# تمارين القسمة و الموافقات في $\mathbb{Z}$

**التمرين 01 :**

1. أثبت أن العدد 251 أولي.
2. حلل العدد 2008 إلى جداء عوامل أولية و استنتج الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2008.
3. عين الأعداد الطبيعية $a$ و $b$ بحيث : $m^3 + 35d^3 = 2008$ ، علما أنّ : $m = PPCM\,(a,b)\,;\,d = PGCD(a,b)$.

**التمرين 02 :**

1. أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي $n$ بواقي قسمة العدد $5^n$ على 7.
2. عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $6^{2n}$ على 7.
3. عين قيم العدد الطبيعي $n$ التي يكون من أجلها العدد $(5^n + 6^{2n} + 3)$ قابلا للقسمة على 7.

**التمرين 03 :**

1. عين حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي قسمة العدد $4^n$ على 11.
2. عين مجموعة الأعداد الطبيعية $n$ حيث : $(6 \times 1995^n + 26^{10n+2} + 7)$ يقبل القسمة على 11.

**التمرين 04 :**

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي قسمة العدد $5^n$ على 7.
2. أثبت أنّه من أجل كل عدد الطبيعي $n$ ، العدد $(26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3)$ يقبل القسمة على 7.
3. عين قيم العدد الطبيعي $n$ التي يكون من أجلها العدد $(26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n)$ قابلا للقسمة على 7.

**التمرين 05 :**

عيّن كل الثنائيات $(a,b)$ من الأعداد الطبيعية حيث :

$$(1)\begin{cases} a+b=420 \\ PGCD(a,b)=84 \end{cases} ;\ (2)\begin{cases} a\times b=360 \\ PGCD(a,b)=6 \end{cases} ;\ (3)\begin{cases} a^2-b^2=825 \\ PGCD(a,b)=5 \end{cases} ;\ (4)\begin{cases} PPCM(a,b)=90 \\ PGCD(a,b)=18 \end{cases}$$

$(5)$ $PPCM(a,b) - 9PGCD(a,b) = 13$ مع $a \le b$

**التمرين 06 :**

$n, b, a$ أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $b = n^2 + 2\,;\,a = 5n^2 + 7$

1. بيّن أنّ كل قاسم مشترك للعددين $a$ و $b$ يقسم 3
2. بيّن أنّ $PGCD(a,b) = 3$ إذا و فقط إذا $n^2 \equiv 1[3]$
3. استنتج حسب قيم $n$ ، $PGCD(a,b)$.

**التمرين 07 :**

$n, b, a$ أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $b = 5n - 2\,;\,a = 2n + 3$

1. بيّن أنّه إذا كان العددان $a$ و $b$ غير أوليين فيما بينهما فإنّ : $PGCD(a,b) = 19$
2. عيّن قيم $n$ التي يكون من أجلها $PGCD(a,b) = 19$.

**التمرين 08 :**

$n,b,a$ أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $b=2n^2+n\,;\,a=2n^3+5n^2+4n+1$
1. بيّن أنّ العدد $(2n+1)$ قاسم مشترك للعددين $a$ و $b$
2. باستعمال مبرهنة بيزو بيّن أنّ $PGCD(n,n+1)=1$ و $PGCD[n,(n+1)^2]=1$.
3. استنتج $PGCD(a,b)$.

**التمرين 09 :**

$n$ عدد طبيعي. نضع : $A=n^4+n^2+1$
1. حلل $A$ إلى جداء عاملين من الدرجة الثانية (لاحظ أنّ : $A=n^4+2n^2+1-n^2$)
2. نضع : $b=n^2-n+1\,;\,a=n^2+n+1$
   - أ. بيّن أنّ العددين $a$ و $b$ فردين
   - ب. بيّن أنّ كل قاسم مشترك للعددين $a$ و $b$ يقسم $2n$ و $2(n^2+1)$
   - ج. بيّن أنّ العددين $n$ و $n^2+1$ أوليان فيما بينهما
   - د. استنتج أنّ العددين $a$ و $b$ أوليان فيما بينهما

**التمرين 10 :**

$n,b,a$ أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $b=13n-1\,;\,a=11n+3$
1. بيّن أنّ كل قاسم مشترك للعددين $a$ و $b$ يقسم 50
2. باستعمال خوارزمية إقليدس عيّن حلا خاصا للمعادلة : $50x-11y=1$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $50x-11y=3$
3. استنتج قيم $n$ التي يكون من أجلها : $PGCD(a,b)=50$.
4. ما هي قيم $n$ التي يكون من أجلها : $PGCD(a,b)=25$ ؟

**التمرين 11 :**

نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $324x-245y=7\ ...\ (E)$
1. باستعمال خوارزمية إقليدس عيّن حلا خاصا للمعادلة $(E)$، ثم حل في $\mathbb{Z}$ هذه المعادلة
2. بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x,y)$ حلا للمعادلة $(E)$، فإنّ : $x\equiv 0[7]$
3. نضع : $PGCD(x,y)=d$.
   - أ. بيّن أنّ القيم الممكنة للعدد d هي 1 و 7
   - ب. عيّن كل الثنائيات $(x,y)$ حلول المعادلة $(E)$ بحيث $PGCD(x,y)=7$.

**التمرين 12 :**

1. عيّن القاسم المشترك الأكبر للأعداد 1996 ، 1497 و 2994.
2. نعتبر المعادلة : $1996\,x-1497\,y=2994\ ...\ (1)$ حيث : $x$ و $y$ عددان صحيحان.
   - أ- أثبت أنّ $x$ مضاعف للعدد 3 و $y$ مضاعف للعدد 2 ، ثمّ حل المعادلة (1).
   - ب- عيّن الحلول $(x,y)$ بحيث يكون : $xy=1950$.

**التمرين 13 :**

1. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $4x-9y=19\ ...\ (\mathrm{I})$
2. ليكن $d$ القاسم المشترك الأكبر للعددين $x$ و $y$ حيث $(x\,,\,y)$ حل للمعادلة (I)
   - أ- ما هي القيم الممكنة للعدد $d$ ؟
   - ب- عيّن حلول المعادلة بحيث يكون $d=19$
3. عيّن الثنائيات $(a\,,\,b)$ الصحيحة حلول المعادلة : $4a^2-9b^2=19$

**التمرين 14 :**

1. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5x-3y=2$
2. A عدد طبيعي يُكتب $\overline{55}$ في النظام ذي الأساس $x$ و يُكتب $\overline{37}$ في النظام ذي الأساس $y$ حيث $x \le 12\ ;\ y \le 20$
عيّن القيم الممكنة للعددين $x$ و $y$ ، ثمّ اكتب A في النظام العشري.

**التمرين 15 :**

1. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $8x-5y=3 \ldots (\mathrm{I})$
2. ليكن $m$ عددا صحيحا بحيث توجد ثنائية $(p,q)$ من الأعداد الصحيحة تحقق : $m=8p+1$ و $m=5q+4$
   - أ- بيّن أنّ الثنائية $(p,q)$ هي حل للمعادلة (I) ، ثمّ استنتج أنّ : $m \equiv 9[40]$
   - ب- عيّن أصغر عدد طبيعي $m$ أكبر 2000
3. ليكن $n$ عددا طبيعيا
   - أ- أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي $k$ لدينا : $2^{3k} \equiv 1[7]$
   - ب- ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد $2^{2009}$ على 7 ؟
4. ليكن $a$ و $b$ عددان طبيعيان حيث : $0<a\le 9$ و $b \le 9$ ، و نعتبر العدد $N$ الذي يكتب في النظام العشري على الشكل : $N=\overline{a00b}$ $(N=a\times 10^3+b)$. نريد تعيين من ضمن هذه الأعداد الطبيعية $N$ تلك التي تقبل القسمة على 7
   - أ- تحقق من أنّ : $10^3 \equiv -1[7]$
   - ب- استنتج الأعداد الطبيعية $N$ التي تقبل القسمة على 7

**التمرين 16 :**

اختر الإجابة الصحيحة مع التعليل :

1. في مجموعة الأعداد الصحيحة ، المعادلة $x^2+x+3 \equiv 0[5]$ :
   - (أ) لا تقبل حلولا
   - (ب) حلولها زوجية
   - (جـ) حلولها تحقق $x \equiv 2[5]$
   - (د) حلولها تحقق $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 3[5]$
2. حلول المعادلة $24x+34y=2$ هي :
   - (أ) $(17k-7;5-12k)\ ,k\in\mathbb{Z}$
   - (ب) $(-7k;5k)\ ,k\in\mathbb{Z}$
   - (جـ) $(34k-7;5-24k)\ ,k\in\mathbb{Z}$
   - (د) المجموعة الخالية
3. $N$ عدد طبيعي يُكتب في النظام ذي الأساس 5 : $\overline{421}$. كتابته في النظام ذي الأساس 6 هي :
   - (أ) $\overline{421}$
   - (ب) $\overline{111}$
   - (جـ) $\overline{303}$
   - (د) $\overline{222}$
4. باقي القسمة الإقليدية للعدد $1432^{2011}$ على العدد 3 هو :
   - (أ) 0
   - (ب) 1
   - (جـ) 2
   - (د) 3
5. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $a=n(n+2)\ ;\ b=n+1$. بما أنّ: $b^2-a=1$ فإنّ $PGCD(a,b)$ هو :
   - (أ) $n$
   - (ب) $n+1$
   - (جـ) 1
   - (د) 2

**التمرين 17 :**

$a$ ، $b$ عددان طبيعيان و $p$ عدد طبيعي أولي حيث : $PGCD(a+b\ ;ab)=p^2$

1. بيّن أنّ $p^2$ يقسم $a^2$ ، ثمّ استنتج أنّ $p$ يقسم $a$
   - بطريقة مماثلة بيّن أنّ $p$ يقسم $b$
   - أثبت أنّ : $PGCD(a\ ;b)=p^2$ أو $PGCD(a\ ;b)=p$
2. نعتبر في $\mathbb{N}^2$ الجملة : $(\mathrm{E})\begin{cases} PGCD\ (a+b\ ;ab)=49 \\ PPCM\ (a\ ;b)=231 \end{cases}$
   - بيّن أنّ : $\mathrm{PGCD}(a\ ;b)=7$
   - عيّن كل الثنائيات $(a\ ,b)$ في $\mathbb{N}^2$ و التي تحقق (E).

**التمرين 18 :**

$n$ عدد طبيعي ، نعتبر الأعداد : $a_n = 4\times 10^n - 1$ ، $b_n = 2\times 10^n - 1$ ، $c_n = 2\times 10^n + 10$

1. أحسب $b_3$ ، $c_3$
   - بيّن أنّ $a_n$ و $c_n$ يقبلان القسمة على 3 ، و أنّ $b_3$ عدد أولي
   - بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $b_n \times (c_n - 9) = a_{2n}$
     استنتج تحليلا إلى جداء عوامل أولية للعدد $a_6$
   - بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $PGCD(b_n\,, c_n) = PGCD(b_n\,, 11)$
     استنتج أنّ $b_n$ و $c_n$ أوليان فيما بينهما
2. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $b_3x + c_3y = 1 \ldots (E)$
   - بيّن أنّ المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$
   - تحقق أنّ (727 , 731-) حل للمعادلة (E) ، ثمّ حل في $\mathbb{Z}^2$ هذه المعادلة.

**التمرين 19 :**

ليكن $n$ عددا طبيعيا

1. برهن أنّ العددين $n^2 + 5n + 4$ و $n^2 + 3n + 2$ يقبلان القسمة على $(n+1)$
2. عيّن قيم $n$ حتى يقبل العدد $3^2 + 15n + 19$ القسمة على $(n+1)$
3. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : العدد $3n^2 + 15n + 19$ لا يقبل القسمة على $n^2 + 3n + 2$.

**التمرين 20 :**

1. عيّن الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584
2. عيّن العددين الطبيعيين $a$ و $b$ حيث $b > a$ اللذين يحققان : $\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases}$

**التمرين 21 :**

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الإقليمية للعدد $3^n$ على 10
2. استنتج باقي القسمة الإقليمية على 10 للعدد $63 \times 9^{2001} - 7^{1422}$
3. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون : $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1)\times 3^{2n+1}[10]$
4. عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يكون : $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$.

**التمرين 22 :**

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الإقليمية للعدد $4^n$ على 11
2. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإنّ العدد الطبيعي $k$ حيث : $k = 15^{5n+1} - 2\times 26^{5n+2} + 3\times 125^{5n+3}$
   يقبل القسمة على 11
3. عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث : $\begin{cases} 15^{5n+1} + 26^{5n+2} + 3n \equiv 0[11] \\ 8 \le n \le 50 \end{cases}$

**التمرين 23 :**

1. عيّن PGCD (2688 ; 3024)
2. أ. تحقق أنّ المعادلتين $2688x + 3024y = -3360 \ldots (1)$ و $8x + 9y = -10 \ldots (2)$ متكافئتان
   ب. تحقق أنّ (2- ; 1) حل خاص للمعادلة (2)
3. نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ المستويين $(P)$ و $(P')$ اللذين معادلتاهما على الترتيب
   $(P): x + 2y - z = -2$ و $(P'): 3x - y + 5z = 0$
   أ. بيّن أنّ المستويين $(P)$ و $(P')$ يتقاطعان وفق مستقيم $(d)$
   ب. بيّن أنّ إحداثيات نقط $(d)$ تحقق المعادلة (2) ، ثمّ استنتج (E) مجموعة نقط $(d)$ التي إحداثياتها أعداد صحيحة.

**التمرين 24 :**

لتكن $a$ ، $b$ ، $x$ ، $y$ أربعة أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $x = 2a + 3b$ و $y = 3a + 4b$

1. بيّن أنّ $PGCD(a;b) = PGCD(x;y)$ ، ثمّ استنتج أنه إذا كان $a$ و $b$ أوليين فيما بينهما فإنّ $x$ و $y$ أوليان فيما بينهما
2. عيّن الثنائيات $(\alpha;\beta)$ من الأعداد الطبيعية بحيث : $PGCD(\alpha;\beta) = 5$ و $(2\alpha + 3\beta)(3\alpha + 4\beta) = 2200$.

**التمرين 25 :**

$a$ و $b$ عددان طبيعيان يُكتبان على الترتيب $\overline{2310}$ ، $\overline{252}$ في نظام تعداد ذي الأساس $n$ ، و ليكن $d = PGCD(a,b)$

1. برهن أنّ $(2n+1)$ يقسم كلا من $a$ و $b$ و أنّ $d = 2n + 1$ أو $d = 2(2n+1)$
2. نأخذ $n = 6$. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $ax + by = -26$

**التمرين 26 :**

1. أ. ما هو باقي القسمة الإقليمية للعدد $6^{10}$ على 11؟ علل.
   ب. ما هو باقي القسمة الإقليمية للعدد $6^4$ على 5؟ علل.
   ج. استنتج أنّ $6^{40} \equiv 1[11]$ و أنّ $6^{40} \equiv 1[5]$
   د. بيّن أنّ $6^{40} - 1$ يقبل القسمة على 55
2. $x$ و $y$ عددان صحيحان
   أ. بيّن أنّ المعادلة التالية ليس لها حلول : $65x - 40y = 1 \dots (E)$
   ب. بيّن أنّ المعادلة التالية تقبل على الأقل حلا : $17x - 40y = 1 \dots (E')$
   ج. عيّن باستعمال خوارزمية إقليدس حلا خاصا للمعادلة (E')
   د. حل المعادلة (E') و استنتج وجود عدد طبيعي وحيد $x_0$ أصغر من 40 حيث : $17x_0 \equiv 1[40]$
3. من أجل كل عدد طبيعي $a$ ، بيّن أنّه إذا كان : $a^{17} \equiv b[55]$ و $a^{40} \equiv 1[55]$ فإنّ : $b^{33} \equiv 1[55]$.

**التمرين 27 :**

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ باقي القسمة الإقليمية للعدد $3^n$ على 11
2. ما هو باقي قسمة $4 \times 69^{10n+6} + 7 \times 58^{20n+13} - 8$ على 11 ؟
3. أوجد قيم $n$ الطبيعية بحيث يكون $n^2 + 36^{5n} \times n + 14^{5n+3} + 5$ قابلا للقسمة على 11
4. أوجد الأعداد الصحيحة β التي تحقق من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $80^{3n+2} \times \beta + 91^{3n+1} \equiv 0[11]$ ، ثمّ استنتج قيم β الصحيحة بحيث : $|\beta| \leq 20$
5. أوجد الثنائيات $(x,y)$ من $\mathbb{N}^2$ بحيث : $14^x + 25^y \equiv 8[11]$.

**التمرين 28 :**

1. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $3x - 2y = 1 \dots (E)$
2. ليكن $n$ عددا طبيعيا غير معدوم
   أ. بيّن أنّ الثنائية $(14n + 3 , 21n + 4)$ هي حل للمعادلة (E)
   ب. استنتج أنّ العددين $21n + 4$ و $14n + 3$ أوليان فيما بينهما
3. ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين : $21n + 4$ و $2n + 1$
   أ. بيّن أنّ $d = 1$ أو $d = 13$
   ب. بيّن أنّه إذا كان $d = 13$ فإنّ $n \equiv 6[13]$
4. من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n \geq 2$ نضع : $A = 21n^2 - 17n - 4$ و $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$
   أ. بيّن أنّ العددين $A$ و $B$ يقبلان القسمة على $(n-1)$ في المجموعة $\mathbb{Z}$
   ب. جد حسب قيم $n$ القاسم المشترك الأكبر للعددين $A$ و $B$.

**التمرين 29 :**

1. نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ المعادلة : $11n - 24m = 1 \ldots (1)$
   أ. برر أنّ المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا
   ب. عيّن مجموعة حلول المعادلة (1) علما أنّ الثنائية (5 , 11) حل لها
2. أ. بيّن أنّ 9 يقسم $10^{11} - 1$ و $10^{24} - 1$
   ب. بيّن أنّه مهما يكن الحل (n , m) فإنّ : $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$
   ج. بيّن أنّ : $10^{11} - 1$ يقسم $10^{11n} - 1$ و أنّ : $10^{24} - 1$ يقسم $10^{24m} - 1$
   استنتج وجود عددين صحيحين N و M بحيث : $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$
   د. بيّن أنّ كل قاسم مشترك للعددين $10^{24} - 1$ و $10^{11} - 1$ يقسم 9
   ه. استنتج مما سبق $PGCD(10^{11} - 1; 10^{24} - 1)$.

**التمرين 30 :**

$x$ و $y$ عددان طبيعيان حيث $0 < x \le y$ ، نضع $PGCD(x,y) = d$ و $PPCM(x,y) = m$
نريد تعيين $x$ و $y$ حيث $m^2 - 5d^2 = 2000 \ldots (*)$

1. برهن أنّه إذا كانت الثنائية $(x , y)$ حلا للمعادلة $(*)$ فإنّ $d^2$ يكون قاسما للعدد 2000
2. حلل العدد 2000 إلى جداء عوامل أولية ، ثمّ استنتج القواسم المربعة التامة للعدد 2000
3. برهن أنّ 5 هو قاسم مشترك للعددين $d$ و $m$. ما هي القيم الممكنة للعدد $d$ ؟
4. استنتج القيم الممكنة للعددين $x$ و $y$.



**التمرين 31 :**

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $16x + 59y = 2006 \ldots (1)$

1. حلل إلى جداء عوامل أولية العدد 2006 ، ثمّ استنتج أنّه إذا كانت الثنائية $(x , y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ $x$ مضاعف للعدد 59
2. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)
3. عيّن الحلول $(x , y)$ للمعادلة (1) التي تنتمي $\mathbb{N}^{*2}$
4. عيّن الأعداد الطبيعية غير المعدومة $a$ و $b$ التي تحقق $16m + 59d = 2006$ حيث $PGCD(x,y) = d$ و $PPCM(x,y) = m$.

**التمرين 32 :**

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ باقي القسمة الإقليمية لكل من العددين $3^n$ و $4^n$ على 7
2. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون العدد $2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1}$ قابلا للقسمة على 7
3. من أجل كل عدد طبيعي $n$ نضع : $u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$
   أ. أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
   ب. ما هي قيم العدد الطبيعي $n$ التي يكون من أجلها $S_n$ قابلا للقسمة على 7.

**التمرين 33 :**

1. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $91x + 10y = 1 \ldots (1)$
   أ. عيّن حلا خاصا للمعادلة (1) ، ثمّ استنتج حلا خاصا للمعادلة $91x + 10y = 412 \ldots (2)$
   ب. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (2)
2. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون العدد الطبيعي $_n = 3^{2n} - 1$ قابلا للقسمة على 8
3. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $A_3x + A_2y = 3296 \ldots (3)$
   أ. عيّن في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (3) ، ثمّ بيّن أنّ المعادلة (3) تقبل حلا وحيدا $(\alpha, \beta)$ من $\mathbb{N}^2$ يُطلب تعيينه
   ب. جد قيمة العدد الطبيعي $(\alpha +)A_2 + 10$.

**التمرين 34 :**

1- أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي $n$ بواقي قسمة $9^n$ على 11

2- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $(2011)^{5n+1} + (1993)^{10n} + (1431)^n$ يقبل القسمة على 11

3- عيّن العدد الطبيعي $n$ بحيث :

$$\begin{cases} (1431)^n + 5n + (2011)^{5n+1} \text{ يقبل القسمة على } 11 \\ 90 < n < 100 \text{ و} \end{cases}$$

**التمرين 36 :**

$a$ و $b$ عددان طبيعيان حيث :

$$\begin{cases} a = 5n + 3 \\ b = 2n + 1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

1. أثبت أن العددين $a$ و $b$ أوليان فيما بينهما

2. نضع : $x = 5m + 3$ ، $y = 2m - 1$ ، $m \in \mathbb{N}$

أ- عين علاقة بين $x$ و $y$ مستقلة عن العدد الطبيعي $m$

ب- نفرض أن $PGCD(x, y) = d$

- عين القيم الممكنة لـ $d$
- عين الثنائيات $(x, y)$ حيث $d = 11$.

**التمرين 37 :**

1- أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي $n$ باقي قسمة $4^{2n}$ على 5

2- عيّن باقي قسمة $3^n$ على 5

3- ما هو باقي قسمة $1428^{2009}$ على 5 ؟

4- ليكن العدد الطبيعي $A_n$ حيث : $A_n = 2 + 4^{2n} + 3^n$

- عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث $A_n$ يقبل القسمة على 5.

**التمرين 38 :**

1. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $23x - 17y = 6$

2. استنتج الأعداد الطبيعية $A$ الأصغر من 1000 حيث باقي قسمة $A$ على 23 هو 2 و باقي قسمة $A$ على 17 هو 8

3. أكتب الأعداد $A$ المحصّل عليها في النظام ذي الساس 7.

**التمرين 39 :**

1- أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الإقليدية للعدد $7^n$ على 10

- استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $k$ ، يقبل العدد $7^{4k+3} + 7^{4k+2} + 7^{4k+1} + 7^{4k}$ القسمة على 10

2- من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، نضع : $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n$

- أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $S_{n+4} \equiv S_n [10]$
- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الإقليدية للعدد $S_n$ على 10.

**التمرين 40 :**

أرقام نظام التعداد ذو الأساس 12 هي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، α ، β

1- ليكن $N_1$ العدد المكتوب في النظام ذي الأساس 12 على الشكل $\overline{\beta 1 \alpha}^{12}$. أكتب $N_1$ في النظام العشري

2- ليكن $N_2$ العدد المكتوب في النظام العشري على الشكل 1131. أكتب $N_2$ في النظام ذي الأساس 12

3- ليكن $N$ العدد المكتوب في النظام ذي الأساس 12 على الشكل $\overline{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0}^{12}$

أ. بيّن أنّ $N \equiv a_0[3]$ ، ثمّ استنتج خاصية لقابلية القسمة على 3 لعدد مكتوب في النظام ذي الأساس 12

- تأكد من ذلك باستعمال كتابة $N_2$ في النظام ذي الأساس 12

ب. بيّن أنّ $N \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0[11]$ ، ثمّ استنتج خاصية لقابلية القسمة على 11 لعدد مكتوب في النظام ذي الأساس 12

- تأكد من ذلك باستعمال كتابة $N_1$ في النظام ذي الأساس 12

4- نُذكّر أنّه إذا كان $a$ و $b$ أوليان فيما بينهما و كان $N$ يقبل القسمة على $a$ و $b$ فإنّ $N$ يقبل القسمة على الجداء $ab$

- نعتبر $N = \overline{x4y}^{12}$. عيّن قيم $x$ و $y$ التي من أجلها يكون $N$ قابلا للقسمة على 33.

**التمرين 41 :**

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $8x + 5y = 1 \ldots (E)$

1. جد حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثمّ حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ هذه المعادلة

2. ليكن $N$ عددا طبيعيا حيث يوجد عددان طبيعيان $a$ و $b$ يحققان : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$

أ. بيّن أنّ الثنائية $(a, -b)$ حل للمعادلة (E)

ب. جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $N$ على 4

3. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $8x + 5y = 100$

4. للاشتراك في رحلة ، دفع مجموعة أشخاص من الجنسين 100 قطعة نقدية ، حيث دفع كل ذكر 8 قطع نقدية و دفعت كل أنثى 5 قطع نقدية.

ما هو عدد الذكور و عدد الإناث في هذه المجموعة ؟



**التمرين 42 :**

$n$ عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2.

1. بيّن أنّ العددين $n$ و $2n + 1$ أوليان فيما بينهما

2. نضع : $\alpha = n + 3$ ، $\beta = 2n + 1$ و $PGCD(\alpha, \beta) = d$

أ. ما هي القيم الممكنة للعدد $d$ ؟

ب. بيّن أنّ α و β مضاعفان للعدد 5 إذا و فقط إذا كان $(n - 2)$ مضاعفا للعدد 5

3. نعتبر العددين $a$ و $b$ حيث : $a = n^3 + 2n^2 - 3n \,; b = 2n^2 - n - 1$

بيّن أنّ العددين $a$ و $b$ يقبلان القسمة على $(n - 1)$

4. نضع : $PGCD[n(n + 3), (2n + 1)] = d'$

أ. بيّن أنّ $d = d'$

ب. استنتج $PGCD(a, b)$

ج. حدد $PGCD(, b)$ من أجل $n = 2001$ ثمّ من أجل $n = 2002$.

# مواضيع القسمة و ا لموافقات في البكالوريا

**التمرين 01 : بكالوريا 2012 ر**

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$التالية : $2011x+1432y=31 \dots (1)$

أ. أثبت أن العدد 2011 أولي

ب. باستعمال خوارزمية إقليدس، عيّن حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة $(1)$ ، ثمّ حل المعادلة $(1)$

2) أ. عيّن حسب قيم العدد الطبيعي $n$ باقي القسمة الإقليدية للعدد $2^n$ على 7 ، ثمّ جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7

ب. عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون : $2010^n+2011^n+1432^n \equiv 0[7]$

3) $N$ عدد طبيعي يُكتب $\overline{2\gamma\alpha}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث : $\alpha$ ، $\beta$ ، $\gamma$ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة $(1)$

عيّن $\alpha$ ، $\beta$ و $\gamma$ ، ثمّ اكتب $N$ في النظام العشري.

**التمرين 02 : بكالوريا 2012 ر**

$(u_n)$ هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=16$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=6u_n-9$

1) أ. احسب بواقي قسمة كل من $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ ، $u_4$ على 7

ب. خمّن قيمة للعدد $a$ و قيمة للعدد $b$ بحيث: $u_{2k}\equiv a[7]$ و $u_{2k+1}\equiv b[7]$

2) أ. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+2}\equiv u_n[7]$

ب. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $k$ ، $u_{2k}\equiv 2[7]$ ، ثمّ استنتج أنّ : $u_{2k+1}\equiv 3[7]$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n=u_n-\frac{9}{5}$

أ. بيّن أنّ المتتالية $(v_n)$ هندسية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب. أحسب بدلالة $n$ كلا من $u_n$ و $S_n$ حيث : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

**التمرين 03 : بكالوريا 2012 ت ر**

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي قسمة $9^n$ على 11
2. ما هو باقي قسمة $2011^{2012}$ على 11 ؟
3. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، العدد $(4\times 9^{15n+1}+4\times 2011^{10n}+2011^{2012})$ يقبل القسمة على 11
4. عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $(2011^{2012}+2n+2)$ مضاعفا للعدد 11.

**التمرين 04 : بكالوريا 2012 ت ر**

نسمي (S) المجلة التالية : $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ حيث $x$ عدد صحيح $(x \in \mathbb{Z})$

1. بيّن أنّ العدد 153 حل للجملة (S)
2. إذا كان $x_0$ حلا لـ (S) ، بيّن أنّ : ($x$ حل لـ $(S)$) يكافئ $\begin{pmatrix} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{pmatrix}$
3. حل الجملة (S)
4. يُريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب ، فإذا استعمل علبا تتسع لـ 15 كتاب بقي لديه 3 كتب ، و إذا استعمل علبا تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب. إذا علمت أنّ عدد الكتب التي بحوزته محصور بين 500 و 600 كتاب ، ما هو عدد هذه الكتب ؟

**التمرين 05 : بكالوريا 2011 ر**

$(u_n)$ متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق:

$\begin{cases} u_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases}$ حيث : $\begin{cases} m = \text{PPCM}(u_3, u_5) \\ d = \text{PGCD}(u_3, u_5) \end{cases}$

1. عيّن الحدين $u_3$ و $u_5$ ، ثمّ استنتج $u_0$
2. أكتب $(u_n)$ بدلالة $n$ ، ثمّ بيّن أنّ : 2010 حد من حدود $(u_n)$ و عيّن رتبته
3. عيّن الحد الذي ابتداءً منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من $(u_n)$ يساوي 10080
4. $n$ عدد طبيعي غير معدوم.

أ- أحسب بدلالة $n$ المجموع $S$ حيث : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n}$

ب- استنتج بدلالة $n$ المجموعين $S_1$ و $S_2$ حيث : $S_1 = u_0 + u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n}$

$S_2 = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1}$

**التمرين 06 : بكالوريا 2011 ر**

1. نعتبر المعادلة : (E) ... $13x - 7y = -1$ حيث : $x$ و $y$ عددان صحيحان. حلّ المعادلة (E)
2. عيّن الأعداد الصحيحة النسبية $a$ بحيث : $\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$
3. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد $9^n$ على كل من 7 و 13
4. ليكن العدد الطبيعي $b$ المكتوب في نظام التعداد ذي الأساس 9 كما يلي : $\overline{\alpha 00 \beta 086}$ حيث : $\alpha$ و $\beta$ عددان طبيعيان ، $\alpha \neq 0$. عيّن $\alpha$ و $\beta$ حتى يكون $b$ قابلا للقسمة على 91.

**التمرين 07 : بكالوريا 2011 ت ر**

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية :

1. المعادلة $21x + 14y = 40$ لا تقبل حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة
2. في نظام التعداد ذي الأساس 7 يكون : $\overline{3421} + \overline{1562} = \overline{5413}$
3. باقي القسمة الإقليدية للعدد : $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{2011}$ على 7 هو : 6

**التمرين 08 : بكالوريا 2011 ت ر**

من أجل كل عدد طبيعي $n$ نضع : $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

1. تحقّق أنّ : $4 \equiv -3[7]$ ، ثمّ بيّن أنّ : $A_3 \equiv 6[7]$
2. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ ، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين $2^n$ و $3^n$ على 7
3. بيّن أنّه إذا كان $n$ فرديا فإنّ : $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7 و استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $A_{2011}$ على 7
4. ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد $A_{1432}$ على 7 ؟

**التمرين 09 : بكالوريا 2010 ر**

1. نعتبر المعادلة : $7x + 65y = 2009 \ldots (1)$ ، حيث : $x$ و $y$ عددان صحيحان.
   أ- بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x , y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ $y$ مضاعف للعدد 7
   ب- حل المعادلة (1)
2. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ ، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين $2^n$ على 9
3. عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يقبل العدد $2^{6n} + 3n + 2$ القسمة على 9
4. نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n = 2^{6n} - 1$
   أ- تحقّق أنّ $u_n$ يقبل القسمة على 9
   ب- حل المعادلة : $(7u_1)x + (u_2)y = 126567 \ldots (2)$ ذات المجهول $(x , y)$ ، حيث : $x$ و $y$ عددان صحيحان.
   ت- عيّن الثنائية $(x_0 , y_0)$ حل المعادلة (2) حيث $x_0$ و $y_0$ عددان طبيعيان مع $y_0 \geq 25$.

**التمرين 10 : بكالوريا 2010 ر**

1. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، العدد $3^{3n} - 1$ يقبل القسمة على 13
2. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، يقبل كل من العددين $3^{3n+1} - 3$ و $3^{3n+2} - 9$ القسمة على 13
3. عيّن حسب قيم $n$ ، باقي القسمة الإقليدية للعدد $3^{3n}$ على 13 ، و استنتج باقي قسمة $2005^{2010}$ على 13
4. نضع من أجل كل عدد طبيعي $p$ : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$
   أ. من أجل $p = 3n$ ، عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $A_p$ على 13
   ب. برهن أنّه إذا كان $p = 3n + 1$ ، فإنّ $A_p$ يقبل القسمة على 13
   ج. عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $A_p$ على 13 من أجل $p = 3n + 2$
5. يكتب العددان الطبيعيان $a$ و $b$ في نظام العد ذي الأساس 3 كما يلي :
   $a = \overline{1001001000}$ و $b = \overline{1000100010000}$
   أ. تحقّق أنّ العددين الطبيعيين $a$ و $b$ يكتبان على الشكل $A_p$ في النظام العشري
   ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين $a$ و $b$ على 13.

**التمرين 11 : بكالوريا 2010 ت ر**

نعتبر العدد الطبيعي $n$ الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي : $n = \overline{11\alpha 00}$ حيث $\alpha$ عدد طبيعي

1. عيّن $\alpha$ حتى يكون $n$ قابلا للقسمة على 3
2. عيّن العدد $\alpha$ حتى يكون $n$ قابلا للقسمة على 5. استنتج قيمة $\alpha$ حتى يكون $n$ قابلا للقسمة على 15
3. نأخذ $\alpha = 4$ ، أكتب العدد $n$ في النظام العشري.

### التمرين 12 : بكالوريا 2010 ت ر

1. عيّن حسب قيم العدد الطبيعي $n$ ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد $10^n$ على 13
2. تحقّق أنّ : $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$
3. عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون : $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13]$.

### التمرين 13 : بكالوريا 2009 ر

$x$ عدد طبيعي أكبر من 1 و $y$ عدد طبيعي. $A$ عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس $x$ بالشكل $A = \overline{5566}$

1. أ. أنشر العبارة $(5x^2+6)(x+1)$ ، ثمّ أوجد علاقة تربط بين $x$ و $y$ إذا علمت أنّ $A = (5x^2+6)(2+2y)$
   ب. أحسب $x$ و $y$ إذا علمت أنّ $x$ عدد أولي أصغر من 12 ، ثمّ اكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري
2. أ. عيّن الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584
   ب. عيّن الأعداد الطبيعية $a$ و $b$ حيث $a > b$ التي تحقق :

$$\begin{cases} a+b = 32 \\ a^2+b^2 = 584 \end{cases}$$

### التمرين 14 : بكالوريا 2009 ت ر

1. أ. عيّن الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2009
   $u_0$ و $a$ عددان طبيعيان غير معدومين ، $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها $a$ و حدها الأول $u_0$ بحيث :
   $u_1^2 + u_2 + 35a^2 = 2009$
   ب. أحسب $a$ و $u_0$
2. نضع $a = 7$ و $u_0 = 2$ ، أحسب $u_n$ بدلالة $n$
3. نضع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
   أ. عبّر عن $S_n$ بدلالة $n$
   ب. عيّن العدد الطبيعي $n$ حتى يكون $S_n = 800$



### التمرين 15 : بكالوريا 2009 ت ر

1. حل المعادلة التفاضلية : $y' = (\ln 2)y$
2. نسمي $f$ الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يحقق $f(0) = 1$ ، عيّن عبارة $f(x)$
3. $n$ عدد طبيعي.
   أ. أدرس بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $2^n$
   ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009) - 4$
4. أ. أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث $S_n = f(0) + f(1) + \cdots + f(n)$
   ب. عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ التي يقبل من أجلها $S_n$ القسمة على 7

### التمرين 16 : بكالوريا 2008 ر

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين $x$ و $y$ حيث : $3x - 21y = 78$

1. أ. بيّن أنّ (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$
   ب. أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x, y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 5[7]$. استنتج حلول المعادلة (E)
2. أ. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الإقليدية للعدد $5^n$ على 7
   ب. عيّن الثنائيات $(x, y)$ من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E) و تحقق $5^x + 5^y \equiv 3[7]$.

**التمرين 17 : بكالوريا 2008 ت ر**

$n$ عدد طبيعي أكبر من 5.

1. $a$ و $b$ عددان طبيعيان حيث : $a = n - 2$ و $b = 2n + 3$
   أ. ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين $a$ و $b$ ؟
   ب. بيّن أنّ العددين $a$ و $b$ من مضاعفات 7 إذا و فقط إذا كان $n + 5$ مضاعفا للعدد 7
   ج. عيّن قيم $n$ التي يكون من أجلها $\text{PGCD}(a ; b) = 7$
2. نعتبر العددين الطبيعيين $p$ و $q$ حيث : $p = 2n^2 - 7n - 15$ و $q = n^2 - 7n + 10$
   أ. بيّن أنّ كل العددين $p$ و $q$ يقبل القسمة على $n - 5$
   ب. عيّن تبعا لقيم $n$ و بدلالة $n$ ، $\text{PGCD}(p ; q)$.

**التمرين 18 : بكالوريا 2008 ت ر**

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين $x$ و $y$ : (I) ... ... $4x - 9y = 319$

1. تأكد أنّ الثنائية $(1 , 82)$ حل للمعادلة (I)
   أ- حل المعادلة (I)
2. عيّن الثنائيات $(a , b)$ الصحيحة حلول المعادلة : (II) ... ... $4a^2 - 9b^2 = 319$
3. استنتج الثنائيات $(x_0 , y_0)$ حلول المعادلة (I) بحيث $x_0$ و $y_0$ مربعين تامين.

**التمرين 19 : بكالوريا 2007**

$n$ عدد طبيعي أكبر تماما من 2 ، و نعتبر الأعداد الطبيعية : $a = 2n + 1$ ، $b = 4n + 3$ و $c = 2n + 3$

1. أثبت أنّ العددين $a$ و $b$ أوليان فيما بينهما و استنتج أنّ الأعداد $a$ ، $b$ و $c$ أولية فيما بينها
2. عيّن تبعا لقيم العدد $n$ قيمة القاسم المشترك الأكبر للعددين $b$ و $c$
3. عيّن قيمة $n$ بحيث يكون : $\text{PGCD}(b ; c) = 7$ و $\text{PPCM}(b ; c) = 1305$
4. أكتب العدد $b^2$ في نظام العد الذي أساسه $a$
5. نفرض أنّ $(a ; b ; c)$ هي إحداثيات نقطة ω في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$
   أ- بيّن أنّ النقطة ω تنتمي إلى مستقيم (Δ) يطلب تعيينه
   ب- أكتب معادلة للمستوي $(P)$ الذي يشمل المبدأ $O$ و يحوي المستقيم (Δ).

**التمرين 20 : بكالوريا 2005**

$n$ عدد طبيعي ، و نعتبر العددين الطبيعيين : $\alpha = n^2 + n$ و $\beta = n + 2$

1. برهن أنّ $PGCD(\alpha;\beta) = PGCD(\beta;n)$
2. استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(\alpha;\beta)$
3. $a$ و $b$ عددان طبيعيان يُكتبان في نظام العد الذي أساسه $n$ على الشكل : $a = \overline{3520}$ و $b = \overline{384}$
   أ. برهن أنّ العدد $3n + 2$ قاسم مشترك للعددين $a$ و $b$
   ب. استنتج تبعا لقيم $n$ أنّ $PGCD(a;b)$ هو $3n + 2$ أو $2(3n + 2)$
   ج. عيّن العددين $\alpha$ و $\beta$ علما أنّ $PGCD(a;b) = 41$.

**التمرين 21 : بكالوريا 2004**

ليكن $\lambda$ عددا صحيحا و نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ... $43x - 13y = \lambda$

1. تحقق أنّ $(-3\lambda;-10\lambda)$ حل للمعادلة (1) و اعط مجموعة حلول هذه المعادلة
2. $n$ عدد طبيعي يُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 6 على الشكل : $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ و يُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 5 على الشكل $\overline{\beta 0\gamma\gamma\gamma}$ ، حيث $\alpha$ و $\beta$ و γ أعداد طبيعية
   أ. تحقق أنّ $43\alpha - 13\beta = \gamma$
   ب. عيّن الأعداد $\alpha$ و $\beta$ و γ و اكتب العدد $n$ في النظام العشري.

**التمرين 22 : بكالوريا 2003**

1. $\alpha$ و $\beta$ عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما و $\alpha > \beta$. عيّن $\alpha$ و $\beta$ بحيث يكون : $\alpha(\alpha^2-19)=35\beta$
2. $(u_n)$ متتالية هندسية حدّها الأول $u_0$ و أساسها $q$ حيث $u_0$ و $q$ عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما و $q > u_0$
   أ. عيّن $u_0$ و $q$ إذا علمت أنّ : $35u_0^2+19u_1-u_0q^3=0$
   ب. أحسب بدلالة $n$ المجموع : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$
   ج. عيّن قيم $n$ بحيث يقبل العدد $S_n$ القسمة على 30.

**التمرين 23 : بكالوريا 2001**

1. $\alpha$ و $\beta$ عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما. عيّن $\alpha$ و $\beta$ بحيث يكون : $\beta(\beta^3-1)=28\alpha^2$
2. $a$ ، $b$ ، $c$ ، $d$ و $e$ أعداد طبيعية غير معدومة تشكل بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q$
   عيّن هذه الأعداد إذا علمت أن العددين a و $q$ عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما و أنّ $28a^3=e-b$.

**التمرين 24 : بكالوريا 2001**

1. عيّن $PGCD(225;180)$
2. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(1)$ ... $225x-180y=90$
3. عيّن مجموعة الثنائيات $(x\,;y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق $|x-y+1|<2$
4. $a$ و $b$ عددان طبيعيان يُكتبان في نظام عدّ أساسه $\alpha$ على الشكل : $a=\overline{52}$ و $b=\overline{252}$ و يُكتبان في نظام عدّ أساسه $\beta$ على الشكل : $a=\overline{44}$ و $b=\overline{206}$. عيّن $\alpha$ و $\beta$ ثمّ $a$ و $b$.

**التمرين 25 : بكالوريا 2000**

1. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(1)$ ... $9x-14y=13$ (لاحظ أنّ (3;1) حلّ خاص)
2. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(2)$ ... $45x-28y=130$
   أ. بيّن أنّه إذا كان $(x\,;y)$ حلا للمعادلة (2) فإنّ $x$ مضاعف للعدد 2 و أنّ $y$ مضاعف للعدد 5
   ب. عيّن مجموعة حلول المعادلة (2)
3. $n$ عدد طبيعي يُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 9 على الشكل : $\overline{2\alpha\alpha3}$ و يُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 7 على الشكل $\overline{5\beta\beta6}$ ، حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان طبيعيان
   عيّن العددين $\alpha$ و $\beta$ و اكتب العدد $n$ في النظام العشري.

**التمرين 26 : بكالوريا 1996**

1. حلل كلا من العددين 1995 و 105 إلى جداء عوامل أولية
2. $\alpha$ و $\beta$ عددان طبيعيان حيث $\alpha<\beta$. حل في المجموعة $\mathbb{N}^2$ المعادلة $\alpha\beta=105$
3. $a$ و $b$ عددان طبيعيان غير معدومين و غير أوليين فيما بينهما بحيث $a<b$.
   عيّن $a$ و $b$ بحيث يكون : $\begin{cases} 95d+19m=1995 \\ d<7 \end{cases}$ حيث $d$ هو $PGCD(a\,;b)$ و $m$ هو $PPCM(a\,;b)$.

**التمرين 27 : بكالوريا 1994**

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الإقليمية للعدد $2^n$ على 10. استنتج رقم آحاد العدد $1994^{1414}$
2. $(u_n)$ متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ بـ : $u_n=2^n$
   أ. تحقق أنّ $(u_n)$ هندسية
   ب. احسب بدلالة $n$ العدد : $S_n=(5+2^1)+(5+2^2)+(5+2^3)+\cdots+(5+2^n)$
   ج. أوجد قيم العدد $n$ بحيث يكون العدد $S_n$ مضاعفا للعدد 10.

**التمرين 28 : بكالوريا 1991**

1. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $18x + 4y = 84$ و عيّن مجموعة الحلول $(x\,;\,y)$ التي تحقق $x\,y > 0$
2. $n$ عدد طبيعي يُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 5 على الشكل $\overline{30\alpha\beta\gamma}$ و يُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 7 على الشكل $\overline{55\alpha\beta}$ ، حيث $\alpha$ و $\beta$ و $\gamma$ أعداد طبيعية
عيّن الأعداد $\alpha$ و $\beta$ و $\gamma$ و اكتب العدد $n$ في النظام العشري.

نتمنى لكم النجاح في امتحان البكالوريا
مع تحيات الأستاذ عبد الكريم واضحي

# حلول تمارين القسمة و الموافقات

**التمرين 01:**

1) $\sqrt{251} \approx 15,84$ ; بما أنّ العدد 251 لا يقبل القسمة على كل من 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 و 13 فهو إذن أولي

2) $2008 = 2^3 \times 251$ ; الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2008 هي 1 و 2

3) $m^3 + 35d^3 = 2008\ ; a = da', b = db'; PGCD(a', b') = 1$

$$m \times d = a \times b \Rightarrow m = \frac{a \times b}{d} = \frac{da' \times db'}{d} = da'b'$$

$$m^3 + 35d^3 = 2008 \Rightarrow (da'b')^3 + 35d^3 = 2008 \Rightarrow d^3[(a'b')^3 + 35] = 2008 \Rightarrow d^3/2008 \Rightarrow d \in \{1,2\}$$

$d = 1: (a'b')^3 + 35 = 2008 \Rightarrow (a'b')^3 = 1973 \Rightarrow a'b' = \sqrt[3]{1973} \approx 12,54$ مستحيل لأن $a'$ و $b'$ عددان صحيحان

$$d = 2: 2^3[(a'b')^3 + 35] = 2008 \Rightarrow (a'b')^3 = 216 \Rightarrow a'b' = \sqrt[3]{216} = 6$$

$$(a', b') \in \{(1,6); (6,1); (2,3); (3,2)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(2,12); (12,2); (4,6); (6,4)\}$$

**التمرين 02:**

1) $5^0 \equiv 1[7]\ ;\ 5^1 \equiv 5[7]\ ;\ 5^2 \equiv 4[7]\ ;\ 5^3 \equiv 6[7]\ ;\ 5^4 \equiv 2[7]\ ;\ 5^5 \equiv 3[7]\ ;\ 5^6 \equiv 1[7]$

$5^{6k} \equiv 1[7]\ ;\ 5^{6k+1} \equiv 5[7]\ ;\ 5^{6k+2} \equiv 4[7]\ ;\ 5^{6k+3} \equiv 6[7]\ ;\ 5^{6k+4} \equiv 2[7]\ ;\ 5^{6k+5} \equiv 3[7]$

2) $6 \equiv -1[7] \Rightarrow 6^{2n} \equiv (-1)^{2n}[7] \Rightarrow 6^{2n} \equiv 1[7]$

3) $5^n + 6^{2n} + 3 \equiv 0[7] \Rightarrow 5^n + 1 + 3 \equiv 0[7] \Rightarrow 5^n + 4 \equiv 0[7] \Rightarrow 5^n \equiv 3[7] \Rightarrow n = 6k + 5\ , k \in \mathbb{N}$

**التمرين 03:**

1) $4^0 \equiv 1[11]\ ;\ 4^1 \equiv 4[11]\ ;\ 4^2 \equiv 5[11]\ ;\ 4^3 \equiv 9[11]\ ;\ 4^4 \equiv 3[11]\ ;\ 4^5 \equiv 1[11]$

$4^{5k} \equiv 1[11]\ ;\ 4^{5k+1} \equiv 4[11]\ ;\ 4^{5k+2} \equiv 5[11]\ ;\ 4^{5k+3} \equiv 9[11]\ ;\ 4^{5k+4} \equiv 3[11]$

2) $1995 \equiv 4[11] \Rightarrow 1995^n \equiv 4^n[11]\ ; 26 \equiv 4[11] \Rightarrow 26^{10n+2} \equiv 4^{10n+2}[11] \Rightarrow 26^{10n+2} \equiv 4^{5(2n)+2}[11]$
$\Rightarrow 26^{10n+2} \equiv 5[11]$

$6 \times 1995^n + 26^{10n+2} + 7 \equiv 0[11] \Rightarrow 6 \times 4^n + 5 + 7 \equiv 0[11] \Rightarrow 6 \times 4^n + 1 \equiv 0[11]$
$\Rightarrow 6 \times 4^n \equiv 10[11]$

| $n$ | $5k$ | $5k+1$ | $5k+2$ | $5k+3$ | $5k+4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $4^n \equiv$ | 1 | 4 | 5 | 9 | 3 | [11] |
| $6 \times 4^n \equiv$ | 6 | 2 | 8 | 10 | 7 | [11] |

$6 \times 4^n \equiv 10[11] \Rightarrow n = 5k + 3\ ;\ k \in \mathbb{N}$

**التمرين 04:**

1) $5^0 \equiv 1[7]\ ;\ 5^1 \equiv 5[7]\ ;\ 5^2 \equiv 4[7]\ ;\ 5^3 \equiv 6[7]\ ;\ 5^4 \equiv 2[7]\ ;\ 5^5 \equiv 3[7]\ ;\ 5^6 \equiv 1[7]$

$5^{6k} \equiv 1[7]\ ;\ 5^{6k+1} \equiv 5[7]\ ;\ 5^{6k+2} \equiv 4[7]\ ;\ 5^{6k+3} \equiv 6[7]\ ;\ 5^{6k+4} \equiv 2[7]\ ;\ 5^{6k+5} \equiv 3[7]$

2) $26 \equiv 5[7] \Rightarrow 26^{6n+5} \equiv 5^{6n+5}[7] \Rightarrow 26^{6n+5} \equiv 3[7]$

$47 \equiv 5[7] \Rightarrow 47^{12n+2} \equiv 5^{12n+2}[7] \Rightarrow 47^{12n+2} \equiv 5^{6(2n)+2}[7] \Rightarrow 47^{12n+2} \equiv 4[7] \Rightarrow 2 \times 47^{12n+2} \equiv 1[7]$

$26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 3 + 1 + 3[7] \Rightarrow 26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 0[7]$

3) $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n \equiv 0[7] \Rightarrow 3 + 1 + 5n \equiv 0[7] \Rightarrow 5n + 4 \equiv 0[7] \Rightarrow 5n \equiv 3[7]$

| $n \equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | [7] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5n \equiv$ | 0 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 | [7] |

$5n \equiv 3[7] \Rightarrow n \equiv 2[7] \Rightarrow n = 7k + 2\ ;\ k \in \mathbb{N}$

**طريقة ثانية:** لمّا يكون معامل المجهول في الطرف الأول للمعادلة (5) **أوليا** مع الترديد (7)، نضيف الترديد إلى الطرف الثاني للمعادلة (3) حتى نحصل على عدد قابل للقسمة على معامل المجهول ، فيكون حل المعادلة كالتالي:

$5n \equiv 3[7] \Rightarrow 5n \equiv 10[7] \Rightarrow n \equiv 2[7] \Rightarrow n = 7k + 2\ ;\ k \in \mathbb{N}$

**التمرين 05:**

$PGCD(a,b) = d \Rightarrow a = da';\ b = db';\ PGCD(a',b') = 1$

$PGCD(a,b) = d\ ;\ PPCM(a,b) = m \Rightarrow m \times d = a \times b \Rightarrow m = \dfrac{a \times b}{d} = \dfrac{da' \times db'}{d} = da'b'$

1) $\begin{cases} a + b = 420 \\ PGCD(a,b) = 84 \end{cases} \Rightarrow 84a' + 84b' = 420 \Rightarrow 84(a' + b') = 420 \Rightarrow a' + b' = 5$

$(a',b') \in \{(1,4);(4,1);(2,3);(3,2)\} \Rightarrow (a,b) \in \{(84,336);(336,84);(168,252);(252,168)\}$

2) $\begin{cases} a \times b = 360 \\ PGCD(a,b) = 6 \end{cases} \Rightarrow 6a' \times 6b' = 360 \Rightarrow 36(a' \times b') = 360 \Rightarrow a' \times b' = 10$

$(a',b') \in \{(1,10);(10,1);(2,5);(5,2)\} \Rightarrow (a,b) \in \{(6,60);(60,6);(12,30);(30,12)\}$

3) $\begin{cases} a^2 - b^2 = 825 \\ PGCD(a,b) = 5 \end{cases} \Rightarrow (5a')^2 - (5b')^2 = 825 \Rightarrow 25\left(a'^2 - b'^2\right) = 825 \Rightarrow a'^2 - b'^2 = 33$

$\Rightarrow (a' - b')(a' + b') = 33$

$\begin{cases} a' - b' = 1 \\ a' + b' = 33 \end{cases} \Rightarrow 2a' = 34 \Rightarrow a' = 17 \Rightarrow b' = 16 \Rightarrow (a,b) = (85,80)$ ... الحالة الأولى

$\begin{cases} a' - b' = 3 \\ a' + b' = 11 \end{cases} \Rightarrow 2a' = 14 \Rightarrow a' = 7 \Rightarrow b' = 4 \Rightarrow (a,b) = (35,20)$ ... الحالة الثانية

ملاحظة: الحالتان $\begin{cases} a' - b' = 33 \\ a' + b' = 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} a' - b' = 11 \\ a' + b' = 3 \end{cases}$ مرفوضتان لأن $a' + b' > a' - b'$

4) $\begin{cases} PPCM(a,b) = 90 \\ PGCD(a,b) = 18 \end{cases}$ ; $m = da'b' \Rightarrow a' \times b' = \frac{m}{d} = \frac{90}{18} = 5$

$(a',b') \in \{(1,5);(5,1)\} \Rightarrow (a,b) \in \{(18,90);(90,18)\}$

5) $PPCM(a,b) - 9PGCD(a,b) = 13 \Rightarrow m - 9d = 13 \Rightarrow da'b' - 9d = 13 \Rightarrow d(a'b' - 9) = 13 \Rightarrow d/13$
$\Rightarrow d \in \{1,13\}$

$d = 1: a'b' - 9 = 13 \Rightarrow a'b' = 22 \Rightarrow (a',b') \in \{(1,22);(2,11)\} \Rightarrow (a,b) \in \{(1,22);(2,11)\}$

$d = 13: a'b' - 9 = 1 \Rightarrow a'b' = 10 \Rightarrow (a',b') \in \{(1,10);(2,5)\} \Rightarrow (a,b) \in \{(13,130);(26,65)\}$

**التمرين 06:**

$a = 5n^2 + 7 ; b = n^2 + 2 ; PGCD(a,b) = d$

1) $d/a$ و $d/b \Rightarrow d/5b - a \Rightarrow d/5n^2 + 10 - 5n^2 - 7 \Rightarrow d/3$

2) $PGCD(a,b) = 3 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[3] \\ b \equiv 0[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5n^2 + 7 \equiv 0[3] \\ n^2 + 2 \equiv 0[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n^2 + 1 \equiv 0[3] \\ n^2 \equiv 1[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n^2 \equiv 2[3] \\ n^2 \equiv 1[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^2 \equiv 1[3] \\ n^2 \equiv 1[3] \end{cases}$

3)

| $n \equiv$ | 0 | 1 | 2 | [3] |
|---|---|---|---|---|
| $n^2 \equiv$ | 0 | 1 | 1 | [3] |

$n^2 \equiv 1[3] \Rightarrow n \equiv 1[3] \vee n \equiv 2[3]$

$n = 3k : PGCD(a,b) = 1$ ; $n = 3k + 1 \vee n = 3k + 2 : PGCD(a,b) = 3$



**التمرين 07:**

$a = 2n + 3 ; b = 5n - 2 ; PGCD(a,b) = d$

1) $d/a$ و $d/b \Rightarrow d/5a - 2b \Rightarrow d/10n + 15 - 10n + 4 \Rightarrow d/19 \Rightarrow d = 1 \vee d = 19$

إذا كان العددان $a$ و $b$ غير أوليين فيما بينهما فإن $d \neq 1$ منه $d = 19$

2) $PGCD(a,b) = 19 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[19] \\ b \equiv 0[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n + 3 \equiv 0[19] \\ 5n - 2 \equiv 0[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n \equiv 16[19] \\ 5n \equiv 2[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 8[19] \\ 5n \equiv 40[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 8[19] \\ n \equiv 8[19] \end{cases}$

$PGCD(a,b) = 19 \Rightarrow n = 19k + 8 ;\ k \in \mathbb{N}$

**التمرين 08:**

$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 ; b = 2n^2 + n$

1) $a = (2n+1)(n^2 + 2n + 1)$ ; $b = n(2n+1) \Rightarrow$ العدد $(2n+1)$ قاسم مشترك للعددين $a$ و $b$

2) $(n+1) - (n) = 1 \Rightarrow PGCD(n, n+1) = 1$ (حسب نظرية بيزو)

$(n+1)^2 - n(n+2) = 1 \Rightarrow PGCD[n,(n+1)^2] = 1$ (حسب نظرية بيزو)

3) $PGCD(a,b) = (2n+1)PGCD(n^2+2n+1,n) = (2n+1)\underbrace{PGCD[(n+1)^2,n]}_{1} = 2n+1$

**التمرين 09:**

$A = n^4 + n^2 + 1$

1) $A = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2+1)^2 - n^2 = (n^2+1-n)(n^2+1+n) = (n^2-n+1)(n^2+n+1)$

2) $a = n^2 + n + 1\,;\, b = n^2 - n + 1$

- $a = n(n+1)+1\,;\, b = n(n-1)+1$

بما أنّ جداء عددين متتابعين هو عدد زوجي ، فإنّ العددين $n(n+1)$ و $n(n-1)$ زوجيان ، و منه يكون العددان $a$ و $b$ فرديين

- $d/a$ و $d/b \Rightarrow d/a-b \Rightarrow d/2n\,;\, d/a$ و $d/b \Rightarrow d/a+b \Rightarrow d/2n^2+2 \Rightarrow d/2(n^2+1)$
- $n^2+1-n(n) = 1 \Rightarrow PGCD(n^2+1,n) = 1$ (حسب نظرية بيزو)
- $d/a$ و $d/b \Rightarrow d/a-b$ و $d/a+b \Rightarrow d/PGCD(a-b,a+b) \Rightarrow d/PGCD\big(2n,2(n^2+1)\big)$
  $PGCD\big(2n,2(n^2+1)\big) = 2\times PGCD(n,n^2+1) = 2 \Rightarrow d/2 \Rightarrow d=1 \vee d=2$

بما أنّ العددين $a$ و $b$ فرديان ، نستنتج أنّ $PGCD(a,b) = 1$ ، منه العددان أوليان فيما بينهما.

**التمرين 10:**

$a = 11n+3\,;\, b = 13n-1$

1) $d/a$ و $d/b \Rightarrow d/13a-11b \Rightarrow d/50$

2) $50x - 11y = 1$

$50 = 11(4) + 6 \Rightarrow 6 = 50 - 11(4)$

$11 = 6 + 5 \Rightarrow 5 = 11 - 6$

$6 = 5 + 1 \Rightarrow 1 = 6 - 5$

$1 = 6 - 5 = 6 - (11-6) = 2(6) - 11 = 2[50 - 11(4)] - 11 = 50(2) - 11(9) \Rightarrow (x_0,y_0) = (2,9)$

$50(2) - 11(9) = 1 \Rightarrow 50(6) - 11(27) = 3$

$$\begin{cases} 50x - 11y = 3 \\ 50(6) - 11(27) = 3 \end{cases} \Rightarrow 50(x-6) - 11(y-27) = 0 \Rightarrow 50(x-6) = 11(y-27)$$

$$\begin{cases} 11/50(x-6) \\ PGCD(11,50) = 1 \end{cases} \Rightarrow 11/(x-6) \Rightarrow x-6 = 11k \Rightarrow x = 11k+6\,;\, k\in\mathbb{Z}$$

$50(x-6) = 11(y-27) \Rightarrow 50(11k) = 11(y-27) \Rightarrow y-27 = 50k \Rightarrow y = 50k+27;\, k\in\mathbb{Z}$

$S = \{(11k+6\,;50k+27)\}\,;\ k\in\mathbb{Z}$

3) $PGCD(a,b) = 50 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[50] \\ b \equiv 0[50] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11n+3 \equiv 0[50] \\ 13n-1 \equiv 0[50] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11n \equiv 47[50] \\ 13n \equiv 1[50] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 27[50]$

$\Rightarrow n = 50k + 27 \ ; \ k \in \mathbb{N}$

4) $PGCD(a,b) = 25 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[25] \\ b \equiv 0[25] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11n+3 \equiv 0[25] \\ 13n-1 \equiv 0[25] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11n \equiv 22[25] \\ 13n \equiv 1[25] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 2[25]$

$\Rightarrow n = 25k + 2 \ ; \ k \in \mathbb{N}$ ($k$ زوجي)

**التمرين 11:**

$324x - 245y = 7 \ldots (E)$

1) $324 = 245 + 79 \Rightarrow 79 = 324 - 245$

$245 = 79(3) + 8 \Rightarrow 8 = 245 - 79(3)$

$79 = 8(9) + 7 \Rightarrow 7 = 79 - 8(9)$

$7 = 79 - 8(9) = 79 - 9[245 - 79(3)] = 245(-9) + 79(28) = 245(-9) + 28[324 - 245]$

$7 = 324(28) - 245(37) \Rightarrow (x_0, y_0) = (28,37)$

$\begin{cases} 324x - 245y = 7 \\ 324(28) - 245(37) = 7 \end{cases} \Rightarrow 324(x-28) - 245(y-37) = 0 \Rightarrow 324(x-28) = 245(y-37)$

$\begin{cases} 245/324(x-28) \\ PGCD(245,324) = 1 \end{cases} \Rightarrow 245/(x-28) \Rightarrow x - 28 = 245k \Rightarrow x = 245k + 28 \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

$324(x-28) = 245(y-37) \Rightarrow 324(245k) = 245(y-37) \Rightarrow y - 37 = 324k \Rightarrow y = 324k + 37; \ k \in \mathbb{Z}$

$S = \{(245k + 28 \, , 324k + 37)\} \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

2) $324x - 245y = 7 \Rightarrow 324x = 245y + 7 \Rightarrow 324x = 7(35y + 1)$

$\begin{cases} 7/324x \\ PGCD(7,324) = 1 \end{cases} \Rightarrow 7/x \Rightarrow x \equiv 0[7]$

3) $PGCD(x,y) = d$

- $d| \, x$ و $d| \, y \Rightarrow d| \, 324x - 245y \Rightarrow d| \, 7 \Rightarrow d = 1 \vee d = 7$
- $d = 7 \Rightarrow y \equiv 0[7] \Rightarrow 324k + 37 \equiv 0[7] \Rightarrow 2k + 2 \equiv 0[7] \Rightarrow 2k \equiv 5[7] \Rightarrow k \equiv 6[7]$

$\Rightarrow k = 7k' + 6 \Rightarrow x = 245(7k' + 6) + 28 = 1715k' + 1498 \ ; \ k' \in \mathbb{Z}$

$y = 324(7k' + 6) + 37 = 2268k' + 1981 \ ; \ k' \in \mathbb{Z}$

$S = \{(1715k' + 1498 \, , 2268k' + 1981 )\} \ ; \ k' \in \mathbb{Z}$

**التمرين 12:**

1) $1996 = 2^2 \times 499\ ;1497 = 3 \times 499\ ;2994 = 2 \times 3 \times 499 \Rightarrow PGCD(1996{,}1497{,}2994) = 499$

2) $1996x - 1497y = 2994 \ldots (1)$

- $(1) \Rightarrow 4x - 3y = 6 \Rightarrow 4x = 3y + 6 \Rightarrow 4x = 3(y+2)\ ;\begin{cases} 3/4x \\ PGCD(3{,}4) = 1 \end{cases} \Rightarrow 3/x \Rightarrow x \equiv 0[3]$

  $(1) \Rightarrow 4x - 3y = 6 \Rightarrow 3y = 4x - 6 \Rightarrow 3y = 2(2x-3)\ ;\begin{cases} 2/3y \\ PGCD(2{,}3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 2/y \Rightarrow y \equiv 0[2]$

- $4x - 3y = 6 \Rightarrow 3y = 4x - 6 = 4(3k) - 6 = 12k - 6 = 3(4k-2) \Rightarrow y = 4k - 2$

  $$S = \{(3k; 4k-2)\}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$

- $xy = 1950 \Rightarrow 3k(4k-2) = 1950\ ;12k^2 - 6k - 1950 = 0\ ;\ \Delta' = 9 + 12(1950) = 23409$

  $k' = \dfrac{3-153}{12} = -12{,}5$ (مرفوضة) ; $k'' = \dfrac{3+153}{12} = 13\ ;(x;y) = (39;50)$

**التمرين 13:**

1) $4x - 9y = 19 \Rightarrow 4x = 9y + 19 \Rightarrow 9y + 19 \equiv 0[4] \Rightarrow y + 3 \equiv 0[4] \Rightarrow y \equiv 1[4] \Rightarrow y = 4k + 1$

$4x = 9(4k+1) + 19 = 36k + 28 = 4(9k+7) \Rightarrow x = 9k + 7 \Rightarrow S = \{(9k+7; 4k+1)\}\ ;k \in \mathbb{Z}$

2) $d \mid x$ و $d \mid y \Rightarrow d \mid 4x - 9y \Rightarrow d \mid 19 \Rightarrow d = 1$ أو $d = 19$

$$d = 19 \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0[19] \\ y \equiv 0[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9k+7 \equiv 0[19] \\ 4k+1 \equiv 0[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9k \equiv 12[19] \\ 4k \equiv 18[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \equiv 14[19] \\ k \equiv 14[19] \end{cases} \Rightarrow k = 19k' + 14$$

$x = 9(19k'+14) + 7 = 171k' + 133\ ;\ y = 4(19k'+14) + 1 = 76k' + 57\ ;k' \in \mathbb{Z}$

$S = \{(171k' + 133\ ;\ 76k' + 57)\}\ ;k' \in \mathbb{Z}$

3) $4a^2 - 9b^2 = 19 \Rightarrow (2a-3b)(2a+3b) = 19$

نلاحظ أنّه إذا كانت الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة ، فكذلك الثنائيات $(-a;b)$ ، $(a;-b)$ و $(-a;-b)$ ، لذا سنبحث عن الثنائية الموجبة فقط ، و بالتالي يكون $(2a-3b) < (2a+3b)$

$$(2a-3b)(2a+3b) = 19 \Rightarrow \begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ 2a + 3b = 19 \end{cases} \Rightarrow 4a = 20 \Rightarrow a = 5\ ;b = 3$$

$S = \{(5;3)\ ;\ (-5;3)\ ;\ (5;-3)\ ;\ (-5;-3)\}$

**التمرين 14:**

1) $5x - 3y = 2 \Rightarrow 5x - 2 = 3y \Rightarrow 5x - 2 \equiv 0[3] \Rightarrow 2x \equiv 2[3] \Rightarrow x \equiv 1[3] \Rightarrow x = 3k + 1$

$3y = 5x - 2 \Rightarrow 3y = 5(3k+1) - 2 = 15k + 3 = 3(5k+1) \Rightarrow y = 5k + 1$

$S = \{(3k+1; 5k+1)\}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} A = \overline{55}_x \\ A = \overline{37}_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 5 + 5x \\ A = 7 + 3y \end{cases} \Rightarrow 5x + 5 = 3y + 7 \Rightarrow 5x - 3y = 2 \Rightarrow (x; y) = (3k + 1; 5k + 1)$

$\begin{cases} 5 < x \leq 12 \\ 7 < y \leq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 < 3k + 1 \leq 12 \\ 7 < 5k + 1 \leq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 < 3k \leq 11 \\ 6 < 5k \leq 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} < k \leq \frac{11}{3} \\ \frac{6}{5} < k \leq \frac{19}{5} \end{cases} \Rightarrow k = 2$ أو $k = 3$

- $k = 2 \Rightarrow (x; y) = (7; 11) \Rightarrow A = 5(7) + 5 = 40$
- $k = 3 \Rightarrow (x; y) = (10; 16) \Rightarrow A = 5(10) + 5 = 55$

**التمرين 15:**

1) $8x - 5y = 3$

$8(1) - 5(1) = 3 \Rightarrow 8(x - 1) - 5(y - 1) = 0 \Rightarrow 8(x - 1) = 5(y - 1)$

$\begin{cases} 5/8(x - 1) \\ PGCD(5; 8) = 1 \end{cases} \Rightarrow 5/(x - 1) \Rightarrow x - 1 = 5k \Rightarrow x = 5k + 1$

$8(x - 1) = 5(y - 1) \Rightarrow 8(5k) = 5(y - 1) \Rightarrow y - 1 = 8k \Rightarrow y = 8k + 1$

$S = \{(5k + 1\ ;\ 8k + 1)\}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

2) $m = 8p + 1 = 5q + 4 \Rightarrow 8p - 5q = 3 \Rightarrow (p; q) \in S$

$m = 8p + 1 = 8(5k + 1) + 1 = 40k + 9 \Rightarrow m \equiv 9[40]$

$m > 2000 \Rightarrow 40k + 9 > 2000 \Rightarrow 40k > 1991 \Rightarrow k > \frac{1991}{40} \Rightarrow k > 49{,}775 \Rightarrow k = 50 \Rightarrow m = 2009$

3) $2^{3k} = (2^3)^k = 8^k\ ; 8 \equiv 1[7] \Rightarrow 8^k \equiv 1[7] \Rightarrow 2^{3k} \equiv 1[7]$

$2^{2009} = 2^2 \times 2^{2007} = 4 \times 2^{3(669)} \Rightarrow 2^{2009} \equiv 4[7]$

4) $N = \overline{a00b} = 10^3 a + b$

$10 \equiv 3[7] \Rightarrow 10^3 \equiv 3^3[7] \Rightarrow 10^3 \equiv 27[7] \Rightarrow 10^3 \equiv 27 - 28[7] \Rightarrow 10^3 \equiv -1[7]$

$10^3 \equiv -1[7] \Rightarrow 10^3 a + b \equiv -a + b[7] \Rightarrow N \equiv -a + b[7]$

$N \equiv 0[7] \Rightarrow -a + b \equiv 0[7] \Rightarrow a \equiv b[7]$

$(a, b) \in \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6); (7,7); (8,8); (9,9); (7,0); (1,8); (8,1); (2,9); (9,2)\}$

$N \in \{1001; 2002; 3003; 4004; 5005; 6006; 7007; 8008; 9009; 7000; 1008; 8001; 2009; 9002\}$

**التمرين 16 :**

1) $x^2 + x + 3 \equiv 0[5] \Rightarrow x^2 + x + 3 - 5x \equiv 0[5] \Rightarrow x^2 - 4x + 3 \equiv 0[5] \Rightarrow (x - 1)(x - 3) \equiv 0[5]$

$\Rightarrow x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 3[5]$ (الجواب د)

2) $24x + 34y = 2\ ; 24(17k - 7) + 34(5 - 12k) = 408k - 168 + 170 - 408k = 2$ (الجواب أ)

3) $N = \overline{421}_5 = 1 + (2 \times 5) + (4 \times 5^2) = 111 = 18 \times 6 + 3 = (3 \times 6^2) + 3 = \overline{303}_6$ (الجواب جـ)

4) $1432 \equiv 1[3] \Rightarrow 1432^{2011} \equiv 1[3]$ (الجواب ب)

5) $a = n(n+2); b = n+1\,; b^2 - a = 1 \Rightarrow PGCD(a,b) = 1$ (بيزو) (الجواب جـ)

**التمرين 17 :**

1) $PGCD(a+b;ab) = p^2 \Rightarrow \begin{cases} p^2 \mid a+b \\ p^2 \mid ab \end{cases} \Rightarrow p^2 \mid a(a+b) - ab \Rightarrow p^2 \mid a^2 \Rightarrow p \mid a^2 \Rightarrow p \mid a$ (لأنّ $p$ أولي)

$PGCD(a+b;ab) = p^2 \Rightarrow \begin{cases} p^2 \mid a+b \\ p^2 \mid ab \end{cases} \Rightarrow p^2 \mid b(a+b) - ab \Rightarrow p^2 \mid b^2 \Rightarrow p \mid b^2 \Rightarrow p \mid b$ (لأنّ $p$ أولي)

$PGCD(a,b) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid a+b \\ d \mid ab \end{cases} \Rightarrow d \mid p^2 \Rightarrow d \in \{1, p, p^2\}$

بما أنّ $p$ يقسم $a$ و يقسم $b$ و هو يختلف عن 1 لأنّه أولي ، إذن $PGCD(a,b) \neq 1$ ، منه $PGCD(a,b) = p$ أو $PGCD(a,b) = p^2$

2) $\begin{cases} p^2 = 49 \\ m = 231 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 7 \\ m = 231 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 7 \\ m = 231 \end{cases}$ أو $\Rightarrow \begin{cases} d = 49 \\ m = 231 \end{cases}$ (مرفوض لأنّ 49 لا يقسم 231) $\Rightarrow d = 7$

$d = 7 \Rightarrow a = 7a'; b = 7b'; PGCD(a',b') = 1$

$m = 231 \Rightarrow d.a'.b' = 231 \Rightarrow a'.b' = 33 \Rightarrow (a',b') \in \{(1,33)\,; (33,1); (3,11); (11,3)\}$

$\Rightarrow (a,b) \in \{(7,231)\,; (231,7); (21,77); (77,21)\}$

**التمرين 18 :**

$a_n = 4 \times 10^n - 1$ ، $b_n = 2 \times 10^n - 1$ ، $c_n = 2 \times 10^n + 10$

1) $b_3 = 2 \times 10^3 - 1 = 1999\,;\ c_3 = 2 \times 10^3 + 10 = 2010$

- $10 \equiv 1[3] \Rightarrow 10^n \equiv 1[3]\,; 4 \equiv 1[3] \Rightarrow 4 \times 10^n - 1 \equiv 0[3] \Rightarrow a_n \equiv 0[3]$

  $10 \equiv 1[3] \Rightarrow 10^n \equiv 1[3]\,; 2 \equiv -1[3] \Rightarrow 2 \times 10^n + 10 \equiv 0[3] \Rightarrow c_n \equiv 0[3]$

  $\sqrt{1999} \approx 44{,}7$

بما أنّ العدد 1999 لا يقبل القسمة على أي من الأعداد التالية $\{1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43\}$ ، فهو إذن أولي.

- $b_n \times (c_n - 9) = (2 \times 10^n - 1)(2 \times 10^n + 10 - 9) = (2 \times 10^n - 1)(2 \times 10^n + 1)$

  $= 4 \times 10^{2n} - 1 = a_{2n}$

  $a_6 = a_{2(3)} = b_3 \times (c_3 - 9) = 1999 \times 2001 = 1999 \times 3 \times 23 \times 29$

  $c_n = b_n + 11 \Rightarrow PGCD(b_n, c_n) = PGCD(b_n, 11)$

  $d = PGCD(b_n, c_n) \Rightarrow d = PGCD(b_n, 11) \Rightarrow d = 1$ أو $d = 11$

بما أنّ العدد $b_3$ أولي ، إذن $d \neq 11$ منه $d = 1$

2) $1999x + 2010y = 1 \ldots (E)$

بما أنّ العدد 1999 أولي ، فإنّ $PGCD(1999{,}2010) = 1$ ، منه المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$

$$\begin{cases} 1999x + 2010y = 1 \\ 1999(-731) + 2010(727) = 1 \end{cases} \Rightarrow 1999(x+731) + 2010(y-727) = 0 \Rightarrow 1999(x+731) = 2010(-y+727)$$

$$\begin{cases} 2010 \mid 1999(x+731) \\ PGCD(1999{,}2010) = 1 \end{cases} \Rightarrow 2010 \mid (x+731) \Rightarrow x + 731 = 2010k \Rightarrow x = 2010k - 731$$

$$1999(2010k) = 2010(-y+727) \Rightarrow -y + 727 = 1999k \Rightarrow y = -1999k + 727$$

$$S = \{(2010k - 731; -1999k + 727)\}\,; k \in \mathbb{Z}$$



**التمرين 19 :**

1) $n^2 + 5n + 4 = (n+1)(n+4) \Rightarrow (n^2+5n+4)$ يقبل القسمة على $(n+1)$

$n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2) \Rightarrow (n^2+3n+2)$ يقبل القسمة على $(n+1)$

2) $3n^2 + 15n + 19 = (n+1)(3n+12) + 7\,; (n+1)/(3n^2+15n+19) \Rightarrow (n+1)/7 \Rightarrow n = 0 \vee n = 6$

3) $n^2 + 3n + 2/3n^2 + 15n + 19 \Rightarrow n + 1/3n^2 + 15n + 19 \Rightarrow n = 0 \vee n = 6$



- $n = 0 : 2/19$ (مستحيل)
- $n = 6 : 56/217$ (مستحيل)

نستنتج إذا أنّ العدد $3n^2 + 15n + 19$ لا يقبل القسمة على العدد $n^2 + 3n + 2$



**التمرين 20 :**

1) $584 = 2^3 \times 73 \Rightarrow$ الأعداد التي مربعاتها تقسم العدد 584 هي 1 و 2

2) $PGCD(a,b) = d\,; a = da'; b = db'; PGCD(a',b') = 1$

$$\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(a'+b') = 32 \\ d^2(a'^2 + b'^2) = 584 \end{cases}; d^2/584 \Rightarrow d = 1 \vee d = 2$$

- $d = 1 : \begin{cases} a' + b' = 32 \\ a'^2 + b'^2 = 584 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b' = 32 - a' \\ a'^2 + (32-a')^2 = 584 \end{cases}$

$${a'}^2 + (32-a')^2 = 584 \Rightarrow 2a'^2 - 64a' + 1024 = 584 \Rightarrow 2a'^2 - 64a' + 440 = 0$$

$$\Rightarrow a'^2 - 32a' + 220 = 0\,;\ \Delta' = 36\,; a' = 10 \vee a' = 22$$

$$(a',b') \in \{(10{,}22); (22{,}10)\} \Rightarrow (a,b) \in \{(10{,}22); (22{,}10)\}$$

- $d = 2 : \begin{cases} a' + b' = 16 \\ a'^2 + b'^2 = 146 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b' = 16 - a' \\ a'^2 + (16-a')^2 = 146 \end{cases}$

$${a'}^2 + (16-a')^2 = 146 \Rightarrow 2a'^2 - 32a' + 256 = 146 \Rightarrow 2a'^2 - 32a' + 110 = 0$$

$$\Rightarrow a'^2 - 16a' + 55 = 0\,;\ \Delta' = 9\,; a' = 5 \vee a' = 11$$

$$(a',b') \in \{(5{,}11); (11{,}5)\} \Rightarrow (a,b) \in \{(10{,}22); (22{,}10)\}$$

**التمرين 21 :**

1) $3^0 \equiv 1[10]$ ; $3^1 \equiv 3[10]$ ; $3^2 \equiv 9[10]$ ; $3^3 \equiv 7[10]$ ; $3^4 \equiv 1[10]$

$3^{4k} \equiv 1[10]$ ; $3^{4k+1} \equiv 3[10]$ ; $3^{4k+2} \equiv 9[10]$ ; $3^{4k+3} \equiv 7[10]$

2) $63 \equiv 3[10]$ ; $9 \equiv -1[10] \Rightarrow 9^{2002} \equiv 1[10]$ ; $7 \equiv -3[10] \Rightarrow 7^{1422} \equiv 3^{4(355)+2}[10] \Rightarrow 7^{1422} \equiv 9[10]$

$$\underbrace{63}_{\equiv 3[10]} \times \underbrace{9^{2002}}_{\equiv 1[10]} - \underbrace{7^{1422}}_{\equiv 9[10]} \equiv -6[10] \Rightarrow 63 \times 9^{2002} - 7^{1422} \equiv 4[10]$$

3) $3n \times 9^n = 3n \times 3^{2n} = 3^{2n+1} \times n$ ; $7 \equiv -3[10] \Rightarrow 7^{2n+1} \equiv -3^{2n+1}[10]$

$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 3^{2n+1} \times n - 3^{2n+1}[10] \Rightarrow 3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1) \times 3^{2n+1}[10]$

4) $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10] \Rightarrow (n-1) \times 3^{2n+1} \equiv 0[10]$

بما أنّ العدد $2n+1$ فردي ، فإنّ $3^{2n+1} \equiv 3[10]$ أو $3^{2n+1} \equiv 7[10]$ ، نستنتج أنّ الموافقة السابقة تتحقق لمّا $(n-1) \equiv 0[10]$ أي $n \equiv 1[10]$

**التمرين 22 :**

1) $4^0 \equiv 1[11]$ ; $4^1 \equiv 4[11]$ ; $4^2 \equiv 5[11]$ ; $4^3 \equiv 9[11]$ ; $4^4 \equiv 3[11]$ ; $4^5 \equiv 1[11]$

$4^{5k} \equiv 1[11]$ ; $4^{5k+1} \equiv 4[11]$ ; $4^{5k+2} \equiv 5[11]$ ; $4^{5k+3} \equiv 9[11]$ ; $4^{5k+4} \equiv 3[11]$

2) $15 \equiv 4[11] \Rightarrow 15^{5n+1} \equiv 4^{5n+1}[11] \Rightarrow 15^{5n+1} \equiv 4[11]$

$26 \equiv 4[11] \Rightarrow 26^{5n+2} \equiv 4^{5n+2}[11] \Rightarrow 26^{5n+2} \equiv 5[11] \Rightarrow 2 \times 26^{5n+2} \equiv 10[11]$

$125 \equiv 4[11] \Rightarrow 125^{5n+3} \equiv 4^{5n+3}[11] \Rightarrow 125^{5n+3} \equiv 9[11] \Rightarrow 3 \times 125^{5n+3} \equiv 5[11]$

$k = 15^{5n+1} - 2 \times 26^{5n+2} + 3 \times 125^{5n+3} + 1 \Rightarrow k \equiv 4 - 10 + 5 + 1[11] \Rightarrow k \equiv 0[11]$

3) $15^{5n+1} + 26^{5n+2} + 3n \equiv 0[11] \Rightarrow 4 + 5 + 3n \equiv 0[11] \Rightarrow 3n + 9 \equiv 0[11] \Rightarrow 3n \equiv 2[11]$

$\Rightarrow 3n \equiv 24[11] \Rightarrow n \equiv 8[11] \Rightarrow n = 11k + 8$

$8 \leq n \leq 50 \Rightarrow 8 \leq 11k + 8 \leq 50 \Rightarrow 0 \leq 11k \leq 42 \Rightarrow 0 \leq k \leq 3{,}8 \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\}$

$\Rightarrow n \in \{8; 19; 30; 41\}$

**التمرين 23 :**

1) $2688 = 2^7 \times 3 \times 7$ ; $3024 = 2^4 \times 3^3 \times 7$ ; $PGCD(2688; 3024) = 2^4 \times 3 \times 7 = 336$

2) أ) $2688x + 3024y = -3360 \dots (1) \Rightarrow 8x + 9y = -10 \dots (2)$ (بعد القسمة على 336)

ب) $8(1) + 9(-2) = -10 \Rightarrow$ $(1; -2)$ حل خاص للمعادلة $(2)$ الثنائية

3) $(P) : x + 2y - z = -2$ ; $(P') : 3x - y + 5z = 0$

أ. $\vec{n}(1; 2; -1)$ ; $\vec{n'}(3; -1; 5)$ ; $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{-1} \Rightarrow \vec{n} \nparallel \vec{n'} \Rightarrow (P) \cap (P') = (d)$

ب. $M(x; y; z) \in (d) \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 10y - 5z = -10 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow 8x + 9y = -10$

نستنتج أنّ إحداثيات نقط $(d)$ تحقق المعادلة $(2)$

$\begin{cases} 8x+9y=-10 \\ 8(1)+9(-2)=-10 \end{cases} \Rightarrow 8(x-1)+9(y+2)=0 \Rightarrow 8(x-1)=9(-y-2)$

$\begin{cases} 9/8(x-1) \\ PGCD(8;9)=1 \end{cases} \Rightarrow 9/(x-1) \Rightarrow x-1=9k \Rightarrow x=9k+1\,;k\in\mathbb{Z}$

$8(9k)=9(-y-2) \Rightarrow -y-2=8k \Rightarrow y=-8k-2\,;k\in\mathbb{Z}$

نستنتج أنّ مجموعة نقط $(d)$ التي إحداثياتها أعداد صحيحة هي : $(E)=\{M(9k+1;-8k-2;z)\}$ حيث $(k;z)\in\mathbb{Z}^2$

**التمرين 24 :**

1) $PGCD(a;b)=d\,;\ PGCD(x;y)=d'$

$\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/2a+3b \\ d/3a+4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/x \\ d/y \end{cases} \Rightarrow d/d'$

$\begin{cases} d'/x \\ d'/y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d'/2a+3b \\ d'/3a+4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d'/3(2a+3b)-2(3a+4b) \\ d'/3(3a+4b)-4(2a+3b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d'/a \\ d'/b \end{cases} \Rightarrow d'/d$

$d/d'$ و $d'/d \Rightarrow d=d'$

$d=1 \Rightarrow d'=1$

2) $x=2\alpha+3\beta\,;y=3\alpha+4\beta\,;PGCD(x;y)=PGCD(\alpha;\beta)=5\,;x=5x';y=5y';\ PGCD(x';y')=1$

$\begin{cases} xy=2200 \\ d=5 \end{cases} \Rightarrow 25x'y'=2200 \Rightarrow x'y'=88 \Rightarrow (x',y')\in\{(1,88);(8,11)\}$

$\Rightarrow (x,y)\in\{(5,440);(40,55)\}$

$\begin{cases} 2\alpha+3\beta=5 \\ 3\alpha+4\beta=440 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1300 \\ \beta=-865 \end{cases}$ (مرفوض لأن العدد $\beta$ طبيعي)

$\begin{cases} 2\alpha+3\beta=40 \\ 3\alpha+4\beta=55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=5 \\ \beta=10 \end{cases} \Rightarrow (\alpha;\beta)=(5;10)$

**التمرين 25 :**

1) $a=\overline{2310}_n=2n^3+3n^2+n\,;b=\overline{252}_n=2n^2+5n+2$

$2n^3+3n^2+n=(2n+1)(n^2+n) \Rightarrow (2n+1)/a$

$2n^2+5n+2=(2n+1)(n+2) \Rightarrow (2n+1)/b$

$d=PGCD(a;b)=(2n+1)\times\underbrace{PGCD(n^2+n;n+2)}_{d'}$

$n^2+n=(n+2)(n-1)+2 \Rightarrow d'=PGCD(n+2;2) \Rightarrow d'=1 \vee d'=2$

$d=(2n+1)\times d' \Rightarrow d=2n+1 \vee d=2(2n+1)$

2) $n=6: a=546\,;b=104\,;d=26$

$ax + by = -26 \Rightarrow 546x + 104y = -26 \Rightarrow 21x + 4y = -1$ ; نلاحظ أنّ الثنائية $(-1;5)$ حل خاص للمعادلة

$$\begin{cases} 21x + 4y = -1 \\ 21(-1) + 4(5) = -1 \end{cases} \Rightarrow 21(x+1) + 4(y-5) = 0 \Rightarrow 21(x+1) = 4(-y+5)$$

$$\begin{cases} 4/21(x+1) \\ PGCD(4;21) = 1 \end{cases} \Rightarrow 4/(x+1) \Rightarrow x+1 = 4k \Rightarrow x = 4k-1\,; k \in \mathbb{Z}$$

$21(4k) = 4(-y+5) \Rightarrow -y+5 = 21k \Rightarrow y = -21k+5\,; k \in \mathbb{Z}$

$S = \{(4k-1; -21k+5)\}\,; k \in \mathbb{Z}$

**التمرين 26 :**

1)

أ. $6^{10} = (6^2)^5 = 36^5\,; 36 \equiv 3[11] \Rightarrow 36^5 \equiv 3^5[11]; 3^5 = 243 \Rightarrow 3^5 \equiv 1[11] \Rightarrow 6^{10} \equiv 1[11]$

ب. $6 \equiv 1[5] \Rightarrow 6^4 \equiv 1[5]$

ج. $6^{10} \equiv 1[11] \Rightarrow (6^{10})^4 \equiv 1[11] \Rightarrow 6^{40} \equiv 1[11]\,;\; 6^4 \equiv 1[5] \Rightarrow (6^4)^{10} \equiv 1[5] \Rightarrow 6^{40} \equiv 1[5]$

د. $\begin{cases} 6^{40} \equiv 1[11] \\ 6^{40} \equiv 1[5] \end{cases} \Rightarrow 6^{40} \equiv 1[55] \Rightarrow 6^{40} - 1 \equiv 0[55]\ (PGCD(11,5) = 1)$

2)

أ. $65x - 40y = 1 \dots (E)\,; PGCD(65,40) = 5\,;$ 5 لا يقسم 1 $; S = \emptyset$

ب. $17x - 40y = 1 \dots (E')\,; PGCD(17,40) = 1\,;$ المعادلة تقبل على الأقل حلا

ج. $40 = 17 \times 2 + 6\,; 6 = 40 - 17 \times 2$

$17 = 6 \times 2 + 5\,; 5 = 17 - 6 \times 2$

$6 = 5 + 1\,; 1 = 6 - 5$

$1 = 6 - 5 = 6 - (17 - 6 \times 2) = 17(-1) + 6(3) = 17(-1) + 3(40 - 17 \times 2)$

$= 17(-7) - 40(-3) \Rightarrow (x_0, y_0) = (-7, -3)$

د. $\begin{cases} 17x - 40y = 1 \\ 17(-7) - 40(-3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 17(x+7) - 40(y+3) = 0 \Rightarrow 17(x+7) = 40(y+3)$

$$\begin{cases} 40/17(x+7) \\ PGCD(40;17) = 1 \end{cases} \Rightarrow 40/(x+7) \Rightarrow x+7 = 40k \Rightarrow x = 40k-7\,; k \in \mathbb{Z}$$

$17(40k) = 40(y+3) \Rightarrow y+3 = 17k \Rightarrow y = 17k-3\,; k \in \mathbb{Z}$

$S = \{(40k-7; 17k-3)\}\,; k \in \mathbb{Z}$

$17x_0 \equiv 1[40] \Rightarrow 17x_0 = 40\alpha + 1 \Rightarrow 17x_0 - 40\alpha = 1 \Rightarrow x_0 = 40k - 7$

$0 \le x_0 \le 40 \Rightarrow 0 \le 40k - 7 \le 40 \Rightarrow 7 \le 40k \le 47 \Rightarrow 0{,}175 \le k \le 1{,}175 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x_0 = 33$

3) $\begin{cases} a^{17} \equiv b[55] \\ a^{40} \equiv 1[55] \end{cases} \Rightarrow b^{33} \equiv (a^{17})^{33}[55] \Rightarrow b^{33} \equiv a^{561}[55] \Rightarrow b^{33} \equiv a^{560} \times a[55]$

$\Rightarrow b^{33} \equiv (a^{40})^{14} \times a[55] \Rightarrow b^{33} \equiv a[55]$

**التمرين 27 :**

1) $3^0 \equiv 1[11]\,;\; 3^1 \equiv 3[11]\,;\; 3^2 \equiv 9[11]\,;\; 3^3 \equiv 5[11]\,;\; 3^4 \equiv 4[11]\,;\; 3^5 \equiv 1[11]$

$3^{5k} \equiv 1[11]\,;\; 3^{5k+1} \equiv 3[11]\,;\; 3^{5k+2} \equiv 9[11]\,;\; 3^{5k+3} \equiv 5[11]\,;\; 3^{5k+4} \equiv 4[11]$

2) $69 \equiv 3[11] \Rightarrow 69^{10n+6} \equiv 3^{10n+6}[11] \Rightarrow 69^{10n+6} \equiv 3^{5(2n+1)+1}[11] \Rightarrow 69^{10n+6} \equiv 3[11]$

$\Rightarrow 4 \times 69^{10n+6} \equiv 1[11]$

$58 \equiv 3[11] \Rightarrow 58^{20n+13} \equiv 3^{20n+13}[11] \Rightarrow 58^{20n+13} \equiv 3^{5(4n+2)+3}[11] \Rightarrow 58^{20n+13} \equiv 5[11]$

$\Rightarrow 7 \times 58^{20n+13} \equiv 2[11]$

$4 \times 69^{10n+6} + 7 \times 58^{20n+13} - 8 \equiv 1 + 2 - 8[11] \Rightarrow 4 \times 69^{10n+6} + 7 \times 58^{20n+13} - 8 \equiv 6[11]$

3) $36 \equiv 3[11] \Rightarrow 36^{5n} \equiv 3^{5n}[11] \Rightarrow 36^{5n} \equiv 1[11] \Rightarrow 36^{5n} \times n \equiv n[11]$

$14 \equiv 3[11] \Rightarrow 14^{5n+3} \equiv 3^{5n+3}[11] \Rightarrow 14^{5n+3} \equiv 5[11]$

$n^2 + 36^{5n} \times n + 14^{5n+3} + 5 \equiv 0[11] \Rightarrow n^2 + n + 10 \equiv 0[11]$

| $n \equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | [11] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2 \equiv$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 5 | 3 | 3 | 5 | 9 | 4 | 1 | [11] |
| $n^2 + n + 10 \equiv$ | 10 | 1 | 5 | 0 | 8 | 7 | 8 | 0 | 5 | 1 | 10 | [11] |

$n^2 + n + 10 \equiv 0[11] \Rightarrow n \equiv 3[11]$ أو $n \equiv 7[11] \Rightarrow n = 11k + 3$ أو $n = 11k + 7\ ; k \in \mathbb{Z}$

4) $80 \equiv 3[11] \Rightarrow 80^{3n+2} \equiv 3^{3n+2}[11]\ ;\ 91 \equiv 3[11] \Rightarrow 91^{3n+1} \equiv 3^{3n+1}[11]$

$80^{3n+2} \times \beta + 91^{3n+1} \equiv 0[11] \Rightarrow 3^{3n+2} \times \beta + 3^{3n+1} \equiv 0[11] \Rightarrow 3^{3n+1}(3\beta + 1) \equiv 0[11]$

$\Rightarrow 3\beta + 1 \equiv 0[11] \Rightarrow 3\beta \equiv 10[11] \Rightarrow \beta \equiv 7[11] \Rightarrow \beta = 11k + 7\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$|\beta| \leq 20 \Rightarrow -20 \leq \beta \leq 20 \Rightarrow -20 \leq 11k + 7 \leq 20 \Rightarrow -27 \leq 11k \leq 13 \Rightarrow -2{,}45 \leq k \leq 1{,}18$

$\Rightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1\} \Rightarrow \beta \in \{-15; -4; 7; 18\}$

5) $14 \equiv 3[11] \Rightarrow 14^x \equiv 3^x[11]\ ;\ 25 \equiv 3[11] \Rightarrow 25^y \equiv 3^y[11]$

| | $x =$ | $5k$ | $5k+1$ | $5k+2$ | $5k+3$ | $5k+4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y =$ | $3^x \equiv$ / $3^y \equiv$ | 1 | 3 | 9 | 5 | 4 |
| $5k'$ | 1 | 2 | 4 | 10 | 6 | 5 |
| $5k'+1$ | 3 | 4 | 6 | 1 | 8 | 7 |
| $5k'+2$ | 9 | 10 | 1 | 7 | 3 | 2 |
| $5k'+3$ | 5 | 6 | 8 | 3 | 10 | 9 |
| $5k'+4$ | 4 | 5 | 1 | 2 | 9 | 8 |

$3^x + 3^y \equiv 8[11] \Rightarrow (x, y) \in \{(5k+1; 5k'+3), (5k+3; 5k'+1), (5k+4; 5k'+4)\}\ ; (k, k') \in \mathbb{N}^2$

**التمرين 28 :**

1) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3(1) - 2(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow 3(x-1) - 2(y-1) = 0 \Rightarrow 3(x-1) = 2(y-1)$

$\begin{cases} 2/3(x-1) \\ PGCD(2;3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 2/(x-1) \Rightarrow x - 1 = 2k \Rightarrow x = 2k + 1\ ; k \in \mathbb{Z}$

$3(2k) = 2(y-1) \Rightarrow y - 1 = 3k \Rightarrow y = 3k + 1\ ; k \in \mathbb{Z}$

$S = \{(2k+1; 3k+1)\}\ ; k \in \mathbb{Z}$

2)

أ. $3(14n+3)-2(21n+4)=42n+9-42n-8=1 \Rightarrow (14n+3;21n+4)\in S$

ب. $3(14n+3)-2(21n+4)=1 \Rightarrow PGCD(14n+3;21n+4)=1$ (بيزو)

3) $d=PGCD(2n+1;21n+4)$

أ. $\begin{cases} d \mid 2n+1 \\ d \mid 21n+4 \end{cases} \Rightarrow d \mid 21(2n+1)-2(21n-4) \Rightarrow d \mid 13 \Rightarrow d=1$ أو $d=13$

ب. $d=13 \Rightarrow \begin{cases} 2n+1 \equiv 0[13] \\ 21n+4 \equiv 0[13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n \equiv 12[13] \\ 8n \equiv 9[13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n \equiv 12[13] \\ 8n \equiv 48[13] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 6[13]$

4) $A=21n^2-17n-4\,;B=28n^3-8n^2-17n-3$

أ. $21n^2-17n-4=(n-1)(21n+4)\,;\ 28n^3-8n^2-17n-3=(n-1)(28n^2+20n+3)$

ب. $PGCD(A;B)=(n-1)\times PGCD(21n+4;28n^2+20n+3)$

$PGCD(A;B)=(n-1)\times PGCD(21n+4;(14n+3)(2n+1))$

بما أنّ العدين $21n+4$ و $14n+3$ أوليان فيما بينهما ، فإنّ :

$PGCD(A;B)=(n-1)\times PGCD(21n+4;2n+1)$

و منه نستنتج أنّ:

- $n=13k+6:\ PGCD(21n+4;2n+1)=13 \Rightarrow PGCD(A;B)=13(n-1)$
- $n\neq 13k+6:\ PGCD(21n+4;2n+1)=1 \Rightarrow PGCD(A;B)=n-1$

**التمرين 29 :**

1) $11n-24m=1 \ldots (1)$

أ. $PGCD(11,24)=1 \Rightarrow$ المعادلة تقبل على الأقل حلا

ب. $\begin{cases} 11n-24m=1 \\ 11(11)-24(5)=1 \end{cases} \Rightarrow 11(n-11)-24(m-5)=0 \Rightarrow 11(n-11)=24(m-5)$

$\begin{cases} 24 \mid 11(n-11) \\ PGCD(24;11)=1 \end{cases} \Rightarrow 24 \mid (n-11) \Rightarrow n-11=24k \Rightarrow n=24k+11\,;k\in\mathbb{Z}$

$11(24k)=24(m-5) \Rightarrow m-5=11k \Rightarrow m=11k+5\,;k\in\mathbb{Z}$

$S=\{(24k+11;11k+5)\}\,;k\in\mathbb{Z}$

2)

أ. $10\equiv 1[9] \Rightarrow 10^{11}\equiv 1[9] \Rightarrow 10^{11}-1\equiv 0[9] \Rightarrow 9 \mid 10^{11}-1$

$10\equiv 1[9] \Rightarrow 10^{24}\equiv 1[9] \Rightarrow 10^{24}-1\equiv 0[9] \Rightarrow 9 \mid 10^{24}-1$

ب. $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=\left(10^{11(24k+11)}-1\right)-10\left(10^{24(11k+5)}-1\right)$

$=10^{264k+121}-1-10^{264k+121}+10=9$

**طريقة ثانية :**

$11n-24m=1 \Rightarrow 11n=24m+1 \Rightarrow (10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=10^{11n}-10^{24m+1}+9=9$

ج. $10^{11n}-1=(10^{11})^n-1=(10^{11}-1)(10^{11(n-1)}+10^{11(n-2)}+\cdots+10^{11}+1)\Rightarrow 10^{11}-1\mid 10^{11n}-1$

$10^{24m}-1=(10^{24})^m-1=(10^{24}-1)(10^{24(m-1)}+10^{24(m-2)}+\cdots+10^{24}+1)\Rightarrow 10^{24}-1\mid 10^{24m}-1$

$(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9\Rightarrow(10^{11}-1)(10^{11(n-1)}+\cdots+1)-10(10^{24}-1)(10^{24(m-1)}+\cdots+1)=9$

$\Rightarrow N=(10^{11(n-1)}+10^{11(n-2)}+\cdots+10^{11}+1)$ و $M=(10^{24(m-1)}+10^{24(m-2)}+\cdots+10^{24}+1)$

د. $\begin{cases}d\mid 10^{11}-1\\ d\mid 10^{24}-1\end{cases}\Rightarrow d\mid(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M\Rightarrow d\mid 9$

ه. $\begin{cases}d\mid 9\\ 9\mid 10^{11}-1\\ 9\mid 10^{24}-1\end{cases}\Rightarrow PGCD(10^{11}-1;10^{24}-1)=9$

**التمرين 30 :**

1) $PGCD(x,y)=d\Rightarrow x=dx';y=dy';\ PGCD(x',y')=1$

$PPCM(x,y)=m\Rightarrow m.d=x.y\Rightarrow m.d=d^2.x'.y'\Rightarrow m=d.x'.y'\Rightarrow m^2=d^2.x'^2.y'^2$

$m^2-5d^2=2000\Rightarrow d^2.x'^2.y'^2-5d^2=2000\Rightarrow d^2(x'^2.y'^2-5)=2000\Rightarrow d^2\mid 2000$

2) $2000=2^4\times5^3\Rightarrow$ القواسم المربعة التامة للعدد 2000 هي : 1 - 2 - 4 - 5 - 10 - 20

3) $m^2-5d^2=2000\Rightarrow m^2=5d^2+2000$

$5\mid 5d^2+2000\Rightarrow 5\mid m^2\Rightarrow 5\mid m$ (لأن 5 عدد أولي) $\Rightarrow m=5k$

$5d^2=m^2-2000=(5k)^2-2000=5(5k^2-400)\Rightarrow d^2=5k^2-400=5(k^2-80)\Rightarrow 5\mid d^2\Rightarrow 5\mid d$

$\begin{cases}5\mid d\\ d^2\mid 2000\end{cases}\Rightarrow d\in\{5;10;20\}$

4) $d=5:m^2=5(5)^2+2000=2125$ (مرفوض لأن العدد 2125 ليس مربع تام)

$d=10:m^2=5(10)^2+2000=2500\Rightarrow m=50$

$d=20:m^2=5(20)^2+2000=4000$ (مرفوض لأن العدد 4000 ليس مربع تام)

$m=d.x'.y'\Rightarrow x'.y'=\dfrac{m}{d}=5\Rightarrow(x',y')=(1,5)\Rightarrow(x,y)=(10,50)$

**التمرين 31 :**

1) $2006=2\times17\times59$

$16x+59y=2006\Rightarrow 16x=2006-59y=59(34-y)$

$\begin{cases}59\mid 16x\\ PGCD(59;16)=1\end{cases}\Rightarrow 59\mid x\Rightarrow x=59k\,;k\in\mathbb{Z}$

2) $16x=59(34-y)\Rightarrow 16(59k)=59(34-y)\Rightarrow 34-y=16k\Rightarrow y=-16k+34\,;k\in\mathbb{Z}$

$S=\{(59k\,;-16k+34)\}\,;k\in\mathbb{Z}$

3) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 59k > 0 \\ -16k + 34 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k < \dfrac{34}{16} \end{cases} \Rightarrow 0 < k < 2{,}125 \Rightarrow k \in \{1; 2\} \Rightarrow (x, y) \in \{(59,18); (118,2)\}$

4) $16m + 59d = 2006 \Rightarrow \begin{cases} m = 59 \\ d = 18 \end{cases}$ (مرفوض لأن 18 لا يقسم 59) أو $\begin{cases} m = 118 \\ d = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} m = 118 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow a.b = m.d = 236 \Rightarrow d^2.a'.b' = 236 \Rightarrow a'.b' = \dfrac{236}{4} = 59 \Rightarrow (a', b') \in \{(59,1); (1,59)\}$

$\Rightarrow (a, b) \in \{(118,2); (2,118)\}$

**التمرين 32 :**

1) $3^0 \equiv 1[7]\,;\ 3^1 \equiv 3[7]\,;\ 3^2 \equiv 2[7]\,;\ 3^3 \equiv 6[7]\,;\ 3^4 \equiv 4[7]\,;\ 3^5 \equiv 5[7]\,;\ 3^6 \equiv 1[7]$

$3^{6k} \equiv 1[7]\,;\ 3^{6k+1} \equiv 3[7]\,;\ 3^{6k+2} \equiv 2[7]\,;\ 3^{6k+3} \equiv 6[7]\,;\ 3^{6k+4} \equiv 4[7]\,;\ 3^{6k+5} \equiv 5[7]$

$4^0 \equiv 1[7]\,;\ 4^1 \equiv 4[7]\,;\ 4^2 \equiv 2[7]\,;\ 4^3 \equiv 1[7] \Rightarrow 4^{3k} \equiv 1[7]\,;\ 4^{3k+1} \equiv 4[7]\,;\ 4^{3k+2} \equiv 2[7]$

2) $2006 \equiv 4[7]\,;\ 2006^{3n+2} \equiv 4^{3n+2}[7] \Rightarrow 2 \times 2006^{3n+2} \equiv 4[7]$

$1424 \equiv 3[7]\,;\ 1424^{6n+1} \equiv 3^{6n+1}[7] \Rightarrow 1424^{6n+1} \equiv 3[7] \Rightarrow 2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1} \equiv 0[7]$

3) $u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$

أ. $S_n = u_0 + \cdots + u_n = (2 + 2 \times 3 + 2 \times 3^2 + \cdots + 2 \times 3^n) + (3 + 3 \times 4 + 3 \times 4^2 + \cdots + 3 \times 4^n)$

$S_n = 2(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n) + 3(1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^n) = 2\left(\dfrac{3^{n+1} - 1}{2}\right) + 3\left(\dfrac{4^{n+1} - 1}{3}\right)$

$S_n = 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2$

ب. $S_n \equiv 0[7] \Rightarrow 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2 \equiv 0[7] \Rightarrow 3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7]$

| $n+1 =$ | $6k$ | $6k+1$ | $6k+2$ | $6k+3$ | $6k+4$ | $6k+5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3^{n+1} \equiv$ | 1 | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | [7] |
| $4^{n+1} \equiv$ | 1 | 4 | 2 | 1 | 4 | 2 | [7] |
| $3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv$ | 2 | 0 | 4 | 0 | 1 | 0 | [7] |

$$3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7] \Rightarrow n + 1 = 6k \Rightarrow n = 6k - 1\,;\ k \in \mathbb{N}^*$$

**التمرين 33 :**

1) $91x + 10y = 1 \ldots (1)\,;\ 91x + 10y = 412 \ldots (2)$

أ. $91(1) + 10(-9) = 1 \Rightarrow$ الثنائية $(1, -9)$ حل خاص للمعادلة $(1)$

$91(412) + 10(-3708) = 412 \Rightarrow$ الثنائية $(412, -3708)$ حل خاص للمعادلة $(2)$

ب. $\begin{cases} 91x + 10y = 412 \\ 91(412) + 10(-3708) = 412 \end{cases} \Rightarrow 91(x - 412) + 10(y + 3708) = 0 \Rightarrow 91(x - 412) = 10(-y - 3708)$

$\begin{cases} 10 \mid 91(x - 412) \\ PGCD(10; 91) = 1 \end{cases} \Rightarrow 10 \mid (x - 412) \Rightarrow x - 412 = 10k \Rightarrow x = 10k + 412\,;\ k \in \mathbb{Z}$

$91(10k) = 10(-y - 3708) \Rightarrow -y - 3708 = 91k \Rightarrow y = -91k - 3708\,;\ k \in \mathbb{Z}$

$S = \{(10k + 412; -91k - 3708)\}\,;\ k \in \mathbb{Z}$

2) $A_n = 3^{2n} - 1 = 9^n - 1$ ; $9 \equiv 1[8] \Rightarrow 9^n \equiv 1[8] \Rightarrow 9^n - 1 \equiv 0[8] \Rightarrow A_n \equiv 0[8]$

3) $A_3 x + A_2 y = 3296 \Rightarrow 728x + 80y = 3296 \Rightarrow 91x + 10y = 412 \Rightarrow S = \{(10k + 412; -91k - 3708)\}$ ; $k \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} \alpha \geq 0 \\ \beta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10k + 412 \geq 0 \\ -91k - 3708 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq -41{,}2 \\ k \leq -40{,}7 \end{cases} \Rightarrow k = -41 \Rightarrow (\alpha, \beta) = (2{,}23)$

$(\alpha + \beta)A_2 + 10 = 25 \times 80 + 10 = 2010$

**التمرين 34 :**

1) $9^0 \equiv 1[11]$ ; $9^1 \equiv 9[11]$ ; $9^2 \equiv 4[11]$ ; $9^3 \equiv 3[11]$ ; $9^4 \equiv 5[11]$ ; $9^5 \equiv 1[11]$

$9^{5k} \equiv 1[11]$ ; $9^{5k+1} \equiv 9[11]$ ; $9^{5k+2} \equiv 4[11]$ ; $9^{5k+3} \equiv 3[11]$ ; $9^{5k+4} \equiv 5[11]$

2) $1431 \equiv 1[11] \Rightarrow 1431^n \equiv 1[11]$ ; $1993 \equiv -9[11] \Rightarrow 1993^{10n} \equiv 9^{5(2n)}[11] \Rightarrow 1993^{10n} \equiv 1[11]$

$2011 \equiv 9[11] \Rightarrow 2011^{5n+1} \equiv 9^{5n+1}[11] \Rightarrow 2011^{5n+1} \equiv 9[11]$

$1431^n + 1993^{10n} + 2011^{5n+1} \equiv 0[11]$

3) $\begin{cases} 1431^n + 5n + 2011^{5n+1} \equiv 0[11] \\ 90 < n < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5n + 10 \equiv 0[11] \\ 90 < n < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5n \equiv 1[11] \\ 90 < n < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 9[11] \\ 90 < n < 100 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} n = 11k + 9 \\ 90 < n < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 11k + 9 \\ 90 < 11k + 9 < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 11k + 9 \\ 7{,}36 < k < 8{,}27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 11k + 9 \\ k = 8 \end{cases} \Rightarrow n = 97$

**التمرين 35 :**

1) $B(1; 3; 5)$ ; $\vec{n}(-2; 1; 1)$ ; $(Q)\colon x - 2y + 4z - 9 = 0$

$\vec{n}(-2; 1; 1)$ ; $\vec{n'}(1; -2; 4)$ ; $\vec{n}.\vec{n'} = -2 - 2 + 4 = 0 \Rightarrow (P) \perp (Q)$

2) $d\big(B; (\Delta)\big) = d\big(B; (Q)\big) = \dfrac{|1 - 2(3) + 4(5) - 9|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{21}} = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$

3) $M(x; y; z) \in (P) \Rightarrow \overrightarrow{BM}.\vec{n} = 0 \Rightarrow -2(x - 1) + (y - 3) + (z - 5) = 0 \Rightarrow -2x + y + z - 6 = 0$

4) $(\Delta)\colon \begin{cases} x = 2k - 5 \\ y = 3k - 5 \\ z = k + 1 \end{cases}$ ; $k \in \mathbb{R}$ ; $A(-9; -4; -1)$

أ. $-2(-9) - 4 - 1 - 6 = 7 \Rightarrow A \notin (P)$ ; $-9 - 2(-4) + 4(-1) - 9 = -14 \Rightarrow A \notin (Q)$

ب. $AM^2 = (2k - 5 + 9)^2 + (3k - 5 + 4)^2 + (k + 1 + 1)^2 = (2k + 4)^2 + (3k - 1)^2 + (k + 2)^2$
$= 4k^2 + 16k + 16 + 9k^2 - 6k + 1 + k^2 + 4k + 4 = 14k^2 + 14k + 21 = 7(2k^2 + 2k + 3)$

ج. $f(k) = 2k^2 + 2k + 3$

- $f'(k) = 4k + 2 = 2(2k + 1)$
  $k < -\dfrac{1}{2} : f'(k) < 0 \Rightarrow f(k)$ متناقصة ; $k \geq -\dfrac{1}{2} : f'(k) \geq 0 \Rightarrow f(k)$ متزايدة
- $AM$ أصغرية $\Rightarrow f'(k) = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-6; -\frac{13}{2}; \frac{1}{2}\right)$

د. $PGCD(2k - 5; 3k - 5) = d$

- $d \mid 2k-5$ و $d \mid 3k-5 \Rightarrow d \mid 2(3k-5)-3(2k-5) \Rightarrow d \mid 5$
- $d = 5 \Rightarrow \begin{cases} 2k-5 \equiv 0[5] \\ 3k-5 \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k \equiv 0[5] \\ 3k \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow k \equiv 0[5] \Rightarrow k = 5\alpha \,;\, \alpha \in \mathbb{N}$

مجموعة النقط $M$ من المستقيم $(\Delta)$ التي تكون إحداثياتها أعدادا طبيعية هي : $M(10\alpha-5; 15\alpha-5; 5\alpha+1)$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}^*$

أول حل طبيعي هو : $M_0(5;10;6)$.

**التمرين 36 :**

$\begin{cases} a = 5n+3 \\ b = 2n+1 \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$

1) $2a-5b = 1 \Rightarrow PGCD(a,b) = 1$ (بيزو)

2) $x = 5m+3 \,;\, y = 2m-1 \,;\, m \in \mathbb{N}$

أ. $2x-5y = 11$

ب. $PGCD(x,y) = d$

- $d \mid x$ و $d \mid y \Rightarrow d \mid 2x-5y \Rightarrow d \mid 11 \Rightarrow d = 1$ أو $d = 11$
- $d = 11 \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0[11] \\ y \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m+3 \equiv 0[11] \\ 2m-1 \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m \equiv 8[11] \\ 2m \equiv 1[11] \end{cases} \Rightarrow m \equiv 6[11] \Rightarrow m = 11k+6$

$\Rightarrow x = 5(11k+6)+3 = 55k+33 \,;\, y = 2(11k+6)-1 = 22k+11 \,;\, k \in \mathbb{N}$

**التمرين 37 :**

1) $4 \equiv -1[5] \Rightarrow 4^{2n} \equiv 1[5]$

2) $3^0 \equiv 1[5] \,;\, 3^1 \equiv 3[5] \,;\, 3^2 \equiv 4[5] \,;\, 3^3 \equiv 2[5] \,;\, 3^4 \equiv 1[5]$

$3^{4k} \equiv 1[5] \,;\, 3^{4k+1} \equiv 3[5] \,;\, 3^{4k+2} \equiv 4[5] \,;\, 3^{4k+3} \equiv 2[5]$

3) $1428 \equiv 3[5] \Rightarrow 1428^{2009} \equiv 3^{2009}[5] \Rightarrow 1428^{2009} \equiv 3^{4(502)+1}[5] \Rightarrow 1428^{2009} \equiv 3[5]$

4) $A_n = 2+4^{2n}+3^n$

$A_n \equiv 0[5] \Rightarrow 3^n+3 \equiv 0[5] \Rightarrow 3^n \equiv 2[5] \Rightarrow n = 4k+3 \,;\, k \in \mathbb{N}$

**التمرين 38:**

1) $23x-17y = 6$

$23(1)-17(1) = 6 \Rightarrow 23(x-1)-17(y-1) = 0 \Rightarrow 23(x-1) = 17(y-1)$

$\begin{cases} 17/23(x-1) \\ PGCD(17;23) = 1 \end{cases} \Rightarrow 17/(x-1) \Rightarrow x-1 = 17k \Rightarrow x = 17k+1$

$23(x-1) = 17(y-1) \Rightarrow 23(17k) = 17(y-1) \Rightarrow y-1 = 23k \Rightarrow y = 23k+1$

$S = \{(17k+1 \,;\, 23k+1)\} \,;\, k \in \mathbb{Z}$

2) $A = 23x+2 = 17y+8 \Rightarrow 23x-17y = 6 \Rightarrow (x;y) = (17k+1 \,;\, 23k+1)$

- $k = 0 : (x; y) = (1 ; 1) ; A = 25 = \overline{34}_7$
- $k = 1 : (x; y) = (18 ; 24) ; A = 416 = \overline{1133}_7$
- $k = 2 : (x; y) = (35 ; 47) ; A = 807 = \overline{2232}_7$

**التمرين 39 :**

1) $7^0 \equiv 1[10]$ ; $7^1 \equiv 7[10]$ ; $7^2 \equiv 9[10]$ ; $7^3 \equiv 3[10]$ ; $7^4 \equiv 1[10]$ ;

$7^{4k} \equiv 1[10]$ ; $7^{4k+1} \equiv 7[10]$ ; $7^{4k+2} \equiv 9[10]$ ; $7^{4k+3} \equiv 3[10]$

$7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} \equiv 1 + 7 + 9 + 3[10] \Rightarrow 7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} \equiv 0[10]$

2) $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n$

- $S_{n+4} - S_n = 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3} + 7^{n+4} \Rightarrow S_{n+4} - S_n \equiv 0[10] \Rightarrow S_{n+4} \equiv S_n[10]$
- $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n$
  - ✓ $n = 4k : S_n \equiv 1[10]$
  - ✓ $n = 4k + 1 : S_n \equiv 8[10]$
  - ✓ $n = 4k + 2 : S_n \equiv 7[10]$
  - ✓ $n = 4k + 3 : S_n \equiv 0[10]$



**التمرين 40 :**

1) $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12} = 10 + 12 + 11 \times 12^2 = 1606$

2) $N_2 = 1131 = 7 \times 12^2 + 10 \times 12 + 3 = \overline{7\alpha 3}^{12}$

3)أ) $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{12} = a_0 + \underbrace{a_1 \times 12}_{\equiv 0[12]} + \cdots + \underbrace{a_n \times 12^n}_{\equiv 0[12]} \Rightarrow N \equiv a_0[12]$

$\Rightarrow N = 12k + a_0 = 3(4k) + a_0 = 3k' + a_0 \Rightarrow N \equiv a_0[3]$

نتيجة : يقبل عدد القسمة على 3 إذا كان رقم آحاده في النظام ذي الأساس 12 مضاعفا لـ3

$N_2 = \overline{7\alpha 3}^{12} \Rightarrow N_2 \equiv 3[3] \Rightarrow N_2 \equiv 0[3]$ $(1131 = 3 \times 377)$

ب) $12 \equiv 1[11] \Rightarrow 12^p \equiv 1[11] \Rightarrow a_p 12^p \equiv a_p[11]$

$N = a_0 + a_1 \times 12 + \cdots + a_n \times 12^n \Rightarrow N \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_n[11]$

نتيجة : يقبل عدد القسمة على 11 إذا كان مجموع أرقامه في النظام ذي الأساس 12 مضاعفا لـ11

$N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$ ; $\beta + 1 + \alpha = 11 + 1 + 10 = 22 = 2 \times 11 \Rightarrow N_1 \equiv 0[11]$ $(1606 = 11 \times 146)$

4) $N = \overline{x4y}^{12}$ ; $N \equiv 0[33] \Rightarrow \begin{cases} N \equiv 0[3] \\ N \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \equiv 0[3] \\ x + y + 4 \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in \{0; 3; 6; 9\} \\ x + y + 4 \equiv 0[11] \end{cases}$

- $y = 0 : x + 4 \equiv 0[11] \Rightarrow x \equiv 7[11] \Rightarrow x = 7 \Rightarrow (x; y) = (7; 0)$
- $y = 3 : x + 7 \equiv 0[11] \Rightarrow x \equiv 4[11] \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (x; y) = (4; 3)$
- $y = 6 : x + 10 \equiv 0[11] \Rightarrow x \equiv 1[11] \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (x; y) = (1; 6)$
- $y = 9 : x + 2 \equiv 0[11] \Rightarrow x \equiv 9[11] \Rightarrow x = 9 \Rightarrow (x; y) = (9; 9)$

**التمرين 41 :**

$8x + 5y = 1 \dots (E)$

1) $8(2) + 5(-3) = 1 \Rightarrow$ الثنائية $(2,-3)$ حل خاص للمعادلة $(E)$

$8(x-2) + 5(y+3) = 0 \Rightarrow 8(x-2) = 5(-y-3)$

$\begin{cases} 5/8(x-2) \\ PGCD(5;8) = 1 \end{cases} \Rightarrow 5/(x-2) \Rightarrow x - 2 = 5k \Rightarrow x = 5k + 2$

$8(5k) = 5(-y-3) \Rightarrow -y - 3 = 8k \Rightarrow y = -8k - 3$

$S = \{(5k+2\,;\,-8k-3)\}\,;\,k \in \mathbb{Z}$

2) $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$

أ. $8a = N - 1\,;\,5b = N - 2\,;\,8a - 5b = N - 1 - N + 2 = 1 \Rightarrow$ الثنائية $(a,-b)$ حل للمعادلة $(E)$

ب. $a = 5k + 2 \Rightarrow N = 8(5k+2) + 1 = 40k + 17 \Rightarrow N \equiv 17[40]$

3) $8x + 5y = 100\,;\,8(200) + 5(-300) = 100 \Rightarrow S = \{(5k+200\,;\,-8k-300)\}\,;\,k \in \mathbb{Z}$

4) $\begin{cases} 8x + 5y = 100 \\ x > 0 \text{ و } y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5k + 200 > 0 \\ -8k - 300 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > -40 \\ k < -37{,}5 \end{cases} \Rightarrow k \in \{-38,-39\} \Rightarrow (x,y) \in \{(10{,}4); (5{,}12)\}$

**التمرين 42 :**

1) $(2n+1) - 2(n) = 1 \Rightarrow PGCD(n\,,2n+1) = 1$ (بيزو)

2) $\alpha = n + 3\,;\,\beta = 2n + 1\,;\,PGCD(\alpha,\beta) = d$

أ. $d/\alpha$ و $d/\beta \Rightarrow d/2\alpha - \beta \Rightarrow d/5$

ب. $\begin{cases} \alpha \equiv 0[5] \\ \beta \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n + 3 \equiv 0[5] \\ 2n + 1 \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 2[5] \\ 2n \equiv 4[5] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 2[5] \Rightarrow n - 2 \equiv 0[5]$

3) $a = n^3 + 2n^2 - 3n = (n-1)(n^2+3n)\,;\; b = 2n^2 - n - 1 = (n-1)(2n+1)$

4) $PGCD[n(n+3),(2n+1)] = d'$

أ. $d/n+3$ و $d/2n+1 \Rightarrow d/n(n+3)$ و $d/2n+1 \Rightarrow d/PGCD[n(n+3),(2n+1)] \Rightarrow d/d'$
$d'|\,n(n+3)$ و $d'|\,2n+1 \Rightarrow d'|\,n+3$ و $d'|\,2n+1 \Rightarrow d'|\,PGCD(n+3\,,2n+1) \Rightarrow d'|\,d$
$d/d'$ و $d'/d \Rightarrow d = d'$

ب. $PGCD(a,b) = (n-1)PGCD[n(n+3),(2n+1)] = (n-1)d' = (n-1)d$
- $n = 5k + 2 : d = 5 \Rightarrow PGCD(a,b) = 5(n-1)$
- $n \neq 5k + 2 : d = 1 \Rightarrow PGCD(a,b) = n - 1$

ج. $n = 2001 = 5(400) + 1 \;\Rightarrow PGCD(a,b) = 2001 - 1 = 2000$
$n = 2002 = 5(400) + 2 \;\Rightarrow PGCD(a,b) = 5(2002-1) = 5 \times 2001 = 10005$