حل تمرين الأعداد المركبة :

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

المعادلة ذات المجهول z التالية .

$$z^2-2(1-\sqrt{3})z+8=0$$

(لاحظ أن $(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد

والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

A و B نقطتان من المستوي ، لاحقتاهما

على الترتيب $z_A=(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$ ، $z_B=\overline{z_A}$

1/ بين أن $\dfrac{z_B}{z_A}=e^{-\frac{7\pi}{6}i}$

ب/ استنتج عمدة العدد المركب z_A

ج/ استنتج القيمة المضبوطة لكل من العددين : $\cos\frac{7\pi}{12}$ ، $\sin\frac{7\pi}{12}$

__الحل__ :

$$z^2-2(1-\sqrt{3})z+8=0$$

$$\Delta=[2(1-\sqrt{3})]^2-4\times 8$$
$$=4[(1-\sqrt{3})^2-8]$$
$$=4[4-2\sqrt{3}-8]$$
$$=4[-4-2\sqrt{3}]$$
$$=-4[4+2\sqrt{3}]$$
$$=i^2 4(4+2\sqrt{3})$$

لكن لدينا : $4+2\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})^2$

ومنه $\Delta=i^2\times 4(1+\sqrt{3})^2$

$$=[2i(1+\sqrt{3})]^2$$

$$z_1=\frac{2(1-\sqrt{3})+2i(1+\sqrt{3})}{2}$$
$$=(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$$

$$z_2=\frac{2(1-\sqrt{3})-2i(1+\sqrt{3})}{2}$$

$$\boxed{z_1=(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}$$

$$\boxed{z_2=(1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3})}$$

(2) $z_A=(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$

$z_B=\overline{z_A}$

إثبات أن : $\dfrac{z_B}{z_A}=e^{-\frac{7\pi}{12}i}$

$$\frac{z_B}{z_A}=\frac{(1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}$$

$$\frac{z_B}{z_A}=\frac{[(1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3})]^2}{[(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})][(1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3})]}$$

$$=\frac{(1-\sqrt{3})^2-(1+\sqrt{3})^2-2i(1-\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2}{8}$$

$$=\frac{\cancel{4}-2\sqrt{3}-\cancel{4}-2\sqrt{3}-4i}{8}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=\arg\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$=\pi-\pi/6=5\pi/6$$

أو $\arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)=-\pi-\pi/6$

$$=-7\pi/6$$