty,-1[,$

<u>تمرين: 13</u> : f دالة عددية معرفة على $]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=\sqrt{x^2-2x}-2x+1$$

و لتكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

5) احسب نهاية الدالة عند $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x);\lim\limits_{x\to-\infty}f(x);$
6) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-3x+2))$
7) استنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين $(\Delta);(\Delta')$ يطلب تعيين معادلتيهما.

حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من $(\Delta);(\Delta')$

تمرين14: (C_g) التمثيل البياني لدالة g في معلم متعامد

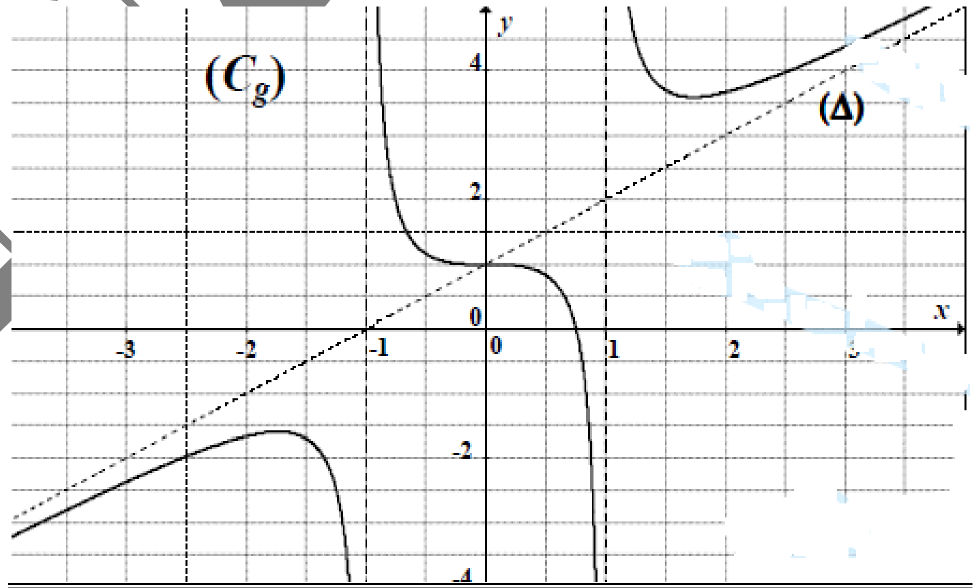
1) بقراءة بيانية عين ID_g مجموعة تعريف الدالة g

2) خمن النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة g .

3) عين المستقيمات المقاربة واكتب معادلاتهما .

4) ادرس وضعية (C_g) بالنسبة لمستقيم المقارب المائل (Δ).

5) ما هو عدد حلول المعادلة $g(x)=0$ ؟(يطلب حصر الحل بين عددين صحيحين متتابعين)



التمرين 15: نعرف علي $\mathbb{R}$ الدالة f بـ : $f(x)=x^2+x\sin x$

/1 بين انه من اجل كل عدد حقيقي موجب :

$$x(x-1)\leq f(x)\leq x(x+1)$$

- استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

/2 بين انه من اجل كل عدد حقيقي سالب :

$$x(x+1)\leq f(x)\leq x(x-1)$$

استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$