الأعداد المركبة و مفهوم الهندسية

المفهوم الهندسي	العلاقة المركبة
المسافة AB	$AB=\lvert z_B-z_A\rvert$
I منتصف القطعة $[A,B]$	$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$
قياس الزاوية $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$	$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
نقط مستقيمة C,B,A	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\Re$
• $AM=r$ • M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A ونق r	$\lvert z-z_A\rvert=r\quad;(r>0)$
• $AM=BM$ • M تنتمي إلى منتصف القطعة $[AB]$	$\lvert z-z_A\rvert=\lvert z-z_B\rvert$
ABC مثلث قائم الزاوية في A	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[r,\pm\frac{\pi}{2}\right]$
ABC مثلث متساوي الساقين في A	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=[1,\theta]$
ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في A	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1,\pm\frac{\pi}{2}\right]$
ABC مثلث متساوي الاضلاع	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1,\pm\frac{\pi}{3}\right]$

التمرين 21:

نعتبر كثير الحدود ذات المتغير z المعرف كما يلي :

$$p(z)=z^3-6z^2+12z-16$$

احسب $p(4)$ ثم استنتج تحليل $p(z)$. حل في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $p(z)=0$.

المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط C,B,A ذات اللواحق على الترتيب $a=4$; $b=1+i\sqrt{3}$; $c=1-i\sqrt{3}$.

احسب $\frac{c-a}{b-a}$ و استنتج طبيعة المثلث ABC .

التمرين 22:

$p(z)$ كثير الحدود ذات المجهول z المعرف في المجموعة $\mathbb{C}$ بـــ : $p(z)=z^2+2\sqrt{3}z+4$

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $p(z)=0$
2) اكتب حلي المعادلة على الشكل المثلثي .
3) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط C,B,A ذات اللواحق $z_A=2i$ ، $z_B=+i-\sqrt{3}$ ، $z_C=-\sqrt{3}-i$ على الترتيب

أ) اكتب كلا من الأعداد z_A ، z_B ، z_C على الشكل الآسي .

ب) علم النقط C,B,A و ثم بين أنها تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

4) نضع : $L=\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$

أ) بين أن $L=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ثم اكتب العدد L على الشكل الأسي .

ب) عين طويلة و عمدة العدد المركب L ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

ت) احسب مساحة المثلث ABC .

التمرين 23:

نعتبر $p(z)$ كثير الحدود ذات المتغير z حيث : $p(z)=(z-1-i)(z^2-2z+4)$

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $p(z)=0$.
2) نضع : $z_1=1+i$ ، $z_2=1+i\sqrt{3}$
   1) اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي .
   2) اكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسى
   3) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
3) ا) n عدد طبيعي عين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا

ب) احسب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$

التمرين 24:

في مجموعة الأعداد المركبة نعتبر المعادلة (E) : $z^3-(6+4i)z^2+(13+24i)z-51=0$

1) برهن أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرف z_0 يطلب تعينه .
2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

3) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A,B,C ذات اللواحق $z_A=3-2i$ ، $z_B=3+2i$ ، $z_C=4i$ و على الترتيب

أ) مثل في المستوي النقط A,B,C .

ب) بين أن الرباعي $OABC$ هو متوازي أضلاع .

ت) عين لاحقة النقطة ω مركز متوازي الأضلاع $OABC$.

عين مجموعة النقط من المستوي بحيث يكون : $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$

التمرين 25 :

نعتبر المعادلة (E) في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$:

$$z^3+2(1+i)z^2+(9+4i)z+18i=0$$

1) برهن أن (E) تقبل حل تخيلي صرف z_0 يطلب حسابه، ثم عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يمكن كتابة (E) على الشكل $(z-z_0)(az^2+bz+c)=0$
2) استنتج الحلين الأخريين : z_1 و z_2 حيث $\text{Im}(z_1)<0$.
3) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$. لتكن A و B صورتي العدادين المركبين z_1 و z_2 على الترتيب .عين طبيعة المثلث OAB .

التمرين 26:

1) عين العددين المركبين z,z' بحيث : $\begin{cases}2iz+3iz'=2+9i\\3z-z'=8+8i\end{cases}$
2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر النقط A,B,ω والتي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=3+2i$ ، $z_B=-3$ ، $z_\omega=1-2i$

أ) تحقق أن : $z_B - z_\omega = i(z_A - z_\omega)$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ωAB .

ب) عين لاحقة النقطة C بحيث $z_C = 2z_\omega - z_A$

ت) عين لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$

ث) بين أن الرباعي $ABCD$ مربع .

أ) لتكن (γ) مجموعة النقط M من المستوي و التي تحقق : $2\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 8\sqrt{5}$

ب) تحقق أن النقطة B تنتمي للمجموعة (γ)، ثم عين طبيعة المجموعة (γ) وعناصرها المميزة.

ت) انشئ النقط A,B,C,ω ثم أنشئ المجموعة (γ)

تمرين رقم 02 م.2. BAC 2009 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$

2) نسمي z_1 و z_2 حلي هذه المعادلة.

أ) اكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الآسي .

ب) C,B,A هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب :

$$z_A = 1-i\sqrt{3};\ z_B = 1+i\sqrt{3};\ z_C = \frac{1}{2}\left(5+i\sqrt{3}\right)$$

(i يرمز إلى العدد المركب الذي يحقق $i^2=-1$)

احسب الأطوال $BC; AC; AB$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ت) جد الطويلة و عمدة للعدد المركب Z حيث : $Z=\dfrac{z_c - z_B}{z_A - z_B}$

ث) احسب Z^3 و Z^6 ثم استنتج ان Z^{3k} عدد حقيقي من اجل كل عدد طبيعي k

---

الإعداد المركبة و التحويلات النقطية التحويلات النقطية المبرمجة هي : الانسحاب ، الدوران ، التحاكي ، التشابه.

لتكن z لاحقة النقطة M و z' لاحقة النقطة M' . M' صورة M بالتحويل النقطي T.

$$T:(p)\to(p) \quad / \quad \boxed{z'=az+b}$$

$a=1$ T هو انسحاب الذي شعاعه $\vec{v}$ ذوا للاحقة b مثلا: $z'=z+1+i$ T هو انسحاب الذي شعاعه ذو المركبات $(1;1)$	a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 . T هو التحاكي الذي نسبته a ومركزه النقطة الصامدة . $z_\omega=\dfrac{b}{1-a}$ مثلا: $z'=2z+1+i$ نسبة التحاكي 2 و مركزه النقطة التي لاحقاتها تحقق أي $z'=2z+1+i$ لتي احداثياها $(-1;-1)$	a من الشكل $a=x+iy\ ;\ y\neq 0$ و $\lvert a\rvert=1$ T هو الدوران الذي زويته $\arg(a)$ ومركزه النقطة الصامدة $z_\omega=\dfrac{b}{1-a}$ مثلا: $z'=iz+1+i$ زاوية هذا الدوران $\dfrac{\pi}{2}$ و مركزه النقطة الصامدة التي لاحقتها z تحقق أي $z'=iz+1+i$ أي لتي $z=i$ احداثياها $(0;1)$	a من الشكل $a=x+iy\ ;\ y\neq 0$ و $\lvert a\rvert\neq 1$ T هو التشابه الذي زويته $\arg(a)$ و نسبته $\lvert a\rvert$ ومركزه النقطة الصامدة $z_\omega=\dfrac{b}{1-a}$ مثلا: $z'=(1+i)z+1+i$ زاوية هذا الدوران $\dfrac{\pi}{4}$ و نسبته $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ مركزه النقطة الصامدة التي لاحقتها z تحقق $z'=(1+i)z+1+i$ أي $z=i-1$ أي لتي احداثياها $(-1;1)$

التمرين 27:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ وليكن f التحويل النقطي المعرف كما يلي : $f: M(x;y) \to M'(x';y')$

$$\begin{cases} x' = y+1 \\ y' = -x-1 \end{cases}$$

١)عين إحداثيات النقطة B صورة النقطة $A(0;1)$ بالتحويل f .

2)جد إحداثيات النقطة D التي محولتها $C(1;1)$ بالتحويل f .

٤)بين انه توجد نقطة ω صامدة و حيدة بالتحويل يطلب تعيينها.

٦) جد صورة المستقيم (Δ) ذو المعادلة بـــ : $x+y-1=0$ بالتحويل f .

٥)ا)بين أن العبارة المركبة ل f هي : $z' = -iz+1-i$

ب) استنتج طبيعة التحويل f مع ذكر عناصر المميزة لتحويل.

جـ)عين نوع التحويل S و عناصره المميزة حيث : $S = f \circ f$

التمرين 28:

t التحويل النقطي حيث : $t: M(x;y) \to M'(x';y')$

عين في كل الحالات من الحالات التالية طبيعة التحويل و العناصر المميزة .

$$z' = iz+1+i....(1$$

$$z' = z+1....(2$$

$$z' = -2z+3-3i....(3$$

$$z' = (1+i)z-3i....(4$$

التمرين 29: :

S تحويل نقطي معرف بالعبارة المركبة المختصرة.عين طبيعة التحويل S و عناصره المميزة في كل حالة.

$$(z'-i) = 2(z-i).....(1$$

$$(z'+i) = i\sqrt{3}(z+i).....(2$$

$$(z'+2) = (1-i)(z+2).....(3$$

$$z' = \sqrt{2}(1-i)z.....(4$$

التمرين 30:

: اكتب العبارة المركبة للتحويل T في كل حالة من الحالة التالية.

1) T انسحاب شعاعه $\vec{v}(1;2)$

2) T تحاكي مركزه $\omega\left(1;-1\right)$ و نسبته -2.

3) T دوران مركزه $\omega\left(0;1\right)$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$

4) T تشابه مباشر مركزه $\omega\left(0;2\right)$ ونسبته 2 و زاويته $\frac{2\pi}{3}$

التمرين 31: نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$

النقط $z_D=3-3i$ ، $z_C=1+i$ ، $z_B=6$ و $z_A=2i$ وليكن t

التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ النقطة $M'(x';y')$: حيث $z'=3\alpha z+\beta$ حيث $\alpha;\beta$ عددان مركبان.

1)عين $\alpha;\beta$ علما ان $t(A)=B$ و $t(C)=D$

2)ما هي طبيعة التحويل t أعط عناصره المميزة .

التمرين 32: في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$.

1) عين الدوران R_1 الذي يحول النقطة $A(1;-2)$ إلى النقط $B(1;0)$ و يحول النقطة $C(1;-1)$ إلى النقطة $O(0;0)$ ،ثم عين عناصره المميزة.

2) عين مركز الدوران الذي زاويته $\frac{-\pi}{3}$ ويحول النقطة $H\left(1;\sqrt{3}\right)$ إلى النقطة $K(2;2)$.

التمرين 33::

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$.

1) عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S_1 الذي يحول النقطة $A(1;2)$ إلى النقطة $B(1;4)$ و يحو النقطة $C(2;-1)$ إلى $D(5;2)$ ، ثم أعط عناصره المميزة.

2) عين نسبة و زاوية التشابه المباشر S_2 الذي يحول النقطة $M_1(1;-1)$ إلى النقطة $M_2(3;0)$ و مركزه النقطة $\omega(1;0)$.

3) عين مركز التشابه المباشر S_3 الذي نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{3\pi}{4}$ و الذي يحول النقطة $A(2;1)$ إلى النقطة $B(2;2)$.

تمرين 34: نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$ النقط $A;B;C;D$ ذات اللواحق $z_D=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ،

$z_C=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $z_A=1$.

1) اكتب Z_C على الشكل الأسي و Z_D على الشكل الجبري.
2) مثل النقط $A;B;C;D$ في المعلم المعطى .
3) بين ان النقط $A;C;D$ في استقامية .
4) عين الزاوية θ و النسبة k للتشابه المباشر S الذي مركزه O و الذي يحول النقطة A إلى C .