المستوى : ثالثة ثانوي السنة الدراسية :2013/2012 إعداد الأستاذ: حليلات عمار

الشعبة :علوم تجريبية +رياضيات و تقني رياضي

زمرة التمارين رقم (07)

# المحور : الأعداد المركبة و التحويلات النقطية في المستوي و التوظيف في حل مسائل هندسية

***Les nombres complexes et Transformations ponctuel du plan***

- **تمرين مدخل للأعداد المركبة** : مثال بومبيلي ( Bombelli ).

الهدف من هذا النشاط هو حل المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ : $(1)$ ..... $x^3=15x+4$.

1) أثبت أن $\alpha+\beta$ حل للمعادلة $(1)$ إذا وفقط إذا: $(2)$ .... $\alpha^3+\beta^3+3(\alpha\beta-5)(\alpha+\beta)-4=0$.

2) ما هي القيمة التي يجب إعطاؤها للعدد $\alpha\beta$ حتى تكتب المعادلة $(2)$ على الشكل $\alpha^3+\beta^3=4$ ؟
ما هي قيمة $\alpha^3\beta^3$ في هذه الحالة ؟

3) تأكد أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $\left(x-\alpha^3\right)\left(x-\beta^3\right)=x^2-4x+125$.

4) نعتبر المعادلة $x^2-4x+125=0$ . . . $(3)$ تأكد أن هذه المعادلة لا تقبل حلولا حقيقية .

5) نفرض عدد نرمز له "$i$" حيث $i^2=-1$.
أكتب حلول المعادلة $(3)$ في هذه الحالة .
أحسب $(2-i)^3$ و $(2+i)^3$ ، استنتج حلا حقيقيا للمعادلة $(1)$. ثم عين حلول المعادلة $(1)$.

## التدريب على حل تمارين بكالوريات جزائرية وأجنبية و بكالوريات تجريبية

**التدريب 01** ( بكالوريا علوم تجريبية الجزائر دورة 2009)

$P(z)$ كثير حدود حيث: $P(z)=(z-1-i)\left(z^2-2z+4\right)$ و $z$ عدد مركب

1)حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

2) نضع : $z_1=1+i$ ، $z_2=1-\sqrt{3}i$

أ) أكتب $z_1$ و $z_2$ على الشكل الآسي .

ب) أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الآسي .

ج) استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3) أ) $n$ عدد طبيعي . عين قيم $n$ بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا

ب) احسب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$

## التدريب 02

( بكالوريا علوم تجريبية الجزائر دورة 2009

ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1.حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$

2.نسمي $z_1$ و $z_2$ حلي هذه المعادلة

أ) أكتب العددين $z_1$ و $z_2$ على الشكل الآسي .

ب) $A$ ، $B$ و $C$ هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ ، $z_C=\frac{1}{2}\left(5+i\sqrt{3}\right)$

- احسب الأطوال $AB$ ، $AC$ ، $BC$ ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$.

جـ) جد الطويلة وعمدة للعدد المركب $Z$ حيث : $Z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$.

د) احسب $Z^3$ و $Z^6$ ثم استنتج أن $Z^{3k}$ عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي $k$

## التدريب 03

( بكالوريا علوم تجريبية الجزائر دورة 2011)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=3-2i$ ، $z_B=3+2i$ و $z_C=4i$

1.أ- علّم النقط $A$ ، $B$ و $C$ .

ب- ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علّل إجابتك .

جـ - عيّن لاحقة النقطة $\Omega$ مركز الرباعي $OABC$ .

2. عيّن ثم أنشئ $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$$

3.أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول $z$ التالية : $z^2-6z+13=0$

نسمي $z_0$ ، $z_1$ حلي هذه المعادلة .

ب- لتكن $M$ نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركّب $z$.عيّن مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تحقق : $\left|z-z_0\right|=\left|z-z_1\right|$

## التدريب 04

( بكالوريا تقني رياضي الجزائر دورة 2010)

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة : $\left(z-3+2i\right).\left(z^2+6z+10\right)=0$

( $i$ هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له ) .

2/ علّم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ النقط $A$ ، $C$ ، $D$ و $I$ ذات اللاحقات : $z_A=3-2i$ ، $z_C=-3+i$ ، $z_D=-3-i$ و $z_I=1$ على الترتيب .

3/ $z$ عدد مركب يحقق الجملة : $\begin{cases}\arg\left(z-3+2i\right)=\arg\left(z-1\right)+\frac{\pi}{2}\\ \left|z-3+2i\right|=\left|z-1\right|\end{cases}$

أ- بين أن الجملة تكافئ : $\frac{z-3+2i}{z-1}=i$ ثم عين قيمة $z$

ب- $B$ النقطة التي لاحقتها $z_B=3$ ، تحقق أن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ . ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

جـ - لتكن $J$ النقطة التي لاحقتها $z_J$ حيث : $z_J=1-2i$ .

اكتب على الشكل الأسى العدد المركب $Z$ حيث : $Z=\frac{Z_A-Z_I}{Z_B-Z_J}$

تحقق أنّ : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JI}$ .ما هي طبيعة الرباعي $ABIJ$ ؟

## التدريب 05

( بكالوريا تقني رياضي الجزائر دورة 2010)

1) أ- اكتب على الشكل الآسي العدد المركب $a$ حيث : $a=-2+2i\sqrt{3}$

( $i$ هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له ) .

ب- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $Z$ : $Z^2=-2+2i\sqrt{3}$

2) ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

$A$ و $B$ و $C$ النقط التي لاحقاتها $Z_A=-2$ و $Z_B=-1-\sqrt{3}i$ و $Z_C=1+\sqrt{3}i$ على الترتيب .

أ – احسب طويلة العدد المركب $\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$ وعمـدة له .

ب- استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

3) لتكن $(E)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ حيث : $\arg\left(\overline{z}+2\right)=\frac{\pi}{3}$

أ- تحقق أن $B$ تنتمي إلى $(E)$

ب- عيّن المجموعة $(E)$ .



إعداد الأستاذ: حليلات عمار

## التدريب 06

( بكالوريا علوم تجريبية الجزائر دورة 2012)

1) نعتبرفي مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية :

$$z = \frac{3i\left(z+2i\right)}{z-2+3i} \quad (z \neq 2-3i \text{ حيث})$$

- حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلـــة .

2) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. $A$ و $B$ نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : $z_A$ و $z_B$ حيث : $z_A = 1+i\sqrt{5}$ و $z_B = 1-i\sqrt{5}$ .

- تحقق أنّ $A$ و $B$ تنتميان إلى دائرة مركزها $O$ يطلب تعيين نصف قطرها.

3)نرفق بكل نقطة $M$ من المستوي لاحقتها $z$ ، $(z \neq 2-3i)$ النقطة $M'$ لاحقتها $z'$

حيث : $$z = \frac{3i\left(z+2i\right)}{z-2+3i}$$

النقط $C$ ، $D$ ، $E$ لواحقها على الترتيب : $z_C = -2i$ ، $z_D = 2-3i$ و $z_E = 3i$

و $\left(\Delta\right)$ محور القطعة $\left[CD\right]$ . أ- عبّر عن المسافة $OM'$ بدلالة المسافتين $CM$ و $DM$ .

ب-استنتج أنه من أجل كل نقطة $M$ من $\left(\Delta\right)$ فإن النقطة $M'$ تنتمي إلى دائرة $\left(\gamma\right)$ يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها . تحقق أن $E$ تنتمي إلى $\left(\gamma\right)$.

## التدريب 07

( بكالوريا علوم تجريبية الجزائر دورة 2012)

1) $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب $z$ حيث : $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$ .

أ- تحقق أنّ 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$ .

ب-جد العددين الحقيقيين $\alpha$ و $\beta$ بحيث من أجل كل عدد مركب $z$ :

$$P(z) = \left(z-6\right)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right)$$

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$ .

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. $A$ ، $B$ و $C$ نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب : $z_A = 6$ ، $z_B = 3+i\sqrt{3}$ ، $z_C = 3-i\sqrt{3}$ .

أ- اكتب كلا من $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ على الشكل الأسي .

ب- اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي .

جـ- استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .



إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

3) ليكن $S$ التشابه المباشر الذي مركزه $C$ ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ .

أ- جد الكتابة المركبة للتشابه $S$.

ب-عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة $A'$ صورة النقطة $A$ بالتشابه $S$ .

جـ- بيّن أن النقط $A$ ، $B$ ، $A'$ في استقامية .

## التدريب 08

( بكالوريا رياضيات الجزائر دورة 2012)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $z^2-\sqrt{2}z+1=0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. $A$ ، $B$ و $C$ نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب : $z_A=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=z_A+z_B$

أ- أكتب على الشكل الآسي الأعداد المركبة : $z_A$ ، $z_B$ و $\frac{z_A}{z_B}$ .

ب-عيّن لاحقة كل من $A'$ ، $B'$ و $C'$ صور النقط $A$ ، $B$ و $C$ على الترتيب بالدوران الذي مركزه $O$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$ .

جـ -بيّن أن الرباعي $OA'C'B'$ مربع .

3) نسمي $(\Delta)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ حيث : $\left|z-z_A\right|=\left|z-z_B\right|$

أ-بيّن أن $(\Delta)$ هو محور الفواصل .

ب-بيّن أن حلي المعادلة : $\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2=i$ عددان حقيقيان .( لا يطلب حساب الحلين )

## التدريب 09

( بكالوريا رياضيات الجزائر دورة 2012)

1)حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ :

$$(z^2+4)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$$

2) نعتبر في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-2i$ و $z_D=\overline{z_C}$

- بيّن أن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ تنتمي إلى دائرة $(\gamma)$ يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها ، ثم أنشئ النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$.

4) نرمز بـ $z_E$ إلى لاحقة النقطة $E$ نظيرة النقطة $B$ بالنسبة إلى المبدأ $O$

أ- بيّن أن : $\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C} = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

ب-بيّن أن النقطة $A$ هي صورة النقطة $E$ بدوران $R$ مركزه $C$ يطلب تعيين زاويته .

جـ- استنتج طبيعة المثلث $AEC$ .

د- $H$ هو التحاكي الذي مركزه $O$ و نسبته 2.

-عيّن طبيعة التحويل $R \circ H$ و عناصره المميزة ، ثم استنتج صورة الدائرة $(\gamma)$ بالتحويل $R \circ H$

## التدريب 10

( بكالوريا تقني رياضي الجزائر دورة 2012)

**1**-عيّن العددين المركبين $z_1$ و $z_2$ بحيث : $\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 9 - 2i \\ 3z_1 - z_2 = 8 + 8i \end{cases}$

**2**-نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، النقـط $A$ ، $B$ و $\Omega$ التي لاحقاتها على الترتيب $z_A$ ، $z_B$ و $z_\Omega$

حيث : : $z_A = 3 + 2i$ ، $z_B = -3$ و $z_\Omega = 1 - 2i$

أ)أثبت أنّ : $z_B - z_\Omega = i\left(z_A - z_\Omega\right)$.

ب)عيّن طبيعة المثلث $\Omega AB$ .

**3**- $h$ هو التحاكي الذي مركزه النقطة $A$ و نسبته 2.

أ) عيّن الكتابة المركبة للتحاكي $h$ .

ب)عيّن $z_C$ لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $\Omega$ بالتحاكي $h$ .

جـ)عيّن $z_D$ لاحقة النقطة $D$ مرجح الجملة $\left\{(A,1),(B,-1),(C,1)\right\}$

د) بيّن أن $ABCD$ مربع .

**4**- $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}$

أ) تحقق أن النقطة $B$ تنتمي إلى المجموعة $(E)$ ، ثم عيّن طبيعة $(E)$ و عناصرها المميزة .

ب)أنشئ المجموعة $(E)$ .

## التدريب 11

( بكالوريا علوم تجريبية الجزائر دورة 2011)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A = -i$ ، $z_B = 2+3i$ و $z_C = -4+i$

**1**. أ – اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ .

**ب-** عيّن طويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ و عمدة له ؛ ثمّ استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

**2.** نعتبر التحويل النقطي $T$ في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M$ ذات اللاحقة $z$ ، النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ حيث : $z' = iz - 1 - i$

**أ-** عيّن طبيعة التحويل $T$ محدّدا عناصره المميزة .

**ب-** ما هي صورة النقطة $B$ بالتحويل $T$ **.**

**3.** لتكن $D$ النقطة ذات اللاحقة $z_D = -6 + 2i$ .

**أ-** بيّن أن النقاط $A$ ، $C$ و $D$ في استقامية .

**ب-** عيّن نسبة التحاكي $h$ الذي مركزه $A$ و يحوّل النقطة $C$ إلى النقطة $D$ .

**جـ -** عيّن العناصر المميزة للتشابه $S$ الذي مركزه $A$ و يحوّل $B$ إلى $D$

## التدريب 12

**( بكالوريا رياضيات الجزائر دورة 2011)**

المستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ .

$A$ ، $B$ و $C$ ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب :

$$z_A = 1 - i \text{ ، } z_B = -1 + i \text{ و } z_C = \sqrt{3}\left(1 + i\right)$$

1/ اكتب على الشكل الآسي الأعداد المركبة : $z_A$ ، $z_B$ ، $z_C$ .

2/ أ/ احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم فسّر النتائج المحصل عليها .

ب/ حدّد طبيعة المثلث $ABC$ .

3/ عيّن لاحقة النقطة $D$ بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معينا

4/ $T$ التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M$ من المستوي لاحقتها $z$ النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ حيث : $z' = \left(-1 + i\right)z + 1 - 3i$

أ/ عيّن طبيعة التحويل $T$ و عناصره المميزة

ب/ استنتج طبيعة التحويل $T \circ T$ و عناصره المميزة

## التدريب 13

**( بكالوريا علوم تجريبية الجزائر دورة 2010)**

1)حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 18 = 0$

ثم اكتب الحلين على الشكل الأسي

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$، نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ لاحقاتها على الترتيب : $z_A = 3 + 3i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -z_A$ و $z_D = -z_B$ .

أ- بيّن أن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز $O$ مبدأ المعلم .

ب- عيّن زاوية للدوران $R$ الذي مركزه $O$ و يحول النقطة $A$ إلى النقطة $B$ .

جـ) بيّن أن النقط $A$ ، $O$ و $C$ في استقامية و كذلك النقط $B$ ، $O$ و $D$ .

د) استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$ .

## التدريب 14

( بكالوريا علوم تجريبية الجزائر دورة 2010)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

النقطتين $A$ و $B$ اللتين لاحقتيهما على الترتيب : $z_A=1+i$ و $z_B=3i$ .

1) اكتب على الشكل الأسي : $z_A$ و $z_B$ .

2) ليكن $S$ التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة $M$ لاحقتها $z$ النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ حيث :

$$z'=2iz+6+3i$$

أ)عيّن العناصر المميزة للتشابه المباشر $S$ .

ب)عين $z_C$ لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $A$ بالتشابه المباشر $S$ .

جـ) استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

3) لتكن النقطة $D$ مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$

أ) عين $z_D$ لاحقة النقطة $D$. ب) عيّن مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$ .

4) لتكن $M$ نقطة من المستوي تختلف عن $B$ و عن $D$ لاحقتها $z$ و لتكن $(\Delta)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ التي يكون من أجلها $\frac{z_B-z}{z_D-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ) تحقق أن النقطة $E$ ذات اللاحقة $z_E=6+3i$ تنتمي إلى $(\Delta)$ .

ب) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B-z}{z_D-z}$ .عين حينئذ المجموعة $(\Delta)$.

## التدريب 15

( بكالوريا رياضيات الجزائر دورة 2010)

نعتبرفي مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3-3z^2+3z-9=0.......(E)$

-1 أ)تحقق أن 3 حل للمعادلة $(E)$ ، ثم عين الأعداد الحقيقية $a$ و $b$ و $c$ بحيث من أجل كل عدد مركب $z$ فإن : $z^3-3z^2+3z-9=(z-3)(az^2+bz+c)$

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$ .

-2 المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. النقط $A$ و $B$ و $C$ صور الأعداد المركبة $z_A=3$ و $z_B=i\sqrt{3}$ و $z_C=-i\sqrt{3}$ .

- بيّن أن المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع .

-3 $D$ النقطة التي لاحقتها $z_D=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و $E$ صورتها بالدوران الذي مركزه $O$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$ .

- عين $z_E$ لاحقة النقطة $E$ .

-4 $F$ النقطة التي لاحقتها $z_F=1-i\sqrt{3}$ .

أ) احسب $\frac{z_F}{z_E}$ واستنتج أن المستقيمين $(OE)$ و $(OF)$ متعامدان .

ب) عيّن $z_G$ لاحقة النقطة $G$ بحيث يكون $OEGF$ مربعا .

## التدريب 16

( بكالوريا رياضيات الجزائر دورة 2010)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ .

1. نسمي $A$ و $B$ و $I$ النقط التي لاحقتاها على الترتيب :

$Z_A=1-4i$ و $Z_B=-1-2i$ و $Z_I=1-2i$

أ- علّم النقط $A$ و $B$ و $I$ .

ب -اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $Z=\dfrac{Z_I-Z_A}{Z_I-Z_B}$

جـ - ما هو نوع المثلث $IAB$ ؟

د - $C$ صورة $I$ بالتحاكي الذي مركزه $A$ و نسبته 2.احسب اللاحقة $Z_C$ للنقطة $C$ .

هـ - $D$ مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$. احسب اللاحقة $Z_D$ للنقطة $D$ .

و- بيّن أن $ABCD$ مربع .

2. عيّن و أنشئ $(\Gamma_1)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$

3.عيّن وأنشئ $(\Gamma_2)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=1$

## التدريب 17

( بكالوريا رياضيات الجزائر دورة 2009)

نرفق بكل عدد مركّب $z$ يختلف عن 1 العدد المركّب $f(z)$ حيث: $f(z)=\dfrac{z-i}{z-1}$

1) حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(45+45i)f(z)=23+45i-2z$

2) لتكن $M$ صورة العدد المركّب $z$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

أ- عين مجموعة النّقط $M$ بحيث يكون $f(z)$ عدداً حقيقيا سالباً تماما.

ب- احسب العدد المركّب $z_0$ بحيث: $|f(z_0)|=1$ و $\arg\left(f(z_0)\right)=\dfrac{3\pi}{2}$ .

3) في المستوي المركّب نعتبر النّقط $A$، $B$و $C$ صور الأعداد المركّبة 1 ، $i$ و $z_0$ على الترتيب.

أ- ما نوع المثلّث $ABC$ ؟

ب- عين النّقطة $D$ نظيرة $C$ بالنسبة إلى المستقيم $(AB)$ و استنتج طبيعة الرّباعي $ACBD$ .

## التدريب 18

( بكالوريا تقني رياضي الجزائر دورة 2009)

1- أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2z+2=0$ حيث $z$ المجهول

ب) استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول $z$ : $\left(\overline{z}+3\right)^2-2\left(\overline{z}+3\right)+2=0$

حيث $\overline{z}$ مرافق $z$ .

2- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

النقط $A$ ، $B$ ، $M$ لواحقها $(1-i)$ ، $(1+i)$ ، $z$ على الترتيب .

أ- عين $(\Gamma)$مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث : $z=1-i+ke^{i\frac{5\pi}{4}}$ عندما $k$ يمسح $\mathbb{R}^{+}$

ب- عين $(E)$مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث : $\left|z-1+i\right|=\left|z-1-i\right|$

## التدريب 19

**( BAC Pondichéry 2003)**

1/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية إذا علمت أنها تقبل حلا حقيقيا $z_0=2$ :

$$z^3+2z^2-16=0 \;........\; (1)$$

2/ اكتب حلول المعادلة (1) على الشكل الأسى

3/ في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ .

لتكن $z_A=-2-2i$ ، $z_B=2$ ، $z_D=-2+2i$

أ) عيّن اللاحقة $z_C$ للنقطة $C$ بحيث يكون $ABCD$ متوازي أضلاع ثم ارسم شكلا

ب) لتكن النقطة $E$ صورة النقطة $C$ بالدوران الذي مركزه $B$ وزاويته $\frac{-\pi}{2}$ و النقطة $F$

صورة النقطة $C$ بالدوران الذي مركزه $D$ وزاويته $\frac{+\pi}{2}$ .

-احسب $z_E$ و $z_F$ لاحقتي النقطتين $E$ و $F$ على الترتيب .أنشئ $E$ و $F$

- تحقق أن : $\frac{z_F-z_A}{z_E-z_A}=i$ ثم استنتج طبيعة المثلث $AEF$

ج) عيّن صورة المثلث $EBA$ بالدوران الذي مركزه $I$ منتصف القطعة $[EF]$ وزاويته $\frac{-\pi}{2}$

## التدريب 20

**( بكالوريا شعبة تقني رياضي الجزائر دورة 2011)**

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

$L$ العدد المركب المعرف كما يلي : $L=\frac{-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i}$

1/ أ) اكتب $L$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الآسي .

ب) بيّن أن : $L^{12}+1=0$ ، ثم احسب : $\left(-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{12}+\left(5+3i\right)^{12}$

جـ ) $n$ عدد طبيعي $n$ عدد طبيعي فردي و $p$ عدد طبيعي زوجي أثبت أن : $L^{4n}+L^{4p}=0$.

2/ أ) النقطتان $A$ ،$B$ لاحقتاهما على الترتيب : $z_A=5+3i$ و $z_B=5-3i$ عيّن اللاحقة $z_{A'}$

للنقطة $A'$ صورة النقطة $A$ بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة $B$ ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ .

ب) عيّن $z_G$ لاحقة النقطة مركز ثقل المثلث $ABA'$



إعداد الأستاذ: حليلات عمار

## التدريب 21

(من بكالوريا تقني رياضي الجزائر دورة 2008)

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(*)$ المعرفة كما يلي :

$$z^3+(2-4i)z^2-(6+9i)z+9(-1+i)=0.......(*)$$

1/ بيّن أن المعادلة $(*)$ تقبل حل $z_0$ تخيلي صرف و حل أخر حقيقي يطلب تعيينهما .

2/ حل عندئذ في $\mathbb{C}$ المعادلة $(*)$ ثم اكتب الحلول $z_0$ ، $z_1$ ، $z_2$ على الشكل الأسي حيث $z_2$ هو الحل الحقيقي .

3/ نعتبر في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط $A$ ، $B$ و $C$ ذات اللاحقات $z_0$ ، $z_1$ ، $z_2$ على الترتيب .

- عيّن النقطة $G$ مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$ .

4/ عيّن المجموعة $(E)$ للنقط $M$ حيث : $AM^2+BM^2-CM^2=-13$

- بيّن أن النقطة $A$ تنتمي إلى المجموعة $(E)$ ثم أنشئ $(E)$

5/ تحقق أن النقط $O$ ، $B$ و $G$ في استقامية ثم عين صورة المجموعة $(E)$ بالتحاكي الذي مركزه النقطة $O$ و يحول $B$ إلى $G$ محددا عناصره المميزة .

## التدريب 22

**(BAC LIBAN 2003)**

1/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $4z^2-12z+153=0$

2/ في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ( وحدة الرسم : $1cm$ )

نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $P$ ذات اللواحق : $z_A=\frac{3}{2}+6i$ ، $z_B=\frac{3}{2}-6i$ ، $z_C=-3-\frac{1}{4}i$ ، $z_P=3+2i$ و الشعاع $\vec{\omega}$ المعرف باللاحقة : $z_{\vec{\omega}}=-1+\frac{5}{2}i$

أ) عيّن اللاحقة $z_Q$ للنقطة $Q$ صورة النقطة $B$ بالانسحاب $t$ الذي شعاعه $\vec{\omega}$ .

ب) عيّن اللاحقة $z_R$ للنقطة $R$ صورة النقطة $P$ بالتحاكي $h$ الذي مركزه $C$ ونسبته $\frac{-1}{3}$

ج) عيّن اللاحقة $z_S$ للنقطة $S$ صورة النقطة $P$ بالدوران $r$ الذي مركزه $A$ وزاويته $\frac{-\pi}{2}$

د) أنشئ النقط : $P$ ، $Q$ ، $R$ و $S$

3/ أ) أثبت أن الرباعي $PQRS$ متوازي أضلاع

ب) احسب : $\frac{z_R-z_Q}{z_P-z_Q}$ ثم استنتج الطبيعة الخاصة لمتوازي الأضلاع $PQRS$

ج) برهن أن النقط $P$ ، $Q$ ، $R$ و $S$ تنتمي إلى دائرة واحدة $(C)$ يطلب تعيين لاحقة مركزها $\Omega$ ونصف قطرها $\rho$ . هل المستقيم $(AP)$ مماس للدائرة $(C)$؟

## التدريب 23

( بكالوريا تقني رياضي الجزائر دورة 2009)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+18=0$

2. ليكن العدد المركب $z_1$ حيث : $z_1=3-3i$ ، ( $i$ هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له )

أ) اكتب $z_1$ على الشكل الآسي .

ب) احسب طويلة العدد $z_3$ و عمدة له حيث $z_1\times z_3=6\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

استنتج قيمتي $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

3. نعتبر في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ النقط $A$ ، $B$ و $C$ ذات اللاحقات $3+3i$ ، $3-3i$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$ على الترتيب .

أ) عين قيم العدد الحقيقي $\alpha$ حتى تقبل الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;\alpha)\}$ مرجحا نرمز له بالرمز $G_\alpha$

ب) عين مجموعة النقط $G_\alpha$ لمّا يتغير $\alpha$ في $\mathbb{R}^*$.

## التدريب 24

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

ليكن كثير الحدود $f(z)$ للمتغير المركب $z$ حيث أن :

$$f(z)=z^3+\left(14-i\sqrt{2}\right)z^2+\left(74-14i\sqrt{2}\right)z-74i\sqrt{2}\ .$$

1) أوجد الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ بحيث يكون لكل عدد مركب $z$ :

$$f(z)=\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(az^2+bz+c\right)$$

2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $f(z)=0$ .

نسمي $A$ ، $B$ ، $C$ صور الأعداد : $-7+5i$ ، $-7-5i$ و $i\sqrt{2}$ على الترتيب .

3) لتكن $D$ النقطة التي لاحقتها $1+i$ .عين لاحقة النقطة $E$ حيث $ABDE$ متوازي الأضلاع .

4) لتكن $F$ النقطة التي لاحقتها $1+11i$ . نضع $\omega=\frac{(z_A-z_D)}{(z_F-z_B)}$ .

أ) أكتب $\omega$ على الشكل الجبري .

ب) أكتب $\omega$ على الشكل الأسي .

5) - أثبت أن المستقيمين $(AD)$ و $(BF)$ متعامدان.

- استنتج طبيعة الرباعي $ABDF$ .



إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

## التدريب 25

ليكن كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب $z$ المعرف كما يلي :

$$P(z)=z^4-2\sqrt{3}z^3+8z^2-8\sqrt{3}z+16$$

1/ أثبت أنه من أجل كل عدد مركب $z$ فإن : $\overline{P(z)}=P\left(\overline{z}\right)$

2/ تحقق أن : $P\left(\sqrt{3}+i\right)=P(-2i)=0$

3/ استنتج الجذرين الأخرين لـ $P(z)$

4/ المستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ نعتبر النقط : $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ التي لواحقها:

$$z_A=i+\sqrt{3} \text{ ، } z_B=\overline{z_A} \text{ ، } z_C=-2i \text{ ، } z_D=\overline{z_C}$$

أ)مثل النقط : $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ في المستوي المركب

ب)أثبت أن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ تنتمي إلى نفس الدائرة

ج) لتكن $E$ نظيرة $B$ بالنسبة إلى $O$ ، بين أن $\frac{z_A-z_C}{z_E-z_C}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ثم أعط تفسيرا هندسيا للمساواة

## التدريب 26

**( بكالوريا شعبة تقني رياضي الجزائر دورة 2011)**

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2-2\sqrt{3}z+4=0......(E)$$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$ ، ثم اكتب حلولها على الشكل المثلثي .

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ نعتبر النقاط $A$ ، $B$ ، $C$ التي

لاحقاتها على الترتيب : $z_A=2i$ ، $z_B=\sqrt{3}+i$ و $z_C=\sqrt{3}-i$

نضع : $L=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

أ) أكتب $L$ على الشكل الآسي .

ب)أثبت أن : $z_A-z_B=L\left(z_C-z_B\right)$ ، ثم استنتج أن $A$ صورة $C$ بتحويل نقطي يطلب تعيينه و تحديد عناصره المميزة .

جـ ) استنتج نوع المثلث $ABC$ ثم احسب مساحته $S$

## التدريب 27

ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

$z=x+iy$ عدد مركب حيث $z\neq 2i$ و $x$ ، $y$ عددان حقيقيان .

نعتبر العدد المركب $L$ حيث . $L=\frac{z+8+4i}{z-2i}$

1) أكتب العدد المركب $L$ على الشكل الجبري .

2) عين و أنشئ $E$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ التي يكون من أجلها $L$ حقيقيا

3 ) عين و انشئ $F$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ التي يكون من أجلها $L$ تخيليا صرفا.



إعداد الأستاذ
حليلات عمار

## التدريب 28

نعتبر المعادلة في $\mathbb{C}$ :

$$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0......(E)$$

1) برهن أن المعادلة $(E)$ تقبل حلا تخيليا صرفا $z_0$ يطلب تعيينه .ثم حل المعادلة $(E)$

2) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$ تعطى النقط:

$A$ ، $B$ و $C$ ذات اللواحق $i$ ، $2+3i$ ، $2-3i$ على الترتيب .

أ)ليكن $r$ الدوران الذي مركزه النقطة $B$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ .

- عين لاحقة النقطة $A'$ صورة $A$ بالدوران $r$

ب) برهن أن النقط $A'$ ، $B$ و $C$ تقع على استقامة واحدة ثم عين الكتابة المركبة للتحاكي ذو المركز $B$ و الذي يحول النقطة $C$ إلى $A'$

## التدريب 29

I) نعتبر في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية :

$$z^3-12z^2+48z-128=0.........(E)$$

أ- أوجد العددين الحقيقيين $\alpha$ و $\beta$ بحيث : $z^3-12z^2+48z-128=(z-8)(z^2+\alpha z+\beta)$

ب-حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $(E)$

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$نعتبر النقط $A$ ، $B$و $C$ التي لواحقها على الترتيب الأعداد المركبة $a$، $b$ ، $c$ بحيث :

$$a=2-2i\sqrt{3} \text{ ، } b=2+2i\sqrt{3} \text{ ، } c=8$$

أ/ $d$ عدد مركب حيث : $d=\frac{a-c}{b-c}$

- اكتب العدد المركب $d$ على الشكل الجبري ثم حدد طويلته وعمدته مستنتجا نوع المثلث $ABC$

ب/ أوجد إحداثيي النقطة $G$ مرجح الجملة : $\{(A;|a|),(B;|b|),(C;|c|)\}$

ج/ حدد المجموعة $(F)$ مجموعة النقط من المستوي بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$

## التدريب 30

**(من بكالوريا شعبة علوم الجزائر دورة 1995)**

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$

ليكن كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب $z$ حيث أن :

$$P(z)=z^3-\left(1+i\sqrt{2}\right)z^2+\left(1+i\sqrt{2}\right)z-i\sqrt{2}$$

1/ أ- بيّن أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا $z_0$ يطلب تعيينه .

ب- عين عددين حقيقيين $a$ و $b$ حتى يكون من أجل كل عدد مركب $z$ ،

$$P(z)=(z-z_0)(z^2+az+b)$$

ج- حل عندئذ في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$ ، ثم اكتب الحلول على الشكل الأسي

2/ نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ ذات اللواحق $a=i\sqrt{2}$ ، $b=\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $c=\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

أ- عين لاحقة النقطة $G$ مرجح النقط $A$ ، $B$ و $C$ المرفقة بالمعاملات $(-3)$ ، $\left(1+\sqrt{6}\right)$ و $\left(1-\sqrt{6}\right)$ على الترتيب

ب- بيّن أن النقطة $G$ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$

## التدريب 31

المستوي المركب منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ .

1/ من أجل كل عدد مركب $z$ نضع : $P(z)=z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i$

أ) بيّن أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرف يطلب تعيينه

ب)حل عندئذ في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

2/ $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ نقط لواحقها : $z_A=i$ ، $z_B=2+3i$ ، $z_C=\overline{z_B}$ ، $z_D=1+\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

أ) اكتب العدد المركب $a=\dfrac{z_D-z_B}{z_A-z_B}$ على الشكل الآسي و ماذا تستنتج ؟

ب) اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر $T$ الذي مركزه $B$ ويحول $A$ إلى $D$ ومحددا نسبته وزاويته.

3/ عيّن $z_G$ لاحقة النقطة $G$ مرجح الجملة $\{(A;3),(B;-1),(C;-1)\}$

4/ عيّن مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ بحيث : $z=z_G+k\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ حيث $k\in\mathbb{R}$

## التدريب 32

1. أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+2=0$

ب) استنتج حلول المعادلة : $(-iz+3i+3)^2-2(-iz+3i+3)+2=0$

2.في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ .

نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ صور الأعداد المركبة : $z_A=1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=2z_A$

أ) برهن أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ تنتمي إلى دائرة واحدة مركزها النقطة $\omega$ ذات اللاحقة $z_\omega=3$

ب)اكتب على الشكل الآسي العدد المركب $\dfrac{z_C-z_\omega}{z_A-z_\omega}$

-استنتج أن $C$ هي صورة النقطة $A$ بتحويل نقطي $R$ يطلب تعيينه بدقة مع ذكر العناصر المميزة له

جـ) لتكن $D$ صورة النقطة $O$ بالانسحاب الذي شعاعه $2\overrightarrow{\omega C}$ و لتكن النقطة $B'$ صورة النقطة $B$ بالتحويل $R$ .- عيّن لاحقتي النقطتين $D$ و $B'$ ، ثم تحقق أن الشعاعين $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{\omega B'}$ متعامدان

## التدريب 33

المستوي المركب منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ .

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

2/ $A$ ، $B$ نقطتان من المستوي لاحقتاهما $a=4\sqrt{3}-4i$ و $b=4\sqrt{3}+4i$ على الترتيب .

أ) أكتب كلا من $a$ و $b$ على الشكل الآسي .

ب) احسب الأطوال $OA$ ، $OB$ و $AB$ ثم استنتج طبيعة المثلث $OAB$



إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

3/ $C$النقطة ذات اللاحقة $c=-\sqrt{3}+i$ و $D$صورتها بالدوران الذي مركزه $O$ و زاويته $-\frac{\pi}{3}$ ،
عين $d$ لاحقة النقطة $D$ .
4/ لتكن $G$ مرجح الجملة $\{(O;-1),(D;1),(B;1)\}$
أ) تحقق أن $G$ موجودة و أن لاحقتها $g=4\sqrt{3}+6i$ ثم علم النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ و $G$
ب) احسب العدد المركب $\frac{g-c}{d-c}$ ثم استنتج أن النقط $C$ ، $D$ ، $G$ في استقامية
جـ) بيّن أن الرباعي $OBGD$ متوازي أضلاع د) ما هي طبيعة المثلث $AGC$ ؟

## التدريب 34

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$
1/ أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$
نضع : $P(z)=z^3-2\left(\sqrt{3}+i\right)z^2+4\left(1+i\sqrt{3}\right)z-8i$
ب-بيّن أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا $z_0$ يطلب تعيينه .
ج- حل في مجموعة الأعداد المركبة$\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$: ثم اكتب الحلول على الشكل الأسي
2/ النقط $A$ ، $B$ و $C$ ذات اللواحق $z_A=2i$ ، $z_B=\sqrt{3}+i$ و $z_C=\sqrt{3}-i$ على الترتيب
.
أ- بيّن أن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$
ب- عيّن قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AC}\right)$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $OABC$ .
3- أ) بيّن انه يوجد تشابه مباشر $S$ يحول $A$ إلى النقطة $D$ذات اللاحقة $z_D=-3+i$ و يحول $B$
إلى النقطة $E$ ذات اللاحقة $z_E=-1+\left(2\sqrt{3}+1\right)i$ يطلب تعيين عبارته المركبة وعناصره
المميزة . ب) عين طبيعة التحويل $S\circ S$
جـ) نضع : $S^{(n)}=\underbrace{S\circ S\circ.......\circ S}_{n\text{مرة}}$ -عيّن الأعداد الطبيعية $n$ حتى يكون $S^{(n)}$ تحاكي .

## التدريب 35

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$
وحدة الطول $1cm$
1- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $\bar{z}-3iz-3+6i=0$ ، $\bar{z}$ هو مرافق $z$
2- نعتبر النقطة $A$ ذات اللاحقة $4-2i$
عيّن الشكل الجبري للاحقة النقطة $B$ بحيث يكون المثلث $OAB$ متقايس الأضلاع
و ذا اتجاه مباشر
3.لتكن $D$ النقطة ذات اللاحقة $2i$ .
أ) مثل المجموعة $(T)$ للنقط $M$ ذات اللواحق $z$ المختلفة عن $2i$ ، بحيث :

$$\arg\left(z-2i\right)=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad ,k\in\mathbb{Z}$$

ب) مثل المجموعة $(\Gamma)$ للنقط $M$ ذات اللواحق $z$ بحيث : $z = 2i + 2e^{i\theta} \quad , \theta \in \mathbb{R}$

4-. بكل نقطة $M$ لاحقتها $z$ $(z \neq -2)$ نرفق $M'$ ذات اللاحقة : $z' = \frac{\overline{z} - 1}{z + 2}$

عيّن مجموعة النقط $M$ ، بحيث يكون $|z'| = 1$

## التدريب 36

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

وحدة الرسم : $4cm$

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$

2/ النقط $A$ ، $B$ و $M$ ذات اللواحق $z_A = i$ ، $z_B = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ و $z_M = \overline{z_B}$ على الترتيب

. أ) اكتب $z_A$ ، $z_B$ و $z_M$ على الشكل الآسي .

ب) بيّن أن $z_M^{1431}$ تخيلي صرف

3/ أ) عيّن الكتابة المركبة للدوران $r$ الذي مركزه $O$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

ب) أثبت أن لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $B$ بالدوران $r$ هي : $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

ج) علم النقط $A$ ، $B$ و $C$

4/ لتكن $D$ مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2),(B;-1),(C;2)\}$

أ) عيّن $z_D$ لاحقة النقطة $D$ . علم النقطة $D$

ب)أثبت أنّ النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

5/ أ)عيّن لاحقة النقطة $E$ صورة النقطة $D$ بالتحاكي $h$ الذي مركزه $A$ و نسبته 2

ب)اكتب العدد $Z = \frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$ على الشكل الآسي ثم استنتج طبيعة المثلث $CDE$

جـ) استنتج أن النقطة $D$ صورة النقطة $E$ بتحويل نقطي يطلب تعيينه و تحديد عناصره المميزة

## التدريب 37

**(*Bac polynésie 2009*)**

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ و $E$ التي لواحقها على الترتيب :

$z_A = 2i$ ، $z_B = 2$ ، $z_C = 4 + 6i$ ، $z_D = -1 + i$ و $z_E = -3 + 3i$

1) أ- علم النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ و $E$ على أن يتم إكمال الشكل خلال الأسئلة .

ب- عيّن طبيعة المثلث $ABC$ .

2) ليكن $S$ التشابه المباشر الذي يحول $A$ إلى $D$ و يحول $B$ إلى $A$ .

أ- أعط الكتابة المركبة للتشابه $S$ .

ب- عيّن العناصر المميزة ( الزاوية ، النسبة والمركز $\Omega$ ) للتشابه $S$

د- استنتج طبيعة المثلث $DAE$.

3) نسمي $(\Gamma_1)$ الدائرة التي قطرها $[AB]$ و $(\Gamma_2)$ الدائرة التي قطرها $[AD]$.

ولتكن $M$ النقطة الثانية لتقاطع الدائرة $(\Gamma_1)$ و المستقيم $(BC)$ ، ولتكن $N$ النقطة الثانية لتقاطع الدائرة $(\Gamma_2)$ و المستقيم $(AE)$ .

أ- عين صورة النقطة $M$ بالتشابه $S$ .

ب-استنتج طبيعة المثلث $\Omega MN$ .

جـ - بيّن أن : $MB \times NE = MC \times NA$

## التدريب 38

(*Bac polynésie 2010*)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

**الجزء 1** $z$ عدد مركب بحيث $z=a+ib$ حيث $a$ و $b$ عددين حقيقيين ونرمز للمرافق $\overline{z}$ حيث $\overline{z}=a-ib$

1-برهن أنه من أجل كل عددين مركبين $z$ و $z'$ ، $\overline{z \times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$

2- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم وكل عدد مركب $z$ ، $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$

**الجزء 2** نعتبر المعادلة $z^4=-4$ : $(E)$ حيث $z$ عدد مركب .

1- بيّن أنه إذا كان العدد المركب $z$ حل للمعادلة $(E)$ فإن العددين $-z$ و $\overline{z}$ حلين أيضا للمعادلة $(E)$

2- نعتبر العدد المركب $z_0=1+i$

أ) اكتب العدد $z_0$ على الشكل الأسي . ب) تحقق أن $z_0$ حل للمعادلة $(E)$

3- استنتج ثلاثة حلول أخرى للمعادلة $(E)$ .

**الجزء 3** . لتكن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ ذات اللواحق على الترتيب : $z_A=1+i$ ، $z_B=-1+i$ ، $z_C=-1-i$ و $z_D=1-i$ .

ليكن $r$ الدوران الذي مركزه $C$ وزاويته $\frac{-\pi}{3}$. ونسمي $E$ صورة النقطة $B$ بالدوران $r$ و $F$ صورة $D$ بالدوران $r$

1.عيّن الكتابة المركبة للدوران $r$

2. أ) عين $z_E$ و $z_F$ لاحقتي النقطتين $E$ و $F$ على الترتيب .

ب) بيّن أن العدد $\dfrac{z_A-z_E}{z_A-z_F}$ حقيقي . ماذا تستنتج بالنسبة للنقط $A$ ، $E$ و $F$ ؟

## التدريب 39

/1 حل في $\mathbb{C}^2$ الجملة التالية:
$$\begin{cases} iz_1+(1-i)z_2=-4-3i \\ (1+i)z_1+2iz_2=13+9i \end{cases}$$

/2 نسمي $A$ و $B$ صور الحلول $z_1$ و $z_2$ على الترتيب في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ونسمي $C$ صورة العدد $z$ حل المعادلة التالية:

$(3-i)\overline{z}+5-i=6+2i$ - عيّن لاحقة النقطة $C$



إعداد الأستاذ
حليلات عمار

3/ $\omega$ نقطة من حامل محور التراتيب و $r$ الدوران الذي مركزه $\omega$ و يحوّل $A$ إلى $B$ . .

–عيّن مركز و زاوية الدوران $r$ .

4/اكتب العدد المركب : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$

5/عيّن لاحقة $G$ مركز ثقل المثلث $ABC$.

6/ عين لاحقة النقطة $D$ حتى يكون الرباعي $ACBD$ مربع

7/ عيّن و أنشئ $(\Gamma_1)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \frac{3}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$

8/ عيّن و أنشئ $(\Gamma_2)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث : $MA^2 + MB^2 = 40$

## التدريب 40

1/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2i\overline{z} = 0$ .......(1)

2/ في المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

نسمي $O$ ، $A$ ، $B$ ، $C$ صور حلول المعادلة (1) حيث $A$ صورة العدد المركب التخيلي الصرف و $B$ صورة العدد المركب الذي جزؤه الحقيقي موجب .

$T$ تحويل نقطي في المستوي يحول $M(z)$ إلى $M'(z)$ حيث : $z' = \alpha z + \beta$

أ ـ عيّن $\alpha$ و $\beta$ علما أن $T(A) = A$ و $T(B) = C$.

ب ـ ما هي طبيعة التحويل مع تعيين عناصره المميّزة

جـ - اوجد لاحقة النقطة $D$ حتى يكون الرباعي $ABCD$ معين .

## التدريب 41

ليكن العدد المركب : $\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

1. أ) احسب $\alpha^2$ ثم اكتب $\alpha^2$ على الشكل المثلثي .

ب) استنتج الطويلة وعمدة للعدد $\alpha$ .

2.احسب كلا من $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3. احسب كلا من $\alpha^{2011}$ و $\alpha^{1432}$ و بيّن أن : $\alpha^{12k}$ عدد حقيقي

4 . المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

- عيّن مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق : $\left|\frac{z}{z-1}\right| = |\alpha|$



إعداد الأستاذ
حليلات عمار

## التدريب 42

(*Bac polynésie 2002*)

1/ $z_1$ و $z_2$ عددان مركبان ، حل جملة المعادلتين التالية : $\begin{cases} z_1\sqrt{3}-z_2=-2 \\ z_1-z_2\sqrt{3}=-2i \end{cases}$

2/ ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ( الوحدة $4cm$)

نعتبر النقطتين $A$ ، $B$ لواحقهما على الترتيب : $z_A=-\sqrt{3}+i$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$

أ) اكتب $z_A$ و $z_B$ على الشكل الأسي ثم مثل $A$ ، $B$.

ب) احسب الطويلة وعمدة للعدد $\frac{z_A}{z_B}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $ABO$ وقيس للزاوية $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$

3/ عين لاحقة النقطة $C$ حتى يكون الرباعي $ACBO$ معين ثم مثل النقطة $C$ وعين مساحة المثلث $ABC$ بـ $cm^2$

4/ $f$ التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M$ ذات اللاحقة $z$ ، النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ حيث : $z'=e^{-i\frac{\pi}{6}}.z$

أ) تعرف على طبيعة التحويل وعيّن عناصره المميزة

ب) عيّن ، على الشكل الأسي ، لواحق النقط $A'$ ، $B'$ و $C'$ صور النقط $A$ ، $B$ و $C$ بالتحويل $f$

جـ) ما هي مساحة المثلث $A'B'C'$ ؟

## التدريب 43

(من بكالوريا علوم تجريبية الجزائر دورة 2008)

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+2=0$

نرمز للحلين بـ $z_1$ و $z_2$ حيث $z_1$ هو الحل ذي الجزء التخيلي السالب

- بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2- المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ . لتكن $A$ ، $B$ و $C$ نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب $-1+i$ ، $z_1$ و $z_2$ .

ليكن $Z$ العدد المركب حيث : $Z=\frac{z_2+1-i}{z_1+1-i}$

أ) انطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ومن الخاصية $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$

برهن أن : $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ وأن $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ حيث $\theta$ و $\theta_1$ و $\theta_2$ أعداد حقيقية

ب) أكتب $Z$ على الشكل الآسي

ج) أكتب $Z$ على الشكل المثلثي واستنتج أن النقطة $C$ هي صورة النقطة $B$ بتشابه مباشر مركزه $A$ ، يطلب تعيين زاويته و مركزه .

## التدريب 44

(من بكالوريا علوم تجريبية الجزائر دورة 2008)

1/أ) أوجد الجذريين التربيعيين للعدد المركب : $7+24i$

ب) استنتج العددين المركبين $z_1$ و $z_2$ حلي المعادلة : $\left(z+\frac{i}{2}\right)^2-\frac{7+24i}{4}=0$

2/ نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقطتين ، $A$ و $B$ اللتين لاحقتاهما $z_A$ و $z_B$ على الترتيب حيث : $z_A=2+i$ و $z_B=-2-2i$

- عين $z_\omega$ لاحقة النقطة $\omega$ مركز الدائرة $(\Gamma)$ ذات القطر $[AB]$ .

3/ لتكن $C$ النقطة ذات اللاحقة $z_C$ حيث $z_C=\frac{4-i}{1+i}$

- اكتب $z_C$ على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة $C$ تنتمي إلى الدائرة $(\Gamma)$

4/ أ- برهن أن عبارة التشابه المباشر $S$ الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته $k$ $(k\succ 0)$ وزاويته $\theta$ والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$

ب/ عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل $S$ المعرف بـ : $z'+\frac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\frac{1}{2}i\right)$

## التدريب 45

(*d'après Bac Polynésie 2008*)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+13=0$
2. في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، نعتبر كثير الحدود :

$$P(z)=z^3-2(3+2i)z^2+(13+24i)z-52i$$

أ- بيّن أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا $z_0$ يطلب تعيينه .

ب- حل عندئذ المعادلة $P(z)=0$

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ .

نعتبر النقاط $A$ ، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب : $a=3-2i$ ، $b=3+2i$ ، $c=4i$

1- علم النقط $A$ ، $B$ و $C$

2- بيّن أن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع.

3- عيّن لاحقة النقطة $\Omega$ مركز ثقل الرباعي $OABC$ .

4.عين ثم أرسم مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$

5. لتكن $M$ نقطة من المستقيم $(AB)$ .

نرمز بـ $\beta$ إلى الجزء التخيلي للاحقة النقطة $M$ و لتكن $N$ صورة النقطة $M$ بالدوران الذي مركزه $\Omega$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ . أ- بيّن أن لاحقة النقطة $N$ هي : $z_N=\frac{5}{2}-\beta+\frac{5}{2}i$

ب- كيف يمكن اختيار $\beta$ حتى تنتمي النقطة $N$ إلى المستقيم $(BC)$ ؟



إعداد الأستاذ
حليلات عمار

## التدريب 46

( بكالوريا علوم الجزائر دورة 2003)

- في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، نعتبر كثير الحدود :

$$P(z)=z^3-(2-3i)z^2+9z-18+27i$$

1- أ) بين أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلين مترافقين يطلب تعيينهما

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$

ج) اكتب الحلين المترافقين على الشكل الأسي

2- في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$ تعطى النقط:

$A$ ، $B$ و $C$ ذات اللواحق $z_A=3i$ ، $z_B=-3i$ ، $z_C=2-3i$ على الترتيب

أ) عين زاوية ونسبة التشابه المباشر الذي مركزه $B$ و يحول النقطة $C$ إلى النقطة $A$

ب) استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

3- أ- عين $z_G$ لاحقة مرجح النقط المثقلة التالية : $(A,1)$ ، $(B,2)$ ، $(C,-2)$

ب- عين مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث : $MA^2+2MB^2-2MC^2=25$

## التدريب 47

(من بكالوريا علوم الجزائر دورة سيبتمبر2001)

1- اوجد الجذريين التربيعيين للعدد المركب : $-6+6\sqrt{3}\,i$

2- استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة : $\left(z+\frac{3\sqrt{3}+i}{4}\right)^2=\frac{-6+6\sqrt{3}\,i}{16}$

**3-** $z_1$ و $z_2$ عددان مركبان حيث $z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_2=-\sqrt{3}-i$

اكتب كلا من $z_1$ و $z_2$ على شكله الأسي .

4- في المستوي المزود بالمعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$ . نعتبر العدد المركب $L=-2(\sin\theta+i\cos\theta)$

حيث $\theta$ عدد حقيقي ، ولتكن النقط $A$ ، $B$ و $M$ صور الأعداد المركبة $z_1$ ، $z_2$ ، $L$ على الترتيب . أ- احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $L$ بدلالة $\theta$

ب- نضع : $\theta=\frac{2\pi}{3}$ - اثبت أن المثلث $ABM$ قائم .

## التدريب 48

(*Bac Amérique du nord 2006*)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

حيث $\|\vec{u}\|=2cm$ ولتكن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ذات اللواحق :

$$z_A=2 \text{ ، } z_B=1+i\sqrt{3} \text{ ، } z_C=1-i\sqrt{3}$$

<u>**الجزء الأول**</u> :1) أ- اكتب $z_B$ و $z_C$ على الشكل الآسي .

ب- علم النقط $A$ ، $B$ و $C$ في المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$ .

2) عيّن نوع الرباعي $OBAC$

3) عيّن ومثّل المجموعة $(D)$ للنقط $M$ حيث : $|z|=|z-2|$

**الجزء الثاني** :من أجل نقطة $M$ من المستوي لاحقتها $z$ $(z \neq z_A)$ نرفق النقطة $M'$ لاحقتها $z'$

المعرفة بـ: $z' = \frac{-4}{z-2}$

1) أ-حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلــة $z = \frac{-4}{z-2}$

ب- استنتج النقط المرفقة بالنقطتين $B$ و $C$

جـ - عيّن و مثل النقطة $G'$ المرفقة بالنقطة $G$ مركز ثقل المثلث $OAB$

1) بإستعمال تعريف طويلة عدد مركب $z$ كالتالي : $|z|^2 = z.\bar{z}$ حيث $\bar{z}$ يرمز لمرافق $z$

أ- برهن أنه من أجل كل عددين مركبين $z_1$ و $z_2$ فإن: $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$

ومن أجل كل عدد مركب $z$ غير معدوم فإن : $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

ب- برهن أنه من أجل كل عدد مركب $z$ يختلف عن 2 فإن : $|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$

جـ - لتكن $M$نقطة من المجموعة $(D)$ المعرفة في الجزء الأول.، برهن أن النقطة $M'$ المرفقة بالنقطة $M$ تنتمي إلى دائرة$(\Gamma)$ يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها . ارسم $(\Gamma)$

## التدريب 49

1/ نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود :

$$P(z) = z^3 - (1-2\sin\alpha)z^2 + (1-2\sin\alpha)z - 1$$

حيث $z$ هو المتغير و $\alpha$وسيط حقيقي من المجال $[0;\pi]$

أ-بين أن $P(z)$ يكتب على الشكل : $P(z) = (z-1)\left(z^2 + (2\sin\alpha)z + 1\right)$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة :$P(z) = 0$ .

2/.ليكن العددان المركبان : $z_1 = -\sin\alpha + i\cos\alpha$ ، $z_1 = -\sin\alpha - i\cos\alpha$

- عيّن الشكل المثلثي ثم الآسي لكل من $z_1$ و $z_2$ .

3/. نضع فيما يلي : $\alpha = \frac{\pi}{6}$

علم النقط $A$ ، $B$ و$C$ التي لواحقها على الترتيب : 1 ، $z_1$ و $z_2$ في مستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ .

أ- بيّن أنها تنتمي إلى دائرة واحدة مركزها $O$ يطلب تعيين نصف قطرها.

ب- عين الطويلة و عمدة للعدد المركب : $\frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}$ ج- استنتج طبيعة المثلث $ABC$

## التدريب 50

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2z + 2 = 0$

نرمز للحلين بـ $z_1$ و $z_2$ حيث $z_1$ هو الحل ذي الجزء التخيلي الموجب .

2- أ- اكتب الحلين $z_1$ و $z_2$ على الشكل الأسي .

ب- برهن أنه لكل عدد طبيعي $n$ يكون : $\frac{z_1^n - z_2^n}{i} = 2^{\frac{n+2}{2}}.\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

3- ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ عين مجموعة النقط $M$ من المستوي التي لاحقتها $z$ بحيث يكون : $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = 4$

## التدريب 51

نعتبر كثير الحدود للمتغيّر المركب $z$ المعرّف بـ :

$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$ .

1. أ - بيّن أنه إذا كان $z$ حلا للمعادلة $P(z) = 0$ فإن $\overline{z}$ حلا لها أيضا

**ب -** احسب $P(i\sqrt{3})$

2. استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول $z$ ، $P(z) = 0$ .

**.** المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

**أ -** مثّل النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ ذات اللواحق على الترتيب $z_A = i\sqrt{3}$ ، $z_B = -i\sqrt{3}$ ، $z_C = 3+2i\sqrt{3}$ و $z_D = \overline{z_C}$

**ب -** أثبت أنّ النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ تنتمي إلى نفس الدائرة.

**3.** لتكن النقطة $E$ نظيرة $D$ بالنسبة إلى المبدأ $O$ .

أ- بيّن أن $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ب - استنتج أن النقطة $C$ صورة النقطة $E$ بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة

جـ -استنتج طبيعة المثلث $BEC$ .

## التدريب 52

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2z + 2 = 0$

2. $K$ ، $L$ ، $M$ نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب :

$z_K = 1+i$ ، $z_L = 1-i$ ، $z_M = -i\sqrt{3}$

3. أ/ $N$ نظيرة النقطة $M$ بالنسبة إلى $L$ . تحقق أن لاحقة النقطة $N$ هي : $2+i(\sqrt{3}-2)$

ب/ الدوران الذي مركزه $O$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول النقطة $M$ إلى النقطة $A$ و النقطة $N$ إلى النقطة $C$ . أوجد اللواحق $z_A$ و $z_C$ للنقط $A$ و $C$

ج) الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w}$ ذو اللاحقة $2i$ يحول النقطة $M$ إلى $D$ و النقطة $N$ إلى النقطة $B$ . أوجد اللواحق $z_D$ و $z_B$ للنقط $D$ و $B$.

4. أ/ أثبت أن النقطة $K$ منتصف القطعتين $[DB]$ و $[AC]$

ب/ أثبت أن : $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$ ثم استنتج نوع الرباعي $ABCD$

## التدريب 53

*(Bac France métropolitaine 2002)*

المستوي المركب منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ .

1. ا-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

ب-نضع : $a=\sqrt{3}+i$ ، $b=\sqrt{3}-i$

اكتب $a$ ، $b$ على الشكل الأسي ، ثم علم النقطتين $A$ و $B$ ذات اللاحقتين $a$ و $b$ على الترتيب .

2. ليكن $r$ الدوران الذي مركزه المبدأ $O$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$ .

أ- احسب $a'$ لاحقة النقطة $A'$ صورة النقطة $A$ بالدوران $r$

ب-اكتب $a'$ على الشكل الجبري ثم علم النقطة $A'$ في المعلم السابق .

ج- ليكن $h$ التحاكي الذي مركزه $O$ و نسبته $\left(\frac{-3}{2}\right)$ .

- احسب $b'$ لاحقة النقطة $B'$ صورة النقطة $B$ بالتحاكي $h$ ثم علم النقطة $B'$ في المعلم السابق.

3. لتكن $\Gamma$ الدائرة المحيطة بالمثلث $OA'B'$ وليكن $q$ نصف قطرها ومركزها $C$

و نرمز بـ $c$ إلى لاحقة $C$

أ- اثبت صحة المساويات التالية : $c\bar{c}=q^2$ /1

$\left(c-2i\right)\left(\bar{c}+2i\right)=q^2$ /2

$\left(c+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\bar{c}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=q^2$ /3

ب- استنتج أن : $c-\bar{c}=2i$ و $c+\bar{c}=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ .   ج- استنتج لاحقة النقطة $C$ و قيمة $q$

---

## التدريب 54

1– حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$

نرمز لحلي هذه المعادلة بـ : $z_1$ و $z_2$ حيث $z_1$ هو الحل الذي جزؤه التخيلي موجب .

2-أ) حدد الطويلة وعمدة لكل من : $z_1$ و $z_2$

ب) أعط الشكل الآسي للعدد المركب : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$

3- في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ نعتبر النقط $M_1$ ، $M_2$ و $A$ ذات اللواحق على الترتيب : $\sqrt{2}\left(1+i\right)$ ، $\sqrt{2}\left(1-i\right)$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

أ) أوجد $z_3$ لاحقة النقطة $M_3$ صورة $M_2$ بالتحاكي $H$ ذو المركز $A$ و النسبة $(-3)$

ب)أوجد $z_4$ لاحقة النقطة $M_4$ صورة $M_2$ بالدوران $R$ ذو المركز $O$ و الزاوية $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

ج) أحسب :عمدة $\left(\frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}\right)$ ، فسر هندسيا هذه النتيجة .و استنتج طبيعة المثلث $M_1M_3M_4$ ؟

## التدريب 55

(*Bac liban2004*)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-2i)(z^2-2z+2)=0$

( تعطى الحلول على الشكلين الجبري و الأسى )

2- تعطى النقط : **A** ، **B** لواحقها على الترتيب $z_A=1+i$ , $z_B=2i$ ، من أجل كل عدد مركب **z** يختلف عن $z_A$ نعرف العدد المركب : $z'=\dfrac{z-2i}{z-1-i}$

أ/ لتكن المجموعة $(E)$ مجموعة النقط **M** ذات اللاحقة **z** بحيث يكون العدد $z'$ تخيلي صرف

* أثبت أن $B\in(E)$ * حدد و أنشئ المجموعة $(E)$ .

ب/ لتكن المجموعة $(F)$ مجموعة النقط **M** ذات اللاحقة **z** بحيث يكون $|z'|=1$ :

- حدد و أنشئ المجموعة $(F)$

3- ليكن $R$ الدوران الذي مركزه $\Omega\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ / عيّن لاحقة النقطة $B'$ صورة $B$ بالدوران $R$ و لاحقة النقطة $I'$ صورة النقطة $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ بالدوران $R$ .

ب/ ماهي صور $(E)$ و $(F)$ بالدوران $R$ .

## التدريب 56

( **بكالوريا شعبة علوم دقيقة الجزائر دورة 2009**)

$\alpha$ عدد حقيقي من المجال $[0,\pi]$

1) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول $z$ التالية :

$$z^2-2z\cos\alpha+1=0........(1)$$

ب) حدّد الطويلة و عمدة لكل من الحلين.

2) أ) استنتج حلول المعادلة ذات المجهول $z$ التالية :

$$z^4-2z^2\cos\alpha+1=0........(2) \quad \text{(يمكنك وضع } z^2=l\text{)}$$

ب) ما طبيعة الرباعي المحدب $ABCD$ حيث $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ هي صور العداد المركبة ذات الطويلة 1 و عمداتها على التريب هي: $\frac{\alpha}{2}$ ، $\pi-\frac{\alpha}{2}$ ، $\pi+\frac{\alpha}{2}$ و $-\frac{\alpha}{2}$ .

جـ ) من اجل أي قيمة للعدد $\alpha$ يكون الرباعي $ABCD$ مربعا؟

3) نضع $\alpha=\frac{\pi}{2}$

-ما طبيعة التحويل النقطي الذي مركزه $A$ و يحول النقطة $B$ إلى النقطة $C$ ؟ حدد عناصره المميزة.

## التدريب 57

(من بكالوريا رياضيات الجزائر دورة 2008)

في المجموعة $\mathbb{C}$ ، نعتبر كثير الحدود :

$$P(z)=2z^4-2iz^3-z^2-2iz+2$$

1) بيّن أنه إذا كان $a$ جذرا لكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{a}$ جذرا له أيضا .

2) تحقق أن $1+i$ و $-1+i$ جذرين لكثير الحدود $P(z)$

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ ثم اكتب الحلول على الشكل الأسي .

4) في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ . نعتبر النقاط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ التي لواحقها على الترتيب : $1+i$ ، $-1+i$ ، $\frac{-m}{2}-\frac{m}{2}i$ و $\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i$

حيث $m$ عدد حقيقي ، عيّن $m$ حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا .

## التدريب 58

*(Bac S Nouvelle-Calédonie mars 2009)*

المستوي المركب منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ الوحدة $1cm$

نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=1$ ، $z_B=3+4i$ ، $z_C=2\sqrt{3}+i\left(-2-\sqrt{3}\right)$ و $z_D=-2\sqrt{3}+i\left(-2+\sqrt{3}\right)$

الهدف من هذا التمرين هو اقتراح إنشاء هندسي للنقطتين $C$ و $D$.

1. أ) برهن أن النقطة $D$ هي صورة النقطة $B$ بالدوران الذي مركزه $A$ و زاويته $\frac{2\pi}{3}$

ب) برهن أن النقطتين $B$ ، $D$ من نفس الدائرة $\Gamma$ التي مركزها $A$ يطلب تعيين نصف قطرها .

2. نسمي النقطة $F$ صورة النقطة $A$ بالتحاكي الذي مركزه $B$ و نسبته $\frac{3}{2}$

أ) بيّن أن اللاحقة $z_F$ للنقطة $F$ هي : $-2i$

ب) بيّن أن النقطة $F$ منتصف القطعة $[CD]$ .

جـ) اكتب $\frac{z_C-z_F}{z_A-z_F}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الآسي

د) استنتج من الأسئلة السابقة أن المستقيم $(AF)$ محور للقطعة $[CD]$ .

3. اقترح خطوات لإنشاء النقطتين $C$ و $D$ انطلاقا من النقط : $A$ ، $B$ و $F$ و أنجز شكلا.

## التدريب 59

1-عيّن العددين المركبين $z_1$ و $z_2$ بحيث : $\begin{cases} iz_1+(1-i)z_2=-2-i \\ (1+2i)\overline{z_1}+3i\overline{z_2}=2+3i \end{cases}$

2) أ- $a$ و $b$ عددان مركبان بحيث : $a=\left(\frac{z_1}{|z_1|}\right)^2$ و $b=\left(\frac{z_2}{|z_2|}\right)^2$ احسب العدد $L=\frac{a+b}{1+ab}$

ب) $a$ و $b$ عددان مركبان كيفيان بحيث : $|a|=|b|=1$ برهن أن العدد $L=\dfrac{a+b}{1+ab}$ حقيقي
3) $A$ ، $B$ و $C$ نقط من المستوي لواحقها على الترتيب 1 ، $z_B=1+2i$ و $z_C=1-i$.
أوجد إحداثيي النقطة $G$ مركز ثقل النقط $A$ ، $B$ و $C$ .
4) $T$ التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M$ النقطة $M'$ حيث :
$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ .
أ ـ بيّن أن $\overrightarrow{GM'}=-2\overrightarrow{GM}$ .
ب ـ استنتج طبيعة التحويل $T$ وعناصره المميّزة . ج ـ أكتب العبارة المركبة للتحويل $T$ .
5) $A'$ ، $B'$ و $C'$ صور النقط $A$ ، $B$ و $C$ على الترتيب بالتحويل $T$ .
- بيّن أن النقط $A'$ ، $B'$ و $C'$ في استقامية

## التدريب 60

حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول $Z$ :
$(Z-2i)(Z^2-2\sqrt{3}Z+4)=0$ .
2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ ذات اللاحقات $Z_A=\sqrt{3}-i$ ؛ $Z_B=\sqrt{3}+i$ ؛ $Z_C=2i$ و $Z_D=-\sqrt{3}-i$ على الترتيب .
أ – علم النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ .
ب – اكتب العدد $\dfrac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي .
- استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .
جـ - تحقق أن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $O$ يطلب تعيين نصف قطرها.
3 ) لنعتبر التحـويل النقطي $S$ الذي يحـول $O$ إلى $A$ و يحول $C$ إلى $D$.
أ – اثبت أن التحويل $S$ هو تشابه مباشر ثم عين عناصره المميزة ( المركز و النسبة و الزاوية ) .
ب – تحقق أن صورة النقطة $B$ بالتشابه $S$ هي النقطة $C$.
4) لتكن النقطة $G$ مرجح النقط $A$ ، $B$ ، $C$ المرفقة بالمعاملات 1، $-1$، 2 على الترتيب.
أ – عين احداثيي النقطة $G$.
ب – بين ان $(\Gamma)$ مجموعة النقط **M** من المستوي التي تحقق $MA^2-MB^2+2MC^2=8$ هي الدائرة التي مركزها $G$ و نصف قطرها 1 .

## التدريب 61

**(*Bac France métropolitaine 2010*)**

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.
نعتبر النقطة $A$ ذات اللاحقة 2 و الدائرة $(C)$ ذات المركز $O$ و التي تشمل $A$
ونعتبر العدد المركب $\alpha=1+i\sqrt{3}$ و $\overline{\alpha}$ يرمز لمرافق العدد المركب $\alpha$
1- أ) برهن أن : $\alpha^2-4\alpha=2\overline{\alpha}-8$
ب) برهن أن النقطتين $B$ و $C$ ذات اللاحقتين $\alpha$ و $\overline{\alpha}$ تنتميان للدائرة $(C)$.

2- لتكن $D$ نقطة من الدائرة $(C)$ لاحقتها $2e^{i\theta}$ حيث $\theta$ عدد حقيقي من المجال $]-\pi;\pi]$

أ) أنشئ النقطة $E$ صورة النقطة $D$ بالدوران $r$ الذي مركزه $O$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$

ب) تحقق أن $E$ لاحقتها $z_E = \alpha e^{i\theta}$

3- نعتبر النقطتين $F$ و $G$ منتصفا القطعتين $[BD]$ و $[CE]$ على الترتيب .

أ) تحقق أن النقطة $F$ لاحقتها $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$

ب) نقبل أن النقطة $G$ لاحقتها $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2}$

- برهن أن : $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$ ( يمكنك استعمال السؤال 1-أ) )

- استنتج أن المثلث $AFG$ متقايس الأضلاع

4- بإستعمال برنامج هندسة حركية ، نخمن وجود موضع للنقطة $D$ المعرفة في السؤال 2 ، بحيث يكون طول الضلع $[AF]$ من المثلث $AFG$ أصغريا .

- نقبل أن $AF^2 = 4 - 3\cos\theta + \sqrt{3}.\sin\theta$ ، تحقق من صحة التخمين

## التدريب 62

1- $z_1$ و $z_2$ عددان مركبا حيث : $z_1 = \sqrt{2}(1-i)$ و $z_2 = \frac{\sqrt{2} + \left(-1+\sqrt{2}\right)i}{1 - z_1}$

أ - اكتب العدد $z_1$ على الشكل المثلثي .

ب- برهن أن $z_2 = -i$

2- المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر. $M$ و $M'$ نقطتان من المستوي لاحقتاهما $z$ و $z'$ على الترتيب . نضع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ و نعتبر التحويل النقطي $S$ الذي يرفق بكل نقطة $M$ النقطة $M'$ حيث :

$$\begin{cases} X' = \sqrt{2}(x + y + 1) \\ y' = \sqrt{2}(-x + y + 1) - 1 \end{cases}$$

أ- أكتب $z'$ بدلالة $z$ .

ب- استنتج الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل $S$

ج- $(\Delta)$ مستقيم ذو المعادلة $x + y + 1 = 0$ ، اكتب معادلة لصورة المستقيم $(\Delta)$ بالتحويل $S$

د- اكتب معادلة لصورة الدائرة $(\gamma)$ التي مركزها $O$ ونصف قطرها 2 بالتحويل $S$

3- أ- اكتب العبارة المركبة للتحويل $S \circ S$ .

ب- برهن أن $S \circ S$ هو تشابه مباشر ثم قارن بين العناصر المميزة للتحويليين $S$ و $S \circ S$

## التدريب 63

**1)** حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $Z$ : $Z^2 + Z + 1 = 0$

**2)** في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O, I, J)$. نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ و $F$ ذات اللواحق $z_A = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ؛ $z_B = \overline{z_A}$ ؛ $z_C = -2$ ؛ $z_D = -2 + 2\sqrt{3}i$ و $z_F = \overline{z_D}$ على الترتيب .

أ- اكتب $z_A$ و $z_B$ الشكل المثلثي ثم علم النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ و $F$ .

ب- مـا طبيعة المثلث $ABC$ ؟



إعداد الأستاذ
حليلات عمار

3) ليكن $R$ الدوران الذي يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث : $Z'+2=e^{-i\frac{\pi}{3}}(Z+2)$

أ – عين مركز و زاوية الدوران $R$

ب – لتكن $E$ صورة $D$ بالدوران $R$ - علم النقطة $E$ ثم بين أن لاحقتها هي $Z_E=1+\sqrt{3}i$.

جـ – اكتب العدد $\frac{Z_F-Z_E}{Z_D-Z_E}$ على الشكل الجبري ثم استنتج أن المستقيمين $(ED)$ و $(EF)$ متعامدان .

4) لكل عدد مركب $Z$ يختلف عن $E$ نرفق العدد المركب $Z'$ حيث $Z'=\frac{Z-Z_C}{Z-Z_E}$.

لتكن $(\Gamma_1)$ مجموعة النقط $M$ ذوات اللواحق $Z$ بحيث يكون $Z'$ عددا تخيليا صرفا.

- عين و أنشئ المجموعة $(\Gamma_1)$ .

5) أ – لتكن $G$ مرجح الجملة $\{(A;|Z_A|);(B;|Z_B|);(C;|Z_C|)\}$ . - حدد $Z_G$ لاحقة النقطة $G$

ب – $(\Gamma_2)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|$

جـ- تحقق ان النقطة $C$ تنتمي الى $(\Gamma_2)$ ثم عين طبيعة المجموعة $(\Gamma_2)$ .

## POINT DE VUE HISTORIQUE

**الهدية**

*Il n'existe pas de réel dont le carré soit strictement négatif. **Pourtant dès le 16ème siècle les algébristes italiens dont le plus célèbre d'entre-eux Jérôme Cardan n'hésitent pas à utiliser le symbole $\sqrt{-a}$ lorsque a est un nombre réel strictement positif pour représenter le résultat de l'extraction impossible de la racine carrée du nombre négatif -a. Ils décrivent en détail les règles de cacul permettant de manipuler ces nouveaux nombres appelés par eux** "NOMBRES IMPOSSIBLES".En 1572 Bombelli montre à l'aide de la formule de Cardan que la racine x=4 de l'équation $x^3-15x-4=0$ peut s'écrire $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=4$**. A l'origine il s'agissait seulement de donner des racines à toutes les équations du second degré. Les résultats obtenus dans l'étude des équations du 3ème degré allaient familiariser les mathématiciens avec ces symboles et mettre en évidence leur rôle comme intermédiaire commode de calcul dans de nombreux cas. Pour ces raisons sommes toutes empiriques, les mathématiciens utilisaient avec une confiance croissante les nombres IMAGINAIRES depuis le début du 17ème siècle. Dès 1629 A.Girard soupçonnait que toute équation de degré n à n racines réelles ou complexes. Ce sont les mathématiciens du 19ème siècle qui ont construit les nombres complexes à partir des quantités connues et qui leur ont donné une "réalité mathématique".     *Extrait de l'encyclopédie Universalis**

**احرص على اغتنام الفترة المتبقية قبل إجراء امتحان شهادة البكالوريا باستغلال وقتك جيدا و تنظيم دراستك وبنفسية مرتفعة وكلك طموح وثقة في الله وأدعوه أن يسهل لك الفهم والحفظ ويفتح بصيرتك و يسدد خطاك ونسأل الله أن يفرحك بالنجاح وينفعك به في الدنيا و الآخرة ويدخل السرور على والديك و أن تكون العطلة الربيعية المقبلة إن شاء الله عطلة جامعية، إنه نعمى المولى ونعمى النصير، آمين**