6 – الأعداد المركبة

الكفاءات المستهدفة

1– إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة .

2– استعمال خواص مرافق عدد مركب.

3– حساب الطويلة و عمدة لعدد مركب .

4– الانتقال من الشكل الجبري إلى المثلثي و العكس.

5– التعبير عن خواص الأشكال الهندسية باستعمال الأعداد المركبة

6– توظيف خواص الطويلة و عمدة لحل المسائل في الأعداد المركبة في الهندسة.

7– توظيف دستور موافر لحل مسائل في الأعداد المركبة في الهندسة.

8– حل معادلة من الدرجة الثانية.

9– حل معادلات يؤول حلها إلى معادلة من الدرجة الثانية.

10– تعيين الكتابة المركبة للتحويلات المألوفة.

11– التعرف على تحويل انطلاقا من كتابته المركبة .

12– توظيف الأعداد المركبة في التحويلات.

أنشطة

النشاط :

نعتبر مجموعة E عناصرها من الشكل $x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان و i عدد حيث $i^2 = -1$ ليكن العددان Z , Z' حيث :

$$Z = 5 + 2i \quad و \quad Z' = 3 - i$$

1– إذا علمت أن عمليتي الجمع و الضرب في E لها نفس خواص عمليتي الجمع والضرب في $\mathbb{R}$، احسب كل من :

بكتابة $(2Z \times Z' \;;\; Z^2; 2Z-3Z' \;;\; 8Z \;;\; Z+Z' \;;\; (Z-Z')^2 \;;\; (2Z+Z')^2$ على الشكل $\frac{1}{Z}$:

$$\frac{1}{Z} = \frac{5-2i}{(5+2i)(5-2i)}$$

عين عددان حقيقيان α β بحيث : $\frac{1}{Z} = \alpha + i\beta$

وبنفس الطريقة عين عددان حقيقيان a و b بحيث: $\frac{1}{Z'} = a + ib$.

3) احسب $(i)^{2008}$ ثم i^n بدلالة n .

4) استنتج طريقة لحساب $(1+i)^{2008}$.

الحل :

1) الحساب :

- $Z + Z' = (5+2i) + (3-i) = (5+3) + (2-1)i = 8 + i$
- $8Z = 8(5+2i) = 40 + 16i$
- $2Z - 3Z' = 2(5+2i) - 3(3-i) = 10 + 4i - 9 + 3i = 1 + 7i$
- $Z^2 = (5+2i)^2 = (5)^2 + 2 \times 5 \times 2i + (2i)^2 = 21 + 20i$
- $Z \,.\, Z' = (5+2i)(3-i) = 15 - 5i + 6i - 2i^2 = 17 + i$
- $(2Z + Z')^2 = \left[2(5+2i) + 3 - i\right]^2 = (10 + 4i + 3 - i)^2$

$$= (13+3i)^2 = (13)^2 + 2 \times 13 \times 3i + (3i)^2$$

$$= 169 + 78i - 9 = 160 + 78i$$

- $(Z - Z')^2 = (5 + 2i - 3 + i)^2 = (2+3i)^2$

$$= (2)^2 + 2.2.3i + (3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$$

2) $$\frac{1}{Z} = \frac{5-2i}{(5+2i)(5-2i)} = \frac{5-2i}{(5)^2 - (2i)^2}$$

و منه : $\frac{1}{Z} = \frac{5-2i}{25+4} = \frac{5}{29} - \frac{2}{29} i$

إذن : $\alpha = \frac{5}{29}$ ، $\beta = \frac{-2}{29}$

$$\frac{1}{Z'} = \frac{1}{3-i} = \frac{3+i}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i}{(3)^2 - (i)^2} = \frac{3+i}{9+1} = \frac{3+i}{10}$$

و منه : $\frac{1}{Z'} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} i$ إذن : $a = \frac{3}{10}$ ، $b = \frac{1}{10}$.

3) – حساب $(i)^{2008}$:

$$(i)^{2008} = (i^2)^{1004} = (-1)^{1004} = 1$$

– حساب i^n : $\qquad (i)^n = \left[(i)^2\right]^{\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}}$

4) استنتاج طريقة لحساب $(1+i)^{2008}$

$$(1+i)^{2008} = \left[(1+i)^2\right]^{1004} = (1+2i+i^2)^{1004} = (1+2i-1)^{1004}$$

$$= (2i)^{1004} = 2^{1004} \cdot (i^2)^{502} = 2^{1004}.(-1)^{502} = 2^{1004}$$

الدرس

1 – تعريف مجموعة الأعداد المركبة :

المستوي مزود بمعلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

– كل نقطة M من المستوي تمثل عدد مركب وعدد مركب وحيد.

وكل عدد مركب يمثل بنقطة و بنقطة وحيدة في المستوي.

– النقطة $J(o ; 1)$ تمثل العدد المركب الذي نرمز له بالرمز i .

– من أجل كل عددان حقيقيان x و y ، يرمز للعدد المركب الممثل

بالنقطة $M(x ; y)$ بالرمز $x + iy$.

– يرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$.

2– الشكل الجبري لعدد مركب :

من أجل كل عددان حقيقيان x و y : الشكل $x + iy$ يسمى الشكل الجبري لعدد مركب Z .

3– تعار يف و مصطلحات :

ليكن $Z = x + iy$ عدد مركب ، x و y عددان حقيقيان

– العدد الحقيقي x يسمى الجزء أو القسم الحقيقي للعدد

المركب Z و نرمز له بالرمز $Re(Z)$ أي : $Re(Z) = x$

– العدد الحقيقي y يسمى الجزء أو القسم التخيلي للعدد المركب Z

ويرمز له بالرمز $Im(Z)$ أي : $Im(Z) = y$.

– النقطة $M(x ; y)$ تسمى صورة العدد المركب Z

و العدد Z يسمى لاحقة النقطة $M(x ; y)$

– من أجل كل عدد حقيقي x, y, x', y' فإن العدد $x + iy$ يساوي

العدد $x' + iy'$ إذا وفقط إذا كان : $x = x'$ و $y = y'$.

– كل عدد حقيقي هو عدد مركب و لدينا :

$Z \in \mathbb{R}$ يكافئ: $\mathrm{Im}(Z) = 0$.

– يكون العدد المركب Z تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان: $\mathrm{Re}(Z) = 0$

– محور الفواصل يدعى المحور الحقيقي و محور التراتيب يدعى المحور التخيلي .

– إذا كان $Z = 0$ فإن Z حقيقي و تخيلي صرف في آن واحد و يمثل بالنقطة $O\,(0\,;\,0)$.

4– الحساب في $\mathbb{C}$:

– المجموع و الجداء في $\mathbb{C}$:

المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعمليتين هما الجمع + و الضرب × معرفتان من أجل كل عددان مركبان $Z'\ Z$ حيث:

$Z = x + iy$ و $Z' = x' + iy'$ كما يلي :

$$Z + Z' = (x + x') + i\,(y + y')$$

$$Z \times Z' = (xx' - yy') + i\,(xy' + x'y)$$

هاتين العمليتين لهما نفس خواص الجمع + و الضرب × في $\mathbb{R}$

– قوى عدد مركب :

القوى الصحيحة لعدد مركب لها نفس خواص القوى الصحيحة لعدد حقيقي ولدينا :

$$i^2 = (0 + 1\,.\,i) \times (0 + 1\,.\,i)$$

$$= (0 - 1) + i\,(0\,.\,1 + 0\,.\,1) = -1$$

وعليه : $i^2 = -1$

أمثلة :

نعتبر العددان المركبان: $Z_1 = 3 + 2i \quad ; \quad Z_2 = -4 + 5i$.

1) احسب كل من $Z_1 + Z_2 \quad , \quad Z_1 \times Z_2$.

2) احسب $Z_1^2\ ;\ Z_2^3$.

الحل :

1) • $Z_1 + Z_2 = (3 - 4) + i\,(2 + 5)$

ومنه : $Z_1 + Z_2 = -1 + 7i$

• $Z_1 \times Z_2 = (3 + 2i)\,(-4 + 5i)$

$$= -12 + 15i - 8i + 10i^2 = -12 + 7i - 10$$

و منه : $Z_1 \times Z_2 = -22 + 7i$

2) $Z_1^2 = (3 + 2i)^2 = (3)^2 + 2(3) \times 2i + (2i)^2$

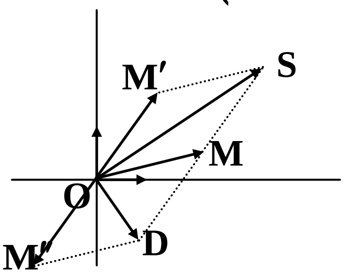
و منه : $Z_1^2 = 9 + 12i - 4$ أي: $Z_1^2 = 5 + 12i$

$$Z_2^3 = (-4 + 5i)^3 = (-4)^3 + 3(-4)^2 \times 5i + 3(-4)(5i)^2 + (5i)^3$$

$$= -64 + 240i + 300 - 125i = 236 + 115i$$

خواص :

إذا كان Z و Z' لاحقتي النقطتين M و M' (أو الشعاعين $\left(\overrightarrow{OM'}\ \overrightarrow{OM}\right)$ على الترتيب فإن :



- $Z + Z'$ هو لاحقة النقطة S
  (أو الشعاع $\overrightarrow{OS}$) حيث:
  $$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$$
- $Z - Z'$ هو لاحقة النقطة D (أو الشعاع $\overrightarrow{OD}$) حيث:
  $$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM''}$$

وعليه إذا كانت A و B نقطتان لاحقتاهما Z_A و Z_B علي الترتيب فإن لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو العدد المركب $Z_{\overrightarrow{AB}}$

حيث : $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$

ولاحقة النقطة I منتصف $[AB]$ هو Z_I حيث $Z_I = \dfrac{Z_A + Z_B}{2}$

– مقلوب عدد مركب :

Z عدد مركب غير معدوم . حيث $Z = x + iy$.

لدينا : $$\frac{1}{Z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

و منه : $$\frac{1}{Z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

وهو الشكل الجبري لمقلوب العدد المركب Z غير المعدوم.

أي x و y غير معدومين معا.

– حاصل قسمة عددين مركبين :

Z و Z' عددان مركبان حيث: $Z' \neq 0$

مع $Z = x + iy$ و $Z' = x' + iy'$

$$\frac{Z}{Z'} = Z \times \frac{1}{Z'} = (x + iy) \times \left(\frac{x'}{x'^2 + y'^2} - i\,\frac{y'}{x'^2 + y'^2}\right)$$

$$= \frac{xx'}{x'^2 + y'^2} - i\,\frac{xy'}{x'^2 + y'^2} + i\,\frac{x'y}{x'^2 + y'^2} + \frac{yy'}{x'^2 + y'^2}$$

$$= \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + i \, \frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}$$

وهو الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{Z}{Z'}$ أي حاصل قسمة العدد المركب Z على العدد المركب غير المعدوم Z' .

5− مرافق عدد مركب :

تعريف :

لكل نقطة M من المستوى ذات اللاحقة $Z = x + iy$ حيث x وy عددان حقيقيان نظيرة بالنسبة لمحور الفواصل هي النقطة M'ذات اللاحقة $x - i\,y$. العدد المركب $x - iy$ يسمى مرافق العدد المركب $x + i\,y$ ونرمز له بالرمز $\bar{Z}$ أي : $\bar{Z} = x - i\,y$

أمثلة :

مرافق العدد المركب: $Z_1 = 1 + i$ هو العدد المركب: $\bar{Z}_1 = 1 - i$

مرافق العدد المركب: $Z_2 = i$ هو العدد المركب: $\bar{Z}_2 = -i$

مرافق العدد المركب: $Z_3 = 8 + 3\,i$ هو العدد المركب:

$\bar{Z}_3 = 8 - 3\,i$

مرافق العدد المركب: $Z_4 = 10$ هو العدد المركب: $\bar{Z}_4 = 10$

أي أن : $\bar{Z}_4 = Z_4$

خواص :

a) x و yعددان حقيقيان . $Z = x + iy$ عدد مركب .

$\bar{Z} = x - iy$ مرافق العدد المركب Z .

1) لدينا : $Z = x + iy$ ومنه : $\bar{\bar{Z}} = x + iy$

وعليه : $\bar{\bar{Z}} = Z$

2) لدينا : $Z + \bar{Z} = 2\,x$ ومنه : $Z + \bar{Z} = 2\,\mathrm{Re}(Z)$

3) $Z - \bar{Z} = 2\,i\,y$ ومنه : $Z - \bar{Z} = 2\,\mathrm{Im}\,(Z)$

4) $Z \,.\, \bar{Z} = x^2 + y^2$

5) $Z \in \mathbb{R}$ تكافئ $Z = \bar{Z}$

6) Z تخيلي صرف يكافئ : $Z = -\bar{Z}$

b) x, x', y, y' أعداد حقيقية . Z_1 , Z_2 عادادان مركبان حيث :

$Z_1 = x + i\,y$ ؛ $Z_2 = x' + i\,y'$

1) $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{\left(x + x' + i\,(y + y')\right)}$

$$= x + x' - i\left(y + y'\right) = x - i\,y + x' - i\,y'$$

ومنه : $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2$

2) $$\overline{Z_1 \,.\, Z_2} = \overline{\left[\left(xx' - yy'\right) + i\left(xy' + x'y\right)\right]}$$

$$= \left(xx' - yy'\right) - i\left(xy' + x'y\right)$$

$$\overline{Z}_1 \,.\, \overline{Z}_2 = \left(x - iy\right).\left(x' - iy\right)$$

$$= \left(xx' - yy'\right) - i\left(xy' + x'y\right)$$

وعليه : $\overline{Z_1 \,.\, Z_2} = \overline{Z}_1 \,.\, \overline{Z}_2$

3) $$\overline{\left(\frac{1}{Z_1}\right)} = \overline{\left(\frac{x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{y}{x^2 + y^2}\right)}$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2} + i\,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{1}{\overline{Z}_1} = \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

وعليه : $\overline{\left(\frac{1}{Z_1}\right)} = \frac{1}{\overline{Z}_1}$

4) $$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2}$$

5) من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $\overline{Z_1^n} = \left(\overline{Z_1}\right)^n$

وإذا كان: $Z_1 \neq 0$ و $n \in \mathbb{Z}$: $\overline{Z_1^n} = \left(\overline{Z_1}\right)^n$

أمثلة :

1) $\overline{(1 + 2i)\,(3 - i)} = \overline{(1 + 2i)}\;\overline{(3 - i)}$

$= (1 - 2i)\,(3 + i)$

2) $\overline{\left(\frac{1}{3 + i}\right)} = \frac{1}{\overline{3 + i}} = \frac{1}{3 - i}$

3) $\overline{\left(\frac{2 + 3i}{5 + i}\right)} = \frac{\overline{(2 + 3i)}}{\overline{(5 + i)}} = \frac{2 - 3i}{5 - i}$

4) $\overline{\left(\frac{a + b}{1 - ab}\right)} = \frac{\overline{a} + \overline{b}}{1 - \overline{a}\,.\,\overline{b}}$

حيث: a و b عددان مركبان مع $ab \neq 1$.

تطبيق :

M نقطة من المستوى لاحقتها $Z = x + iy$ ، M' نقطة من المستوى لاحقتها $Z' = \dfrac{Z + 1}{Z - 1}$

1) اكتب Z' على الشكل الجبري.

2) عين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' حقيقي .

3) عين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' تخيلي صرف .

الحل :

1) كتابة Z' على الشكل الجبري :

$$Z' = \frac{x + iy + 1}{x + iy - 1} = \frac{x + 1 + iy}{x - 1 + iy} = \frac{(x + iy + 1)(x - 1 - iy)}{(x + iy - 1)(x - 1 - iy)}$$

$$Z' = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x - 1)^2 + y^2} + i\,\frac{-2y}{(x - 1)^2 + y^2}$$

2) تعيين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' حقيقي :

Z' حقيقي يكافئ : $\dfrac{-2y}{(x - 1)^2 + y^2} = 0$

ويكافئ : $\begin{cases} y = 0 \\ (x\,;\,y) \neq (1\,,\,0) \end{cases}$.

ومنه مجموعة النقط M هي محور الفواصل باستثناء النقطة

. $A\,(1\,;\,0)$

3) تعيين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' تخيلي صرف :

Z' تخيلي صرف يكافئ : $\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{(x - 1)^2 + y^2} = 0$

ويكافئ : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x\,;\,y) \neq (1\,,\,0) \end{cases}$ ومنه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها O ونصف قطرها 1

باستثناء النقطة $A\,(1\,;\,0)$.

6– طويلة و عمدة عدد مركب :

المستوى منسوب في ما يلي إلى معلم متعامد و متجانس و مباشر $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$. M نقطة من المستوي إحداثياها القطبيان $[\rho\,;\,\theta]$ حيث ρ عدد حقيقي موجب و θ عدد حقيقي و عليه Z لاحقة النقطة M يكتب على الشكل : $\rho\,(cos\theta + i\ \sin\theta)$

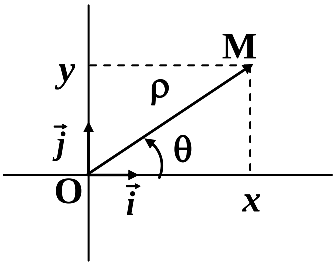
- $\rho\,(cos\theta + i\ \sin\theta)$ يسمى الشكل المثلثي للعدد Z
- نصف القطر القطبي OM يحقق $OM = \rho$ ويسمى طويلة Z ونرمز له بالرمز $|Z|$.

•الزاوية القطبية $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ تحقق $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}\right) = \theta + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و تسمى عمدة العدد المركب Z . و نرمز لها بالرمز

$\arg(Z)$ ونكتب : $\arg(Z) = \theta\ [2\pi]$ و تقرأ θ بترديد 2π

البرهان :

لتكن M نقطة من المستوى إحداثياها القطبيان $[\rho\,;\theta]$ فيكون إحداثياها $(x\,;y)$ معرفان كما يلي :



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

وعليه إذا كان Z لاحقة M فإن :

$$Z = x + iy = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta$$

ومنه : $Z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

ملاحظات :

لدينا : $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ وعليه : $|Z| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \rho$

وعليه :
$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

وإذا كان $Z = 0$ فإن : $\rho = 0$ لكن Z ليس له عمدة.

أمثلة :

عين طويلة و عمدة الأعداد المركبة الآتية :

$$Z_3 = \sqrt{3} - i\ ;\ Z_2 = i\ ;\ Z_1 = 1 + i$$

الحل :

• $Z_1 = 1 + i$; $|Z_1| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

نفرض θ_1 عمدة Z_1 فيكون : $\cos\theta_1 = \dfrac{x}{|Z_1|}$ و $\sin\theta_1 = \dfrac{y}{|Z_1|}$

ومنه : $\cos\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

إذن : $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

• $Z_2 = i$; $|Z_2| = \sqrt{0^2 + (1)^2} = 1$

نفرض θ_2 عمدة Z_2 فيكون : $cos\theta_2 = \frac{x}{|Z_2|}$ و $sin\theta_2 = \frac{y}{|Z_2|}$

$sin\theta_2 = \frac{1}{1}$, $cos\theta_2 = \frac{0}{1} = 0$

إذن : $\theta_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

• $Z_3 = \sqrt{3} - i$; $|Z_3| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$

• نفرض θ_3 عمدة Z_3 فيكون : $cos\theta_3 = \frac{x}{|Z_3|}$, $sin\theta_3 = \frac{y}{|Z_3|}$

إذن : $cos\theta_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $sin\theta_3 = \frac{-1}{2}$

وعليه : $\theta_3 = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

خواص :

A) Z عدد مركب غير معدوم.

1) Z حقيقي موجب يكافئ : $arg(Z) = 0 + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

2) Z حقيقي سالب يكافئ : $arg(Z) = \pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

3) $Im(Z) > 0$ و $Re(Z) = 0$ يكافئ :

$$arg(Z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

4) $Im(Z) < 0$ و $Re(Z) = 0$ يكافئ :

$$arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

أمثلة :

عين عمدة كلا من الأعداد المركبة الآتية دون حساب

$Z_4 = -2i$; $Z_3 = 5i$; $Z_2 = -4$; $Z_1 = 3$

الحل :

• $Z_1 = 3$ ومنه : $arg(Z_1) = 0 + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

• $Z_2 = -4$ ومنه: $arg(Z_2) = \pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

• $Z_3 = 5i$ ومنه: $arg(Z_3) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

• $Z_4 = -2i$ ومنه: $\arg(Z_4) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

B) مرافق عدد مركب :

لتكن M , M' صورتي $Z \; \bar{Z}$ على الترتيب

لدينا $M \; M'$ متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل و عليه :

$$|\bar{Z}| = |Z| \quad \text{و} \quad \arg(\bar{Z}) = -\arg(Z) + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

C) جداء عددان مركبان :

$Z , \bar{Z}$ عددان مركبان غير معدومين حيث :

$$Z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{و} \quad Z' = \rho'\,(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

ومنه :
$$Z \cdot Z' = \rho\rho'\left[\cos\theta.\cos\theta' - \sin\theta.\sin\theta' + i\,(\sin\theta.\cos\theta' + \cos\theta.\sin\theta')\right]$$

$$ZZ' = \rho\rho'\left[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')\right]$$

إذن :
$$|Z \cdot Z'| = |Z| \cdot |Z'|$$

$$\arg(Z \cdot Z') = \arg(Z) + \arg(Z') + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

D) مقلوب عدد مركب غير معدوم :

نعتبر العدد المركب غير المعدوم : $Z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\rho(\cos^2\theta + i\sin^2\theta)}$$

إذن :
$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\rho}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$$

وعليه :
$$\arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -\arg(Z) + 2k\pi \quad \text{و} \quad \left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{|Z|}$$

E) حاصل قسمة عددين مركبين :

Z و Z' عددان مركبان حيث $Z' \neq 0$

$$\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \left|Z \cdot \frac{1}{Z'}\right| = |Z| \cdot \left|\frac{1}{Z'}\right| = |Z| \cdot \frac{1}{|Z'|}$$

ومنه :
$$\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$$

$$\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg\left(Z \times \frac{1}{Z'}\right) = \arg(Z) + \arg\left(\frac{1}{Z'}\right)$$

ومنه : $\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z')$

F) تساوي عددين مركبين :

Z و Z' عددان مركبان غير معدومين حيث :

$Z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ و $Z' = \rho'\,(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$Z = Z'$ يكافئ : $\rho = \rho'$ و $\theta = \theta' + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

G) طويلة و عمدة Z^n :

Z عدد مركب غير معدوم ، n عدد صحيح.

• لدينا $|Z^n| = |Z|^n$ و $\arg(Z^n) = n \cdot \arg(Z)$

البرهان :

من أجل $n \in \mathbb{Z}_+$ نبرهن بالتراجع من أجل $n \geq 2$

• لما $n = 2$: $|Z^2| = |Z|^2$

$\arg(Z^2) = \arg(Z) + \arg(Z) = 2\arg(Z)$ كما سبق.

• نفرض صحة الخاصية إلى رتبة k أي :

$|Z^k| = |Z|^k$ و $\arg(Z^k) = k\arg(Z)$

ونبرهن صحتها في الرتبة $k + 1$:

$$|Z^{k+1}| = |Z^k \cdot Z| = |Z^k| \cdot |Z| = |Z|^k \cdot |Z| = |Z|^{k+1}$$

$$\arg(Z^{k+1}) = \arg(Z^k \cdot Z) = \arg(Z^k) + \arg(Z)$$
$$= k\arg(Z) + \arg(Z) = (k+1)\arg(Z)$$

من أجل $n \in \mathbb{Z}_-$: بوضع $n = -p$

$$|Z^n| = |Z^{-p}| = \left|\frac{1}{Z^p}\right| = \frac{1}{|Z^p|} = \frac{1}{|Z|^p} = \frac{1}{|Z|^{-n}} = |Z|^n$$

$$\arg(Z^n) = \arg(Z^{-p}) = \arg\left(\frac{1}{Z^p}\right)$$
$$= -\arg(Z^p) = -p\arg(Z) = n\arg(Z)$$

نتيجة :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos\theta + i\sin\theta$$

من أجل $n \in \mathbb{Z} \;;\; \theta \in \mathbb{R}$.

وهو ما يعرف بدستور موافر .

H) إذا كانت A و B و C ثلاث نقط متمايزة من المستوي لواحقها Z_A و Z_B و Z_B على الترتيب فإن :

- $\left|\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = \dfrac{AC}{AB}$
- $\arg\left(\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\ [2\pi]$

I) إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان لاحقتيهما Z و Z' على الترتيب فإن :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \arg\left(\frac{Z'}{Z}\right)\ [2\pi]$$

تطبيقات :

1) Z_1 , Z_2 عددان مركبان حيث : $Z_1 = 3i$; $Z_2 = -1 + i\sqrt{3}$

احسب طويلة وعمدة كل من Z_1 , Z_2 , $Z_1 \times Z_2$, Z_1^2

Z_2^{100} , $\dfrac{1}{Z_1}$, $\dfrac{Z_1}{Z_2}$

الحل :

- $|Z_1| = 3$, $|Z_2| = 2$

لتكن θ_1 عمدة Z_1 : $\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{0}{3} = 0 \\ \sin\theta_1 = \dfrac{3}{3} = 1 \end{cases}$ ومنه : $\theta_1 \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

ولتكن θ_2 عمدة Z_2 : $\begin{cases} \cos\theta_2 = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومنه : $\theta_2 \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

- $|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2| = 6$

$$\arg(Z_1 \cdot Z_2) = \arg(Z_1) + \arg(Z_2)$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$$

- $|Z_1^2| = |Z_1|^2 = 3^2 = 9$

$$\arg(Z_1^2) = 2\arg(Z_1) = 2 \cdot \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

و منه : $\arg(Z_1^2) = \pi\ [2\pi]$

- $|Z_1^{100}| = |Z_1|^{100} = 3^{100}$ ؛ $\arg(Z_1^{100}) = 100\arg(Z_1)$

ومنه : $\arg\left(Z_1^{100}\right) = 100\ \frac{\pi}{2}\ [2\pi] = 0\ [2\pi]$

- $\left|\frac{1}{Z_1}\right| = \frac{1}{|Z_1|} = \frac{1}{3}$

$$\arg\left(\frac{1}{Z_1}\right) = -\arg\left(Z_1\right)\ [2\pi] = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

- $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{3}{2}$

$$\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg\left(Z_1\right) - \arg\left(Z_2\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$$

ومنه : $\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \frac{-\pi}{6}\ [2\pi]$

2) ABC مثلث حيث لواحق النقط A , B , C هي على الترتيب :

$2 + i\ ,\ 4 + i\ ,\ 2 + 3i$.

برهن أن المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين .

الحل :

$$\left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = \left|\frac{2 + 3i - 2 - i}{4 + i - 2 - i}\right| = |i| = 1$$

ومنه : $\frac{AC}{AB} = 1$ وعليه : $AC = AB$

$$\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

إذن المثلث ABC قائم في A و متقايس الساقين :

7– الشكل الأسي لعدد مركب (ترميز أولير)

– التعريف :

نضع اصطلاحا من أجل كل عدد حقيقي θ : $cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

فإذا كان Z عدد مركب غير معدوم حيث : $Z = \rho\left(cos\theta + i\sin\theta\right)$ فإن : $Z = \rho . e^{i\theta}$

.

مثال :

اكتب العدد المركب $Z = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}\ i$ على الشكل الأسي :

الحل :

$Z = 4\sqrt{2} \cdot e^{\frac{2\pi}{3}i}$: وعليه $|Z| = 4\sqrt{2}$, $\arg(Z) = \frac{2\pi}{3}$

– خواص :

ليكن Z_2 , Z_1 عددان مركبان حيث :

$Z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, $Z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1}$

1) $Z_1 \cdot Z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

2) $\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{\rho_1} \cdot e^{-i\theta_1}$

3) $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

4) $Z_1^n = \rho_1^n \cdot e^{in\theta}$

5) $\overline{Z}_1 = \rho_1 \cdot e^{-i\theta_1}$

ملاحظة :

لدينا : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$; $e^{i\theta'} = \cos\theta' + i\sin\theta'$ وعليه :

$e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \ldots (1)$

ولدينا : $e^{i\theta} \cdot e^{2\theta'} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$= \cos\theta.\cos\theta' - \sin\theta.\sin\theta' + i(\cos\theta.\sin\theta' + \sin\theta.\cos\theta') \ldots(2)$ من (1) ; (2) :

$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta \cdot \cos\theta' - \sin\theta \cdot \sin\theta'$

$\sin(\theta+\theta') = \cos\theta \cdot \sin\theta' + \sin\theta \cdot \cos\theta'$

– التعبير عن دائرة بالعلاقة $Z = Z_0 + k \cdot e^{i\theta}$

لتكن(C) دائرة مركزها ω ونصف قطرها k.

نفرض Z_0 لاحقة ω ، k عدد حقيقي موجب تماما .

من أجل كل نقطة M ذات اللاحقة Z من (C)

لدينا : $M \in (C)$ تكافئ : $\|Z - Z_0\| = k$

و تكافئ $Z - Z_0$ هو عدد مركب غير معدوم طويلته k و تكافئ : يوجد عدد حقيقي θ (يمكن القول أن $\theta \in [0 ; 2\pi[$)

بحيث : $Z = Z_0 + k \cdot e^{i\theta}$.

– التعبير عن نصف مستقيم بالعلاقة $Z = Z_0 + k \cdot e^{i\theta}$

ليكن $[wx)$ نصف مستقيم مبدأه ω و شعاع توجيهه $\vec{v}$ معطى .

نفرض Z_0 لاحقة w ، u لاحقة $\vec{v}$, $(u \in \mathbb{C}^*)$

حيث : $|u| = 1 \;\; ; \;\; \arg(u) = \theta \; [2\pi]$

من أجل كل نقطة M ذات اللاحقة Z من المستوى لدينا :

$M \in [wx)$ تكافئ (يوجد عدد k من $\mathbb{R}_+$ بحيث : $\overrightarrow{wM} = k \, . \, \vec{v}$) وتكافئ (يوجد عدد k من $\mathbb{R}_+$ بحيث :

$(Z = Z_0 + k \, . \, e^{i\theta}$

8 – المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$.

* إذا كان Z , Z' عددان مركبان فإن :

$Z \, . \, Z' = 0$ تكافئ : $Z = 0$ أو $Z' = 0$

البرهان :

نفرض $Z = x + iy$ و $Z' = x' + iy'$

لدينا : $Z \, . \, Z' = (xx' + yy') + i\,(xy - x'y)$

ومنه : $Z \, . \, Z' = 0$ تكافئ : $\begin{cases} xx' - yy' = 0 \\ \text{و} \\ xy' + x'y = 0 \end{cases}$

نفرض $Z' \neq 0$ حل الجملة ذات المجهول $(x \, ; y)$ هو :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -y' & 0 \\ x & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{vmatrix}} = \frac{0}{x'^2 + y'^2} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x' \\ 0 & y' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{vmatrix}} = \frac{0}{x'^2 + y'^2} = 0$$

فنجد $Z = 0$.

وإذا فرضنا $Z \neq 0$ نجد : $Z' = 0$ ومنه : $Z \, . \, Z' = 0$

تكافئ : $Z = 0$ أو $Z' = 0$

* حل معادلة من الشكل :

$$aZ^2 + bZ + C = 0 \; . \; . \; . \; (1)$$

مع a , b , c أعداد حقيقية حيث $Z \, ; \, a \neq 0$ متغير في $\mathbb{C}$

الشكل النموذجي للعبارة $aZ^2 + bZ + C$ هو :

$$aZ^2 + bZ + C = a\left[\left(Z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

بوضع $\Delta = b^2 - 4ac$ نجد : $aZ^2 + bZ + C = a\left[\left(Z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

- إذا كان $0 \geq \Delta$: للمعادلة (1) حلين كما سبق في .

$$Z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- إذا كان $0 > \Delta$: نضع $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$

فيكون : $aZ^2 + bZ + C = a\left(Z - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(Z - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$ وعليه المعادلة

(1) تكافئ :

$$Z = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{أو} \quad Z = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

أي للمعادلة (1) حلين متمايزين .

* الجذور الربيعية لعدد مركب :

ليكن Z عدد مركب غير معدوم. لنبحث عن وجود عدد مركب k بحيث $k^2 = Z$.

نفرض $Z = x + iy$ و $k = \alpha + i\beta$

لدينا : $k^2 = Z$ وعليه : $\begin{cases} (\alpha + i\beta)^2 = x + iy \\ |k|^2 = |Z| \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = x \ldots (1) \\ 2\alpha\beta = y \ldots (2) \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \ldots (3) \end{cases}$

نجمع (1) و (3) نجد : $2\alpha^2 + \beta^2 = x + \sqrt{x^2 + y^2}$

وعليه : $\alpha^2 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}$ لكن $\sqrt{x^2 + y^2} > -x$

ومنه $\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}}$ أو $\alpha = -\sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}}$

نفرض : $\alpha_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}}$ و $\alpha_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}}$

بالتعويض في (2) :

لما $\alpha = \alpha_1$: $\beta_1 = \dfrac{y}{2\alpha_1}$ ، لما $\alpha = \alpha_2$: $\beta_2 = \dfrac{y}{2\alpha_2}$

حيث : $\alpha_2 = -\alpha_1$ ، $p_2 = -\beta_1$

* حل المعادلات من الشكل :

$$aZ^2 + bZ + C = 0 \;...\; (1)$$

حيث b , c , a أعداد مركبة و $a \neq 0$

- نكتب $aZ^2 + bC + C$ على الشكل النموذجي فنجد :

$$aZ^2 + bZ + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

مع $\Delta = b^2 - 4ac$ كما سبق .

- إذا كان Δ عدد حقيقي موجب : للمعادلة (1) حلين

$$Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- إذا كان Δ عدد حقيقي سالب : للمعادلة (1) حلين

$$Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

- إذا كان Δ عدد مركب غير حقيقي :

نبحث عن جذريه التربيعيين و ليكن k أحدهما ومنه (1) تكافئ :

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{k^2}{4a^2}\right] = 0$$ وعليه للمعادلة حلين :

Z_1 و Z_2 حيث : $Z_1 = \dfrac{-b - k}{2a}$, $Z_2 = \dfrac{-b + k}{2a}$

مثال :

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^2 - (3 - 2i)\,Z + 5 - i = 0$

$\Delta = b^2 - 4a\,C$ ومنه : $\Delta = (3 - 2i)^2 - 4\,(5 - i)$

إذن : $\Delta = 9 - 12i - 4 - 20 + 4i$ ومنه : $\Delta = -15 - 8i$

نبحث عن الجذرين التربيعيين للعدد Δ .

ليكن k جذر تربيعي للعدد Δ .

نفرض : $k = x + iy$ فيكون : $\begin{cases} k^2 = \Delta \\ \left|k^2\right| = \Delta \end{cases}$

وعليه : $\begin{cases} (x + iy)^2 = -15 - 8i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-15)^2 + (-8)^2} \end{cases}$

وعليه : $\begin{cases} x - y^2 = -15 \ldots (1) \\ 2xy = -8 \ldots (2) \\ x^2 + y^2 = 17 \ldots (3) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نجد : $2x^2 = 2$ ومنه : $x^2 = 1$

وعليه : $x = 1$ أو $x = -1$.

بالتعويض في(2) نجد : لما $x = 1$: $y = -4$

لما $x = 1$: $y = 4$.

إذن $k = 1 - 4i$ أو $k = -1 + 4i$

وبالتالي للمعادلة حلين هما :

$$Z_2 = \frac{3 - 2i + 1 - 4i}{2} = 2 - 3i \ , \ Z_1 = \frac{3 - 2i - 1 + 4i}{2} = 1+i$$

9- الأعداد المركبة و التحويلات النقطية :

* مبرهنة :

ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' .

- إذا كان : $Z' = Z + \beta$ حيث : $\beta \in \mathbb{C}$

  فإن : f انسحاب شعاعه $\vec{v}$ ذو اللاحقة β.

- إذا كان : $Z' - Z_0 = k(Z - Z_0)$ حيث $Z_0 \in \mathbb{C}$ و $k \in \mathbb{R}^*$ فإن f تحاكي نسبته k و مركزه النقطة M_0 ذات اللاحقة Z_0 .

- إذا كان : $Z' - Z_0 = e^{i\theta}(Z - Z_0)$ حيث $Z_0 \in \mathbb{C}$ و $\theta \in \mathbb{R}$

  فإن f دوران مركزه النقطة M_0 ذات اللاحقة Z_0 وزاويته θ .

البرهان :

- إذا كان $Z' = Z + \beta$ فإن $Z' - Z = Z_{\overrightarrow{MM'}} = \beta$

  ومنه من أجل كل نقطة M من المستوي فإن الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ ثابت.

  وعليه فهو يعرف انسحاب .

- إذا كان $Z' - Z_0 = k(Z - Z_0)$ فإن صورة النقطة M_0 ذات

اللاحقة Z_0 بواسطة f هي نفسها. ومن أجل $Z \neq Z_0$

فإن : $k \in \mathbb{R}^*$, $\frac{Z' - Z_0}{Z - Z_0} = k$.

ومنه : $\frac{M_0M'}{M_0M} = |k|$

فإذا كان $k > 0$ فإن : $(\overrightarrow{M_0M} ; \overrightarrow{M_0M'}) = 0 [2\pi]$

و إذا كان $k < 0$ فإن : $(\overrightarrow{M_0M} ; \overrightarrow{M_0M'}) = \pi [2\pi]$

وفي الحالتين النقط M' , M , M_0 على استقامة واحدة.

و بالنسبة $\frac{M_0M'}{M_0M} = |k|$ تميز تحاكي مركزه M_0 و نسبته k .

- إذا كان $Z' - Z_0 = e^{i\theta} (Z - Z_0)$ فإن صورة النقطة M_0 ذات اللاحقة Z_0 بواسطة f هي نفسها. ومن أجل : $Z \neq Z_0$

فإن : $\frac{Z' - Z_0}{Z - Z_0} = e^{i\theta}$

ومنه : $\frac{M_0M'}{M_0M} = 1$ و $(\overrightarrow{M_0M} ; \overrightarrow{M_0M'}) = \theta [2\pi]$

هاتين العلاقتين تميزان دوران مركزه M_0 و زاويته θ .

أمثلة :

ادرس طبيعة التحويل f الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' في كل حالة مما يلي :

$1)\ Z' = Z - 1 \qquad 2)\ Z' = Z + i + 1 \qquad 3)\ Z' = 3Z$

$4)\ Z' = -2Z + i + 2 \qquad 5)\ Z' = iZ \qquad 6)\ Z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(i + 1)\ Z + i$

الحل :

1) لدينا : $Z' = Z - 1$

f انسحاب شعاعه $\vec{w}$ ذو اللاحقة -1 .

2) لدينا : $Z' = Z + i + 1$

f انسحاب شعاعه $\vec{w}$ ذو اللاحقة $1 + i$.

3) لدينا : $Z' = 3Z$

f تحاك نسبته 3 و مركزه O .

4) لدينا : $Z' = -2Z + i + 2$

f تحاك نسبته -2 و مركزه I حيث لاحقته $Z_0 = \dfrac{i}{1 - i - 1}$.

إذن $Z_0 = -1$.

5) لدينا : $Z' = iZ \;,\; i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

f دوران مركزه O وزاويته عمدة i أي $\dfrac{\pi}{2}$.

6) لدينا : $Z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(i + 1)\,Z + i$

ولدينا : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(i + 1) = e^{i\frac{\pi}{4}}$

وعليه f دوران زاويته $\dfrac{\pi}{4}$ و مركزه النقطة ذات اللاحقة Z_0

حيث : $Z_0 = \dfrac{i}{1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)}$ ومنه : $Z_0 = \dfrac{2i}{2 - \sqrt{2} - \sqrt{2}i}$ أي :

$$Z_0 = \frac{2i\left(2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)}{\left[2 - \sqrt{2} - \sqrt{2}i\right]\left[2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}i\right]}$$

وعليه : $Z_0 = \dfrac{-2\sqrt{2} + 2\left(2 - \sqrt{2}\right)i}{\left(2 - \sqrt{2}\right)^2 + 2}$.

تم نشر هذا الملف بواسطة قرص تجربتي مع الباكالوريا

tajribatybac@gmail.com

facebook.com/tajribaty

jijel.tk/bac