Cours de terminale

7 - Nombres complexes

Les nombres complexes sont simples.

i est un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.
$z = a + bi$ est un nombre complexe, il possède une partie réelle, a, et une partie imaginaire, b. a et b sont des nombres réels.

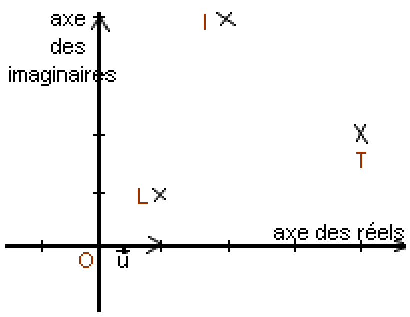
Calcul avec des nombres complexes :

- $(4+3i)^2 = 4^2 + 2 \times 4 \times 3i + (3i)^2 = 16 + 24i + 9i^2 = 16 + 24i - 9 = 7 + 24i$

- Pour écrire le nombre complexe $z = \dfrac{2+3i}{4-5i}$ sous la forme $z = a + bi$ (forme algébrique), on multiplie le haut et le bas par le conjugué du dénominateur. Si $z = a + bi$, le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z} = a - bi$. Ainsi :

$$z = \frac{2+3i}{4-5i} = \frac{(2+3i)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)} = \frac{8+10i+12i+15i^2}{4^2-(5i)^2} = \frac{8+22i-15}{16-(-25)} = \frac{-7+22i}{41} = \frac{-7}{41} + \frac{22}{41}i$$

Nombres complexes dans le plan :



Dans le plan complexe on ne parle plus de coordonnées mais d'affixe. Un point n'est plus repéré avec deux coordonnées mais avec une seule affixe qui est un nombre complexe. Ici L est un point d'affixe $z_L = 1 + i$, I est un point d'affixe $z_I = 2 + 4i$, et T est un point d'affixe $z_T = 4 + 2i$.

La notion de coordonnées polaires s'adapte très bien dans le plan complexe mais il y a du nouveau vocabulaire.

Si M est un point du plan d'affixe z, le module de z (noté $|z|$), c'est la distance OM, et l'argument de z (noté $\arg(z)$), c'est l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$. Si $z = a + bi$ on a toujours :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos(\arg(z)) = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\arg(z)) = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

Ces formules permettent de calculer le module et l'argument d'un nombre complexe. Une fois que l'on connait le module et l'argument, on peut écrire le nombre complexe sous sa forme trigonométrique :

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z))$$

Ou sous sa forme exponentielle :

$$z = |z|e^{i\arg(z)}$$

Propriétés du module et de l'argument :

Le module d'un produit est égal au produit des modules et l'argument d'un produit est égal à la somme des arguments : si z et z' sont deux nombres complexes, on a :

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

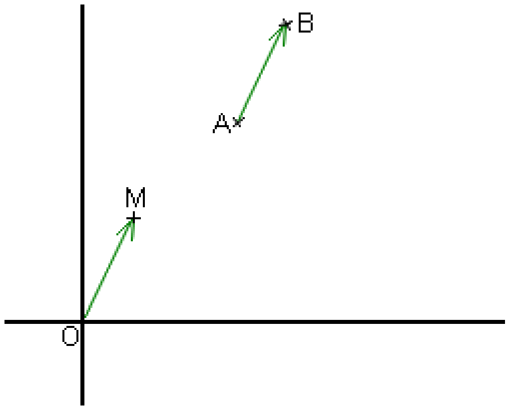
$$\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

Distances et angles :

Si A est un point d'affixe z_A et B est un point d'affixe z_B, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$. C'est comme pour les coordonnées.

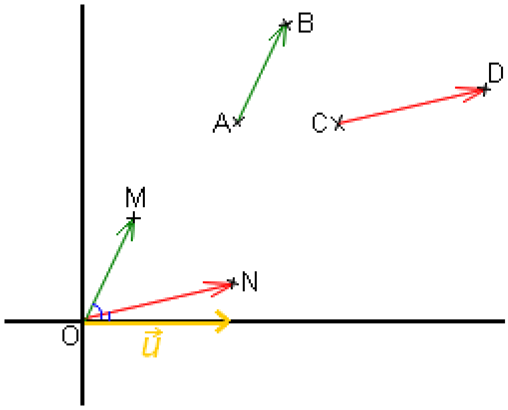
Plaçons maintenant un point M tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$.



Comme $z_B - z_A = z_M - z_O$, le point M a pour affixe $z_M = z_B - z_A$. Donc $OM = |z_M| = |z_B - z_A|$, donc pour calculer des distances dans le plan complexe, on a la formule :

$$\boxed{AB = |z_B - z_A|}$$

Ajoutons maintenant sur le dessin deux points C et D d'affixes z_C et z_D.
On a $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z_M)$, donc $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z_B - z_A)$.



Et de même, $(\vec{u}, \overrightarrow{ON}) = \arg(z_N)$ donc $(\vec{u}, \overrightarrow{ON}) = \arg(z_D - z_C)$.
Comme $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM})$, on a finalement :

$$(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) - (\vec{u}, \overrightarrow{ON}) = \arg(z_B - z_A) - \arg(z_D - z_C) = \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right)$$

On peut utiliser la formule avec n'importe quels points, et d'une manière générale, pour calculer un angle dans le plan complexe, on a la formule :

$$\boxed{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP}) = \arg\left(\frac{z_P - z_O}{z_N - z_M}\right)}$$

<u>Transformations dans le plan complexe :</u>

Il existe des formules qui permettent de calculer, dans le plan complexe, l'affixe de l'image d'un point par une translation, une homothétie, ou une rotation. Si M est un point d'affixe z, si Ω est un point d'affixe ω, si $\vec{t}$ est un vecteur d'affixe *t*, alors l'image de M par la translation de vecteur $\vec{t}$ a pour affixe $z' = z + t$, l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport *k* a pour affixe $z' = k(z - \omega) + \omega$, et l'image de M par la rotation d'angle α et de centre Ω a pour affixe $z' = e^{i\alpha}(z - \omega) + \omega$.Tu dois bien apprendre ces formules.