الأســـــس
في
كتابة بحوث الرياضيات

تأليف

محمد عبد الله سعيد سالم

1437 هـ - 2016 م

الأســــس

في

كتابة بحوث الرياضيات

تأليف

محمد عبد الله سعيد سالم

1437 هـ - 2016 م

النسخة الإليكترونية: الأولى

ISBN: 978-1-329-82709 -7

سنة النشر: يناير 2016م

الناشر: محمد عبدالله سعيد سالم الحوشبي.

تليفون: 771307892

بريد إلكتروني: alhoshiby@hotmail.com

الإهـــــــداء

إلى أبني قيس و زوجتي الحبيبة عريفة التي شاركتني أيام الحياة حلوها ومرها وكانت تشجعني للبحث والتأليف حتى شعرت أنها شريكة لي في كل بحث نشرته أو مؤلف ألفته.

مقدمة

كتابة الرياضيات تختلف عن الكتابة العادية، فبالإضافة إلى كل شروط الكتابة العادية الجيدة، يوجد شروط ومحاذير للكتابة الرياضية، فلكي تكتب بحث في الرياضيات يتطلب ذلك منك دقة وصرامة عالية في الالتزام بهذه الشروط والمحاذير، أن الكتابة الرياضية الجيدة مثل التفكير الرياضي الجيد، وهي مهارة تنمى بالممارسة لتحقيق الأداء الأمثل، أن شروط كتابة الرياضيات ليست أمور مقدسة يجب الالتزام بها بشكل كامل، فبعض الشروط يتم تجاهلها أثناء كتابة مقال جيد، ولكن على الباحث أن يعرف متى ولماذا يتجاهل شرط معين، وهذه الشروط وحدها لا تكفي للكتابة الجيدة، فبالإضافة إلى التسلسل المنطقي والمنظم للأفكار الرياضية، يجب فهم طبيعة تكوين المجال الرياضي المراد الكتابة فيه، أن الفهم الأفضل لطبيعة تكوين المجال المراد الكتابة فيه تجعل الباحث قادراً على شرح الأمور والأشياء بطريقة سلسة، فتحمله على كتابة بحوث أخرى.

أن الغرض من هذه الكتاب هو تقديم المساعدة للشباب الرياضيين في كتابة مقال علمي رياضي لأول مرة، والهدف ليس فقط المساعدة في وضع مقال مكتوب بشكل جيد، ولكن أيضاً المساعدة على البدء في التفكير في الكتابة الرياضية، هذه الرغبة في المساعدة نابعة كرد فعل على رفض الأساتذة في جامعة عدن مساعدتي، في معرفة الكيفية التي اكتب فيها بحث رياضي، فكان هذا الكتاب نتيجة دراسة ذاتية. الكتاب يتكون من ستة فصول في كل فصل العديد من الأمثلة، لذا فهو مبرمج للتعلم الذاتي، وبالإمكان استخدامه ككتاب منهجي لطلبة البكلاريوس، أو الماجستير، لتدريب الطلبة على كيفية كتابة مقال علمي على أسس علمية صحيحة.

أخيراً أمل أن أكون قد وفقت قدر المستطاع في تحقيق الهدف من إنجاز هذا العمل، خدمة للعلم و للطلاب و كل المهتمين بعلم الرياضيات، ورفد المكتبة العربية بمرجع أكاديمي جديد.

والله ولي التوفيق.

مــحــمـــد ابو قيس

9 يناير، 2016 م

المحتــــويـــات

الفصل الأول: مفاهيم أساسية

الفصل الثاني: الجانب الشكلي

الفصل الثالث: الجانب المنطقي

الفصل الرابع: المقال العلمي

الفصل الخامس: طباعة المقال

الفصل السادس: المجلات

الفصل الأول
مفاهيم أساسية

في الرياضيات نستعمل الكلمات والرموز لوصف الحقائق. هذا الفصلِ يَصِفُ الكثير من الكلمات الرياضية، مع تسليط الضوء على طريقة طباعتها وترميزها، بالإضافة إلى ذكر ترجمتها الانجليزية، مع عدد من المصطلحات الأساسية مثل الفئة، الدالة، المعادلة، المتتابعة.

1.1 التعبير الرياضي Expression

المصطلح العام' تعبير' يعبر باختصار عن التشفير الرمزي لشئ رياضي. فعلى سبيل المثال، سلسلة الرموز ' $2+3$ ' هي تعبير صحيحة، وكذلك ' $x \mapsto f(x)$ ' بينما ' $3 \times + 2$ ' تعبير خاطئة و لا تمثل شئ رياضي. ويجب الإشارة هنا إلى أن كلمة صيغة formula تشير إلى أي تعبير رياضي يتكون من واحد أو أكثر من الرموز الرياضية، وكلمة رمز symbol تشير إلى أسماء المتغيرات مثل $x, y, P, Q, \alpha, \beta$ ، واسم الدالة function مثل $f, \sin, \log$ ، أو أي رمز خاص يستخدم للإشارة إلى معاملات operators و علاقات relations رياضية، مثل $+, =, \in$ ، والتعبير الرياضي الجيد يجب أن يكون أكثر اختصاراً وغني بالمعلومات، عندما يوجد تعبيران أو أكثر يمثلان نفس الشيء، فإن اختيارنا للتمثيل الأفضل سيعتمد على سياق الكلام. فعلى سبيل المثال، التعبيران

$$\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \qquad\qquad \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

لهما نفس القيمة. و التعبيران

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx \qquad\qquad 1 + 1$$

لهما نفس القيمة، لكن تركيبهما مختلف.

وبالتالي يجب علينا أن ندرك متى تعبيران يمثلان نفس الشئ (وهذا ليس بسيط)، حيث يكشف التوضيح الطبيعة الحقيقية للشئ، فعلى سبيل المثال المتطابقة الشهيرة التالية

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}.$$

توضح أن كثيرة الحدود مقابل دالة نسبية، وهذا يوضح الاستخدامات المختلفة للتعبير الرياضي.

1.1.1 أنواع التعابير الرياضية

التعابير التي تتضمن الأعداد، العمليات الحسابية الأربع، والرفع raising لعدد صحيح أو أس كسري fractional، تسمى التعبير الحسابي arithmetical expression. فعلى سبيل المثال التعابير التالية حسابية

$191861^2 - 3 \cdot 110771^2 = -2$ ’ متطابقة حسابية ‘.

$\frac{3+2\sqrt{2}}{8-3\sqrt{7}}$ ’ نسبة جذرين تربيعين لهما مجاذير مختلفة ‘.

أن قيمة التعبير الحسابي هي عدد.

أذا وجد مبهمات indeterminates فإننا نتحدث عن تعبير جبري algebraic expression

$$\frac{\sqrt[6]{ab-(ab)-1}}{\sqrt[3]{a^2b^2+ab+1}}$$

’ تعبير جبري بمبهمين‘.

كثيرات الحدود والدوال النسبية هي تعابير جبرية، ويوصفون بأنهما تعابير نسبية rational expressions، وهي لا تحتوي على أسس كسرية للمبهمات.

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1} + \cdots + \frac{1}{x^n+1}$$

مجموع عدد من الدوال النسبية المنتهية بدرجة متزايدة تعبير نسبي يحتوي على تركيب متكرر من دالة كثيرة الحدود مع نفسها.

التعبير الرياضي الروسي التالي:

$$\sqrt{x+\sqrt{2x+\sqrt{3x+\cdots+\sqrt{nx}}}} \qquad n \in N$$

يمكن أن يوصف كتعبير جبري في متغير واحد، ويحتوي على عدد منتهي من الجذور التربيعية المتداخلة تنازليا.

الدوال sine, cosine, tangent, secant ،... الخ، تسمى دوال مثلثيه trigonometric functions (أو دوال دائرية circular functions)، و التعابير ألمثلثيه هي تعابير تحتوي على دوال مثلثيه.

$$8\cos(z)^4 - 8\cos(z)^2 + 1$$ ' كثيرة حدود مثلثيه من الدرجة الرابعة '

تنتمي الدوال ألمثلثيه إلى نمط اكبر وهي الدوال المتسامية transcendental functions وهي الدوال التي لا يمكن تعريفها بتعابير جبرية (الدوال الأسية exponential ، الدوال اللوغارتيمة logarithm ،... الخ). المعادلة التي تعرف بتعبير جبري تسمى معادلة جبرية algebraic equation. وقس على نفس النمط المعادلات ألمثلثيه trigonometric equations والمعادلات المتسامية transcendental equations. فمثلاً:

$$x^n - x - 1 = 0$$ ' معادلة جبرية '

$$\cos(x) = \sin(x)$$ ' معادلة مثلثيه '

$$\log(1+x) = -x$$ ' معادلة متسامية '.

مصطلح التعبير التحليلي analytical expression يستخدم في ومكان وجود معالجات لانهائية. فمثلاً:

' دالة جبرية تعبر ببضعة الحدود الأولى لمتسلسلة لا نهائية '

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + \cdots$$

' ثابت نابير كنهاية لمتتابعة الأعداد النسبية '

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

’ صيغة حاصل الضرب اللانهائي لثابت ارخميدس ‘

$$2\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k)^2-1} = \pi.$$

التعبير التكاملي integral expression هو تعبير يحتوي على تكاملات.

’ تعبير تكاملي للوغاريتم الطبيعي ‘

$$\ln(x) = \int_0^x \frac{1}{t}\,dt$$

أن مصطلح مزيج combinatorial يخصص لتعابير تحتوي على دوال إحصائية، كدالة المضروب factorial و معامل ذات الحدين binomial coefficient. فمثلاً

’ مزيج نسبي من الأسس والمضروبات ‘

$$\frac{1}{2^{2k}}\frac{(2k)!}{(k!)^2}$$

’ مجموع منتهي من معاملات ذات الحدين ‘

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}$$

2.1 الجمل الرياضية Mathematical sentences

الجملة الرياضية هي مجموعة من الكلمات أو الرموز ذات المعنى الرياضي أو مزيج بين الاثنين معاً. فإذا كانت هذه الجملة تحمل في طياتها احد المعنيين ’ صائبة TRUE ‘ أو ، خاطئة FALSE ‘ سميت عبارة statement رياضية، والعبارة الرياضية قد تتكون من جملة رياضية أو أكثر. لنحلل المبرهنة التالية:

'' لنفرض أن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ هي دالة قابلة للتفاضل، فإن f متصلة.''

هذا العبارة تشمل جملتين. الجملة الأولى لا تنص على حقيقة: أنها فرضية. لذا لا يوجد سؤال لهذا العبارة حول إذا ما كانت f خاطئة أو صائبة. لكن ما نزال نستخدمها كأساس لبقية الحجة. الجملة الثانية هي استنتاج لحقيقة جديدة من الفرضية. الرمز f هو متغير داخلي للعبارة، نستطيع أزالته:

'' كل دالة قابلة للتفاضل هي متصلة ''. وهذه الجملة هي مكافئة للمبرهنة أعلاه.

أن الميزة الرئيسية للعبارة الرياضية هي أما أن تكون حقيقة أو غير حقيقية، ووفقاً لذلك نعرف الثابتان المنطقيان صائبة أو خاطئة، والذين يختصرا إلى T, F. أن الثوابت المنطقية هي أعداد حساب الدالة الافتراضية predicate calculus. وكذلك يوجد المعاملات المنطقية logical operators والتي من خلالها نشكل التعابير المنطقية logical expressions، نعني التعابير التي تفترض قيم منطقية. الدوال الافتراضية تسمى predicates أو propositional functions ، والمقاييس quantifiers تؤثر على هذه الدوال مثل التكاملات. أخيراً ، تربط المعاملات العلائقية relational operators حساب الدوال المنطقية ببقية الرياضيات.

1.2.1 المعاملات ألعلائقية Relational operators

لنبدأ بجملة رمزية بسيطة:

$$0 < 1.$$

هذا تعبير علائقي relational expression. المعامل ألعلائقي ' < ' حول عددين إلى ثابت منطقي صائب، أي جملة رياضية ذي معنى صائب.

تحتوي المعاملات ألعلائقية على الأشياء المألوفة جداً:

$$= \qquad \neq \qquad < \qquad \leq \qquad > \qquad \geq .$$

هذه المعاملات ثنائية binary، تتصرف بناء على كميتين حسابيتين operands، الاثنين الأولى $(\neq, =)$ يتصرفون بناء على عناصر أي فئة، بينما يتصرف الآخرون بناء على الأعداد الحقيقة (أكثر عمومية على عناصر فئة مرتبة).

الأشياء المهمة يمكن أن تقال بتعابير علائقية بسيطة:

$$9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3, \qquad \frac{355}{113} - \pi < 3 \times 10^{-7}$$

ومن ضمن المعاملات ألعلائقية معاملات الفئات، يعني معاملات الانتماء membership ومعاملات الفئات الجزئية و نفيها:

$$\in \quad \notin \qquad \subset \quad \not\subset \qquad \supset \quad \not\supset .$$

على سبيل المثال، التعبير ألعلائقي

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

هو ثابت صائب، ذلك لأن الجذر ألتربيعي لـ 2 ليس عدد نسبي. يوجد في الرياضيات عدد لا يحصى من المعاملات ألعلائقية: معامل قابلية القسمة divisibility ' | ' و معامل التطابق congruence ' $\equiv$ ' في الحساب، معامل التشابه isomorphism ' $\cong$ ' في الجبر ، معامل التعامد orthogonally ' $\perp$ ' في الهندسة،... الخ.

ملاحظة

الرمز ' $\approx$' يستخدم في الرياضيات الفيزيائية، لا يمثل معامل علائقي، لأن تعبير مثل $3.14 \approx \pi$ لا يمكن أن يخصص بشكل صريح ثابت صائب أو خاطئ.

2.2.1 المعاملات المنطقية Logical operators

المعامل ' ليس NOT ' يرمز له بـ $\neg$ ، المعامل ' و AND ' يرمز له بـ $\wedge$ ، المعامل ' أو OR ' يرمز له بالرمز $\vee$ ، معامل النتيجة Implication operator الذي يرمز له بالرمز $\Rightarrow$ ، ومعامل التكافؤ equivalence operator يرمز له بـ $\Leftrightarrow$. هذه المعاملات تسمى معاملات منطقية. لنرمز لأي عبارات بـ P و Q و R و S ، فإن كما هو الحال مع المعاملات الحسابية، يوجد ترتيب متفق عليه تقيم به المعاملات المنطقية: أولا $\neg$ ، ثم $\Rightarrow$ ، و من ثم $\wedge$ ، و $\vee$. المعاملان الأخيران لهما نفس الأسبقية، ويقيمان من اليسار إلى اليمين إذا ظهرا كلاهما. مثلاً التعبير $P \vee \neg Q \Rightarrow R \wedge S$ يقيم هكذا $(P \vee (\neg Q)) \Rightarrow (R \wedge S)$ ، نلاحظ أن الأقواس الزائدة تضيف وضوحا للجملة.

التعبير $P \neg$ يسمى ليس P (negation of P). لنفي تعابير علائقية على نحو مباشر. إذا كان P تعبير منطقي، فإن نفيه $\neg P$ ، الذي هو خاطئ إذا كانت P صحيحة والعكس صحيح. التعابير ألعلائقية تنفى بشطب المعامل بعلامة \ ، الاستثناء الوحيد المتراجحات، التي نفيها بعكس المعامل. مثلاً

$$\neg(x < y) = (x > y), \neg(x \in A) = (x \notin A), \neg(A \not\subset B) = A \subset B.$$

التعبير $P \wedge Q$ يسمى الوصلة conjunction أو تعبير مركب compound expression. في التعبير المركب المعامل AND قد يظهر ضمنياً. فعلى سبيل المثال، التعبير $0 < x < 1$ مركب من: $(0 < x) \wedge (x < 1)$.

التعبير

$$P \Rightarrow Q \tag{1.1}$$

الذي يسمى النتيجة implication ويقرا

P implies Q Q follows from P If P, then Q P only if Q P is sufficient for Q.	P تؤدي إلى Q Q تستنتج من P إذا كان P ، فإن Q P فقط إذا كان Q P شرط كاف لحدوث Q

الجملة P هي فرضية hypothesis ، و Q هي الاستنتاج conclusion. فمثلاً:

- إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإن مربع الوتر يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين.
- المستقيم الموازي لضلع مثلث يقسم الضلعين الآخرين إلى اجزاء متناسبة.

جدول الحقيقة truth table التالي يعرف (1.1) بتحديد كل الاختيارات المحتملة للكميات الحسابية.

P	Q	$P\Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ويمكن تعريف كل المعاملات المنطقية أيضاً بهذه الطريقة.

يجب أن يكون واضحا أن $P \Rightarrow Q$ لا تشبه $Q \Rightarrow P$ ، لذلك المعامل $\Rightarrow$ ليس تبادلي non-commutative. ووفقا لذلك نقدم المعامل $\Leftarrow$

$$P \Leftarrow Q \stackrel{\text{def}}{=} Q \Rightarrow P.$$

التعبير على اليسار يسمى عكس النتيجة (1.1). ويقرا

P is implied by Q	تنتج P بواسطة Q
P follows from Q	P تستنتج من Q
P if Q	P إذا كان Q
P is necessary for Q.	P شرط لازمة لـ Q

فمثلاً:

- في أي مثلث، إذا كان مربع أحد أضلاعه يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين، فإن المثلث قائم الزاوية.
- إذا قسم مستقيم ضلعي مثلث إلى اجزاء متناسبة كان موازياً للضلع الثالث.

قيمة النتيجة وعكسها غير مرتبطة في المثال التالي، الأول خاطئ والثاني صائب:

$$(x^2 = 25) \Rightarrow (x = -5) \qquad (x^2 = 25) \Leftarrow (x = -5).$$

العكس الغير ملائم خطأ شائع في البرهان.

أنتجنا جملة رمزية بدمج التعابير ألعلائقية بالمعاملات المنطقية، الأقواس توحي بالترتيب.

تعاكس النتيجة (1.1) هو النتيجة

$$\neg P \Leftarrow \neg Q.$$

التعاكس يبنى بعكس معامل النتيجة ونفي الكميات الحسابية.

الاهتمام الأكبر يجب أن يظهر في التمييز بين النتائج المباشرة direct ، النتائج العكسية converse ، نتائج التعاكس contrapositive.

مباشر: إذا x من مضاعفات الـ 4 ، فإن x عدد زوجي (صائبة).

عكس: إذا x عدد زوجي ، فإن x من مضاعفات الـ 4 (خاطئة).

تعاكس: إذا x عدد فردي ، فإن x ليس من مضاعفات الـ 4 (صائبة).

في حال عدم ارتباط النتيجة وعكسها، كل نتيجة تكافئ تعاكسها. كلاهما صائب أو كلاهما خاطئ لأي كميات حسابية اختيارية.

التعبير $Q \Leftrightarrow P$ هو وصلة للنتائج المباشرة و العكسية:

$$P \Leftrightarrow Q \overset{\text{def}}{=} (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Leftarrow Q) \qquad (2.1)$$

يقرأ كالتالي

P implies and is implied by Q	P تؤدي إلى Q وهي تنتج بواسطتها
P is equivalent to Q	P مكافئة لـ Q
P if and only if Q	تحدث P إذا وفقط إذا كان Q
P is necessary and sufficient for Q	P شرط لازم وكافي لـ Q

التعبير الصعب ' إذا وفقط إذا if and only if ' شائع جداً؛ والشكل المختصر له ' iff ' يوجد في الصيغ كبديل لـ ' $\Leftrightarrow$ '.

فمثلاً:

- العدد p هو عدد أولي إذا وفقط إذا كان $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
- إذا كأن الشكل متوازي أضلاع فإنه يكون به ضلعان متقابلان متوازيان و متساويان.

الشرط " ضلعان متقابلان متوازيان" شرط لازم وكاف لتكوين متوازي الأضلاع. وهذا

يعطى تعريفاً لمتوازي الأضلاع فالتعريف لابد وأن يتوفر فيه الشرطان اللزومية والكفاية لتكوين المفهوم.

جدول الحقيقة التالي يعرف (2.1) بتحديد كل الاختيارات المحتملة للكميات الحسابية.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

3.2.1 الدوال الافتراضية Predicates

افرض أن الفئة X هي مجال الدالة الافتراضية $\mathscr{P}$. الدالة الافتراضية هي

$$\mathscr{P}: X \rightarrow \{T, F\} \qquad \forall x \in X$$

أي أن $\mathscr{P}(x)$ دالة افتراضية على X ، إذا كانت $\mathscr{P}(x)$ تصبح عبارة statement.

فمثلاً الدالة

$$\mathscr{P}: \mathbb{Z} \rightarrow \{T, F\} \qquad x \mapsto 7 \mid x$$

هي دالة افتراضية على الأعداد الصحيحة؛ لدينا $\mathscr{P}(-91) = T$, $\mathscr{P}(22) = F$.

مثال: افرض أن $\mathscr{P}(x)$ هي ' $x + 2 > 7$ ' أذن $\mathscr{P}(x)$ ليست دالة افتراضية على فئة الأعداد المركبة لأن علاقة اللاتساوي غير معرفة لكل الأعداد المركبة.

أيضاً ، إذا كانت $\mathscr{P}(x)$ دالة افتراضية للفئة X ، إذن فئة العناصر $x \in X$ التي لها الخاصية: $\mathscr{P}(x) = T$ تسمى فئة الحقيقة T_P لـ $\mathscr{P}(x)$ أي أن

$$T_P = \{x : x \in X, \mathscr{P}(x) \text{ صواب}\}$$

مثال: اعتبر الدالة الافتراضية ' $x + 2 > 7$ ' المعرفة في $\mathbb{N}$. أذن

$$\{x : x \in \mathbb{N}, x + 2 > 7\} = \{6, 7, 8, \dots\}$$

هي فئة الحقيقة.

و على العكس من ذلك، نفرض أن X فئة ونفرض أن A فئة جزئية من X . الدالة الافتراضية

$$\mathscr{P}_{\mathrm{A}}: X \to \{T, F\} \qquad x \mapsto x \in A$$

تسمى الدالة المميزة characteristic function (أو الدالة الموحدة لكل نقاط A) لـ A (في X). أي التي تميز فئة الصواب. فعلى سبيل المثال، الدالة

$$\mathscr{P}: \mathbb{Z} \to \{T, F\} \qquad x \mapsto 7 \mid x$$

دالة مميزة للفئة $7\mathbb{Z}$ من مضاعفات العدد الصحيح 7 .

لذا لكل دالة افتراضية على الفئة A تضم فئة جزئية متميزة من X ولعكس صحيح.

4.2.1 المقاييس Quantifiers

صياغة الجمل العامة يتطلب رمزين خاصين، ∀ المقياس الشامل universal quantifier و ∃ مقياس الوجود existential quantifier. هذه الرموز تتحول إلى كلمات بعدة طرق متكافئة:

∀: for all given any for any choice of ∃: for some there exists we can find	∀ : لكل لأي معطى لأي اختيار من ∃ : لبعض يوجد نستطيع أن نجد

التعابير مع المقاييس تركب على النحو التالي:

$\forall x \in X, \mathscr{P}(x)$ لكل x في X , $\mathscr{P}(x)$

$\exists x \in X, \mathscr{P}(x)$ يوجد x في X , $\mathscr{P}(x)$

حيث X فئة ، و $\mathscr{P}$ دالة افتراضية على X .

فعلى سبيل المثال:

مربع كل عدد حقيقي هو عدد غير سالب $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0$

يوجد عدد نسبي في الفترة المفتوحة $\exists x \in \mathbb{Q}, \quad 0 < x < 1$

لكن في الجمل الرياضية المقياس غالباً ما يختفي:

العدد $\cos(\pi/3)$ نسبي.

ولجعل المقياس مرئي، نكتب

لبعض العدد النسبي r ، لدينا $\cos(\pi/3) = r$

أو بالرموز

$$\exists r \in \mathbb{Q}, \qquad r = cos(\pi/3).$$

إذا كانت الفئة الشاملة واضحة من صياغ الكلام، فإن ذكرها قد يحذف. هذه الحالة تحدث دائماً إذا ظهر المقياس مع متباينة تحدد مدى المتغير. التعابير المتكافئة التالية :

$$\forall n > 3, n! > 2^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2,3\}, n! > 2^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 3 \Rightarrow n! > 2^n$$

التعبير الأول هو الأفضل. أن وجود المضروب يوضح بأننا نتعامل مع أعداد طبيعية.

يمكن استعمال المقاييس لتعريف المعاملات ألعلائقية في حدود معاملات أخرى، وبهذا نخفض عدد المعاملات الأساسية. فمثلاً معامل الفئة الجزئية نستطيع تعريفه في حدود معامل الانتماء:

$$A \subset B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A, x \in B.$$

معامل قابلية القسمة يعرف في حدود الضرب:

$$m|n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{Z}, mk = n.$$

3.1 الفئات Sets

الفئة هي مجموعة من الأشياء المختلفة والغير منظّمة والمعرفة بصورة محددة. (هذا التعريف يعود إلى كانتور[1]). هذه الأشياء تسمى عناصر الفئة وتحدد الفئة بعناصرها. فنحن قد نكتب

فئة كل الأعداد الصحيحة المفردة.

فئة رؤوس الشكل الخماسي.

فئة الدوال التفاضلية الحقيقة.

الفئة { } بدون عناصر تسمى الفئة الخالية empty set ويرمز لها بالرمز $\emptyset$. على سبيل المثال المعادلة التي ليس لها حلول، فئة حل هذه المعادلة فارغة. في الحالات البسيطة نعرف الفئة بسرد قائمة عناصرها بين قوسين مجعدين يفصل بين كل عنصر وآخر بفاصلة كما يلي

$$A \coloneqq \{1,2,3\}$$

يخصص هذا التعبير الاسم الرمزي A للفئة $\{1,2,3\}$ ، والعكس غير صحيح، أي لا نستطيع كتابة $A \eqqcolon \{1,2,3\}$. الرمز $\coloneqq$ يدل على معامل التحديد assignment operator، ويقرا ' يصبح becomes ' ،أو ' يعرف بأنه 'is defined to be ، أو ' يساوي 'is equal to .

وبينما يشيع استخدام إشارة المساواة = للتحديد، فإن الترميز $\coloneqq$ هو الأكثر تخصص والأحسن، وبالإضافة إلى ذلك يوجد رموز أخرى من معاملات التحديد مثل

$$\stackrel{\text{def}}{=} \,,\, \triangleq$$

تحديد الفئات بسرد قائمة عناصرها ملائم للفئات الصغيرة، لكن كيف نعرف الفئات الكبيرة أو الغير منتهية ؟ الأداة البسيط هي استخدام أداة الحذف " ... " التي تشير إلى أن هناك عناصر لم تذكر، فعلى سبيل المثال فئة الأعداد الطبيعية تعرف كما يلي

$$\mathbb{N} \coloneqq \{1,2,3,\ldots\}.$$

يمثل هنا الحذف كل الأعداد الطبيعية الأكبر من 3. بعض المؤلفين يعتبرون الصفر عدد طبيعي لذلك يعرف فئة الأعداد الطبيعية كما يلي

---

[1] Georg Cantor ، عالم رياضيات ألماني (1845–1918) .

$$\mathbb{N} := \{0,1,2,3,\ldots\}$$

هذا الجدل موجود في الأدب الرياضي ولم يحسم أمره بين الرياضيين، لذلك عندما تستخدم فئة الأعداد الطبيعية يجب عليك أن تحدد أي التعريفيين تستخدم[2] . أيضاً فئة الأعداد الصحيحة يمكن تعريفها باستخدام الحذف

$$\mathbb{Z} := \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\} \quad \text{أو} \quad \mathbb{Z} := \{0,\pm1,\pm2,\ldots\}.$$

لتعريف فئة أكثر عمومية نحتاج إلى تركيبات أكثر قوة، التعريف القياسي للفئة هو تعبير جبري من الشكل

$$\{x : x \text{ has } \mathscr{P}\}$$

حيث $\mathscr{P}$ هي بعض الخواص التي يجب توافرها في كل عنصر x من عناصر الفئة، الكولن " : " يفصل الاسم الرمزي للأشياء عن خصائصها، وكذلك يستخدم " ; " و " | " . فعلى سبيل المثال تعرف الفئة الفارغة

$$\emptyset \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \neq x\}.$$

أن الخاصية $\mathscr{P}$ هنا هي x لا تساوي x، وهي خاصية لا تتحقق في أي عدد، أي أن هذا الفئة خالية من الأعداد.

وبنفس النمط يمكن أن نعرف حاصل الضرب الديكارتي $A \times B$ لفئتين

$$\{x : x = (a,b),\ a \in A \ \text{و}\ b \in B\}.$$

أن الخاصية $\mathscr{P}$ هنا يمكن أن نقراها الآن: أن x هي أي زوج مرتبة (a,b) حيث a ينتمي إلى الفئة A و b ينتمي إلى الفئة B. وبنفس الطريقة يمكن أن نعرف حاصل الضرب الديكارتي بصورة مختصرة

$$\{(a,b) : a \in A \ \text{و}\ b \in B\}.$$

لنفترض أن X و Y فئات الأعداد (الطبيعية $\mathbb{N}$، الصحيحة $\mathbb{Z}$، النسبية $\mathbb{Q}$، الحقيقية $\mathbb{R}$، المركبة $\mathbb{C}$). المجموع الجبري algebraic sum وحاصل الضرب product يعرفإن كالتالي:

[2] بعض المؤلفين يستخدمون الرمز $\mathbb{N}_0$ للإشارة إلى التعريف الثاني .

$$X + Y \stackrel{\text{def}}{=} \{x + y : x \in X, y \in Y\}$$

$$XY \stackrel{\text{def}}{=} \{xy : x \in X, y \in Y\}$$

وفقاً للشرط الذي ذكر فإنه سيتم تجاهل العناصر المكررة، فعلى سبيل المثال إذا كان

$X = \{1,3\}$ و $Y = \{2,4\}$ فإن,

$$X + Y = \{3,5,7\} \qquad XY = \{2,4,6,12\}.$$

المصطلح مجموع الفئات sum of sets يفهم دائما على أنه المجموع الجبري. أما في حالة حاصل الضرب يفضل استخدام التعريف كاملاً لتفادي التشويش في الفهم بينه وبين حاصل الضرب الديكارتي.

إذا $X = \{x\}$ احتوت على عناصر محددة فإننا نستخدم الترميز المختصر $x + Y$ و xY بدلاً من $\{x\} + Y$ و $\{x\}Y$ على التوالي. فعلى سبيل المثال

$$\frac{1}{2} + \mathbb{N} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots\right\} \qquad 3\mathbb{Z} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}.$$

هذا الترميز اقتصادي وفعال وهو يؤدي إلى تعبيرات مختصرة مثل

$$m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \gcd(m, n)\mathbb{Z}$$

تطبيقات هذا الترميز موجودة في حساب القياس modular arithmetic.

عند تعريف فئة معينة ولتكن W نحدد الفئة الشاملة، ولتكن X هي الفئة الشاملة ambient set. أي ينبغي وضع قيود معينة على أنواع العناصر التي يسمح لها بأن تكون عناصر في الفئة W والتي تعتبر أيضاً عناصر في الفئة الشاملة، وهذا ما يسمى تعريف زيرميلو Zermelo [3]، والذي يعرف ''بعض العناصر المنتمية للفئة X لهم الخاصية $\mathscr{P}$''. وبالرموز نكتب

$$W := \{x \in X : x \text{ has } \mathscr{P}\}$$

فعلى سبيل المثال الفئة

$$W := \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0, 2 \mid x\}$$

[3] Ernst Zermelo ، عالم رياضيات ألماني (1871–1953)

تقرا فئة الأعداد الزوجية الصحيحة الغير سالبة.

وفقاً لتعريف زيرميلو لنبني الآن فئات جديدة:

الفترة interval هي فئة جزئية من فئة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ من الشكل

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

حيث a, b أعداد حقيقية و $a < b$. تسمى هذه فترة مغلقة closed لاحتوائها على نقط النهاية.

عندنا أيصاً الفترة المفتوحة open

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

بالإضافة إلى الفترة نصف المفتوحة half-open

$$[a, b) \qquad (a, b].$$

أن التداخل في الترميز بين الفترة المفتوحة $(a, b) \subset \mathbb{R}$ والزوج المرتب $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ مؤسف لكن مستحيل تجنبه. لذا نعرض الترميز البديل للفترات التالية والمنطقي جداً

$$]a, b[\qquad [a, b[\qquad]a, b]$$

الفترة شبه الغير محدودة A semi-infinite interval

$$\{x \in \mathbb{R} : a < x\} \qquad \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

تسمى شعاع ray . الأشعة التي تشمل كل الأعداد الموجبة الحقيقية أو النسبية مهمة جداً، و يخصص لها الترميز

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R}, x > 0\} \qquad \mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q}, x > 0\} \qquad (3.1)$$

بينما $\mathbb{Z}^+$ هي $\mathbb{N}$.

بعض المؤلفين يوسعوا معنى الفترة لتشمل الأشعة والخطوط فيستخدموا تعابير مثل

$$(-\infty, \infty) \qquad [a, \infty) \qquad (-\infty, b].$$

الملا نهاية ∞ لا تنتمي إلى فئة الأعداد الحقيقية، لذا فالترميز $[1,\infty]$ خاطئ. الفترات الأخرى المختلفة عن (3.1) هي فئات الأعداد الحقيقية والنسبية التي لا تحتوي على عنصر الصفر

$$\mathbb{R}^* := \{x \in \mathbb{R}, x \neq 0\} \qquad \mathbb{Q}^* := \{x \in \mathbb{Q}, x \neq 0\}.$$

هذا الترميز شائع لكن غير معترف به عالمياً.

4.1 الدوال Functions

الدوال في كل مكان، فكلمة دالة هي أكثر الأسماء استعمالاً في الرياضيات. الدالة function تشمل فئتين وقاعدة تخصص كل عنصر من الفئة الأولى بعنصر وحيد من الفئة الثانية. الفئة الأولى تسمى مجال الدالة domain والفئة الثانية تسمى المجال المقابل co-domain. الدالة التي مجالها هو الفئة A تسمى دالة على (over) A أو الدالة معرفة على (defined on) A . أن مصطلح الراسم map or mapping هو مرادف لكلمة الدالة، ومصطلح معامل operator يستخدم لوصف أنواع محددة من الدوال. عادة يشار إلى الدالة برمز مثل f ، إذا كان x عنصر في مجال الدالة f فإن قيمة الدالة f عند x يرمز لها بالرمز $f(x)$ وهو العنصر الوحيد في المجال المقابل الذي حددته قاعدة الدالة، وبالرموز

$$f : A \to B \qquad x \mapsto f(x)$$

تقرأ f هي دالة من المجال A إلى المجال المقابل B الذي يسقط $x \in A$ إلى $f(x) \in B$. الرمز x هو المتغير variable (أو الدليل argument) للدالة.

الدوال متعددة المتغيرات تعرف على حاصل الضرب الديكارتي للفئات. فعلى سبيل المثال الدالة

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \qquad (x,y) \mapsto \gcd(x,y)$$

تعتمد على متغيرين مستقلين لذلك تعرف على حاصل الضرب الديكارتي لنسختين من الأعداد الصحيحة.

لنفترض أن $f : A \to B$ دالة، الفئة

$$\{(x, f\ (x)) \in\ A \times B :\ x\ \in\ A\}$$

تسمى الشكل البياني graph للدالة f . أذن الدالة تحدد بشكل كامل بثلاث فئات: المجال والمجال المقابل والرسم البياني. نستطيع الآن أعادة صياغة تعريف الدالة، لنكتب التعريف الدقيق للدالة.

تعريف: الدالة هي ثلاثية الفئات (X, Y, G) الغير خالية. الفئات X و Y اعتباطية، بينما G هي فئة جزئية من $X\ \times Y$ حيث أن لكل $x \in X$ يوجد زوج مرتب واحد فقط $(x, y) \in G$. والكمية y تسمى قيمة value الدالة عند x ، ويرمز لها بالرمز $f\ (x)$.

نرى أن بالإضافة إلى الفئات تعريف الدالة يتطلب تنظيم الزوج المرتب و الثلاثية.

نعطي الدالة $f\ :\ A \rightarrow B$ ، والفئة الجزئية $X\ \subset\ A$ ، الفئة

$$f\ (X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\ f\ (x) : x\ \in\ X\}$$

تسمى صورة X تحت f . هذا الترميز إيحائي وكثير الاستعمال. يعطي معامل التحديد معنى للصيغة الرمزية $f\ (X)$ والذي بدونه ليس لها معنى، فمثلاً $\sin(\mathbb{R})$ هي الفترة المغلقة $[-1,1]$. من الواضح أن $f\ (A) \subset B$ ، و $f\ (A)$ هي الفئة الأصغر التي تعمل كمجال مقابل لـ f ، الفئة $f\ (A)$ تسمى صورة image أو مدى range الدالة f . هذا المصطلح يستخدم أحياناً ليعني المجال المقابل الذي يجب أن نتفاداه.

إذا كانت $f\ :\ A\ \rightarrow B$ دالة تقابل فإن دالة المعكوس inverse هي $f^{-1}: B \rightarrow A$ و يقال أن الدالة يمكن عكسها invertible إذا وجد دالة المعكوس.

لنفرض أن $f\ :\ A\ \rightarrow B$ دالة، ولنفرض أن C فئة جزئية من B ، فئة النقط

$$f^{-1}(C) \stackrel{\text{def}}{=} \{x\ \in\ A :\ f\ (x)\ \in\ C\}$$

تسمى الصورة المعكوسة inverse image للفئة C.

يجب التميز بين دالة المعكوس وبين الصورة المعكوسة. أنظر إلى الثلاثة الترميزات المختلفة التالية:

$$f^{-1}(x) \qquad\qquad f^{-1}(\{x\}) \qquad\qquad f(x)^{-1}$$

التعبير الأول واضح المعالم إذ أن x تنتمي إلى مدى f و f يمكن عكسها هنا، بمعنى آخر دالة المعكوس للمتغير x . في التعبير الثاني لا يوجد شرط على f ، و x تحتاج فقط لان تكون عنصر في المجال المقابل، بمعنى آخر دالة المعكوس للفئة $\{x\}$ أو الصورة المعكوسة. في التعبير الثالث فهي دالة المقلوب. فعلى سبيل

$$\sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad \sin(1)^{-1} = \csc 1$$

في التعبير الأول نفترض ضمنياً أن $\sin^{-1} = \arcsin: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. وفي التعبير الثاني الرمز csc يشير إلى cosecant $(\csc(x) = 1/\sin(x))$ وتعرف في المجال $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

5.1 المعـادلات Equations

المعادلة هي تعبير تتطابق فيه قيمة دالتين في نقطة عامة من مجالهما المشترك. وحلول المعادلة هي النقط في أي الدالتين المفترض لهم نفس القيمة.

لنفترض أن f و g دوال على نفس المجال X والمجال المقابل Y. في الغالب يعبر عن المعادلة (على X) بالنمط

$$f(x) = g(x). \qquad (4.1)$$

الكمية x هي مجهول unknown المعادلة، التعبير (4.1) يعرف بالخاصية التي تمتلكها بعض نقط $x \in X$ ، هذا يساعد على إعطاء تعريف فئة حل solution set المعادلة بالفئة

$$\{x \in X : f(x) = g(x)\}.$$

فعلى سبيل المثال التعبير الجبري $x^2 - 3x + 1 = -(1 + 3x)$ هو معادلة على الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، فئة حلها $\{\sqrt{-2}, -\sqrt{-2}\}$ ، بينما على $\mathbb{R}$ فئة حلها خالية. نرى بأن فئة حل المعادلة تعتمد على الفئة الشاملة.

إذا كان المجال المقابل Y لـ f و g هو فئة الأعداد (على سبيل المثال $Y = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$)، فإن باستبدال f بـ f-g نستطيع كتبة المعادلة (4.1) بشكل مبسط

$$f\,(x) = 0.$$

العنصر x في فئة حل هذه المعادلة يسمى صفر zero الدالة f ، لكن إذا كانت $f\,(x)$ كثيرة حدود نتحدث عن جذر root الدالة f ، أيضاً نقول بأن f تختفي عند x . الدالة f تختفي بصورة متطابقة vanishes identically على فئة إذا اختفت عند كل نقطة في هذه الفئة.
فعلى سبيل المثال الدالة الحقيقية $x \mapsto \sin(\pi x)$ تختفي بصورة متطابقة على $\mathbb{Z}$.

المعادلة التي مجهولها دالة تسمى معادلة دالية functional equation

$$f\,(x) = f\,(x+1) \qquad\qquad f\,(\,f\,(x)) = x.$$

هنا المجهول دالة f تنتمي إلى فئة الدوال.

المعادلة التفاضلية differential equation هي معادلة دالية تحتوي على مشتقات للمجهول:

$$a)\ \ \frac{dy}{dx} = y \qquad\qquad b)\quad x^2\frac{dy^2}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2-1)y = 0.$$

هنا المجهول هو y (وليس x). رتب order المعادلة التفاضلية هي رتبة المشتق الأعلى، فمثلاً رتبة $a)$ هي 1 ، و رتبة $b)$ هي 2 . الصورة القياسية للمعادلة التفاضلية من الرتبة n تختلف عن (4.1) كالتالي:

$$f\left(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

الكمية $y^{(k)}$ تشير إلى أن y مشتقة k مرة . المجهول الوحيد هو y .

المعادلة التي فئة حلها تساوي الفئة الشاملة تسمى متطابقة identity ، أو معادلة مبهم indeterminate equation . بعد التبسيط كل متطابقة تختزل إلى الصورة القياسية 0=0.
المتطابقات تعبر عن دوال متكافئة. فعلى سبيل المثال المتطابقة

$$x^{2^n} - y^{2^n} = (x-y)\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^{2^k} + y^{2^k}\right)$$

التحليل الكامل للفرق بين الحدين الذي درجتهما هي أس 2،هو حاصل ضرب لكثيرات حدود بمعاملات صحيحة.

مثال: على $\mathbb{R}^2$ التعبير $x + y = y + x$ هو متطابقة تمثل الخاصية التبادلية لجمع الأعداد الحقيقية. التعبير المشابه $x + y = 1 - y$ هي معادلة التي فئة حلها خط الأعداد في $\mathbb{R}^2$.

بتحديد الفئة الشاملة لفئة الحل تصبح كل معادلة متطابقة. فعلى سبيل المثال $\sin(\pi x) = 0$ هي معادلة على $\mathbb{R}$ ومتطابقة على $\mathbb{Z}$. لمثال ذو معنى أكثر نعتبر المعادلة

$$x^5 - x = 0$$

بالتحليل إلى العوامل الأولية

$$x^5 - x = x(x-1)(x+1)(x^2 + 1)$$

نرى أن فئة الحل على $\mathbb{C}$ هي $\{0, \pm 1, \pm\sqrt{-1}\}$، وبالتالي هذه المعادلة متطابقة على فئة حلها.

6.1 المتتابعات Sequences

المتتابعة قائمة مرتبة من الأشياء ليست بالضرورة مختلفة، تسمى حدود terms المتتابعة (أو عناصر elements المتتابعة). حدود المتتابعة تمثل برمز مشترك وكل حد يميز بعدد صحيح يسمى الدليل السفلي subscript:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad\qquad (a_1, a_2, \ldots).$$

هنا الرمز المشترك a ، القيم الصحيحة افترضت بالدليل السفلي أنها تبدءا بـ 1، الكمية a_1 تقر '' a تحت 1'' '' a sub 1 '' . الأدلة السفلية قد تبدءا من 0 أو أي عدد آخر. التعبير على اليسار يشير إلى أن المتتابعة منتهية، والآخر على اليمين يفترض أنها متتابعة غير منتهية.

طول length المتتابعة هو عدد عناصرها. نقول عن متتابعتين متساويتان إذا كان لهما نفس الطول، وإذا كانت الحدود المتقابلة متساوية. إذا كان k عدد صحيح غير محدد، فإن a_k يسمى الحد العالم general term للمتتابعة. فعلى سبيل المثال متتابعة الأعداد الأولية

$$(p_1, p_2, p_3, \ldots) = (2,3,5, \ldots)$$

غير منتهية. الحد العام p_k هو العدد الأولي النوني kth .

يوجد ترميز آخر للمتتابعات يعرض الحد العام وبجانبه معلومات حول مدى فترة الدليل السفلي:

$$(a_k)_{k=1}^{n} \qquad (a_k)_1^n \qquad (a_k)_{k=1}^{\infty} \qquad (a_k)_{k\geq 1} \qquad (a_k)$$

يوجد أيضاً المتتابعات غير المنتهية المضاعفة doubly-infinite sequences حيث يمر الدليل السفلي عبر كل الأعداد الصحيحة:

$$(a_k)_{k=-\infty}^{\infty} = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots).$$

علامة الحذف موجود على جانبي المتتابعة، لذا عندما نستعملها يجب أن نكون متأكدين من الحدود المفقودة معروفة بشكل واضح. فمثلاً الحد العام لمتتابعة أحادية الحد monomials

$$(2x, 2x^2, 2x^3, \ldots)$$

هو بوضوح يساوي $2x^k$.

بينما التعبير

$$(3,5,7, \ldots)$$

غامض، لأن هناك عدة بدائل محتملة للحدود المحذوفة مثل $(9,11,13,\ldots)$ أو $(11,13,17,\ldots)$ في الحالة المذكورة نحل الغموض بعرض الحد العام

$$(3,5,7,\ldots,2k+1,\ldots).$$

المتتابعة الجزئية subsequence من المتتابعة (a_k) هي أي متتابعة نحصل عليها من (a_k) بحذف الحدود. فعلى سبيل المثال الأعداد الأولية التي تعطي الباقي 1 عند القسمة على 4 شكل من متتابعة جزئية من متتابعة الأعداد الأولية

$$(5,13,17,29,\dots) \quad \text{أو} \quad x = 1 \bmod 4 .$$

بعض أنواع المتتابعات خصص لها مصطلح. فعلى سبيل المثال المتجه vector هو متتابعة منتهية من الأعداد، وفي هذه الحالة نتحدث عن البعد dimension بدلاً من الطول.

المتتابعة الغير منتهية $(a_1, a_2, \dots)$ تمثل دالة تعرف على الأعداد الطبيعية، إذا كانت عناصر هذه المتتابعة تنتمي إلى الفئة A ، فإن مثل هذه الدالة تعرف بـ

$$a : \mathbb{N} \to A \qquad k \mapsto a_k$$

نرى بأن في التعبير a_k ، الرمز a هو اسم الدالة، والدليل السفلي k هو عناصر المجال و $a_k \in A$ هي قيم الدالة $a(k)$ عند k . يوضح هذا التفسير معنى التعابير مثل a_{k^2} : فهو تركيب دالتين مثلاً $\sin(x^2)$.

1.6.1 بعض التراكيب المنطوية على متتابعات

لنأخذ متتابعة منتهية من الأعداد $(a_1, \dots, a_n)$، لنكون المجموع sum وحاصل الضرب product لعناصرها

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n. \qquad (5.1)$$

مرة أخرى فإن علامة الحذف تمثل تكرر الجمع والضرب على التوالي. الرمز $\sum$ يسمى رمز المجموع summation. الدليل السفلي k هو دليل index المجموع، بينما 1 و n النهاية السفلى lower limit والعليا upper limit للمجموع على التوالي، متتابعة الأعداد الصحيحة $(1,2,\dots,n)$ تسمى مدى range المجموع. الكمية a_k الحد العام للجمع. الرمز $\prod$ يسمى رمز حاصل الضرب product، وكل المصطلحات المذكورة في المجموع تطلق بتعديل واضح للضرب.

المجموع بمجاميع لا نهائية تسمى متسلسلة series.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

إذا كانت النهاية للمجاميع المنتهية من النوع (5.1) موجودة، فإن مثل هذه النهاية تسمى مجموع المتسلسلة sum of the series ويقال أن المتسلسلة تتقارب converge وما عدا ذلك فالمتسلسلة تتباعد diverges، إذا المتسلسلة لها حدود غير سالبة فإن التقارب يعبر عنه أحياناً بالترميز الإيحائي

$$\sum_{k\geq 0} a_k < \infty.$$

لنفترض أن A فئة الأعداد، ولنفترض أن $(a_0,\dots,a_n)$ متتابعة منتهية من عناصر A حيث $a_n \neq 0$ ، كثيرة الحدود polynomial على A في المبهم[4] x هي تعبير جبري من النوع

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n. \qquad (6.1)$$

أن عناصر المتتابعة تسمى معاملات coefficients كثيرة الحدود والعدد الصحيح n يسمى درجتها degree، المعاملات a_0 و a_n على التوالي، تسمى المعامل المطلق constant والمعامل الأمامي leading. كل إضافة في كثيرة الحدود تسمى حد جبري monomial ، و كثيرة الحدود ذات الحدين تسمى ذات حدين binomial. كثيرة الحدود من الدرجة الثانية يقال لها معادلة تربيعية quadratic ؛ لذا عندنا كثيرات حدود من الدرجة الثالثة cubic ، والرابعة quartic ، والخامسة quintic.

فئة كل كثيرات الحدود على الفئة A بالمبهم x ، يرمز لها بـ $A[x]$. فمثلاً

$$x^2 - x - 1 \in \mathbb{Z}[x] \qquad\qquad \frac{1}{2} - y^3 \in \mathbb{Q}[y].$$

كثيرة الحدود الأولى معاملاتها أعداد صحيحة، كثيرة الحدود الثانية معاملاتها أعداد نسبية.

الدالة النسبية rational function هي النسبة بين كثيرتي حدود

$$\frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m}.$$

[4] indeterminate

درجتها هي الدرجات الأكبر n و m (على فرض أن $a_n b_m \neq 0$). فئة كل الدوال النسبية بالمعاملات في الفئة A والمبهم x ، يرمز لها بـ $A(x)$.

كثيرة الحدود متعددة المبهمات multivariate polynomial هي كثيرة حدود في أكثر من مبهم واحد، الدرجة الكلية total degree لكل حد هي مجموع درجات المبهمات، ودرجة كثيرة الحدود هي الدرجة الكلية الأكبر بين درجات الحدود.

$$x^2y^2 - \frac{1}{2}x^4 - xy^3 \ \in \ \mathbb{Q}[x, y].$$

كثيرة الحدود متعددة المبهمات تكون متجانسة homogeneous إذا كان كل حدودها لها نفس الدرجة الكلية. التعبير أعلاه يوصف كالتالي:

كثيرة حدود متجانسة من الدرجة الرابعة في مبهمين بمعاملات نسبية.

مثال: اشرح ما هي كثيرة الحدود ؟

كثيرة الحدود هي مجموع منتهي، كل حد يسمى حد جبري، وهو تعبير عن حاصل ضرب معامل (حقيقي أو مركب) بواحد أو أكثر من المباهيم التي ترفع كلها أو بعضها لقوى عدد صحيح موجب.

إذا استبدلنا المجموع المنتهي في (6.1) بالمجموع الغير منتهي نحصل على متسلسلة القوى power series بالصيغة القياسية

$$\sum_{k \geq 0} a_k \, x^k$$

هذه كثيرة حدود من درجة غير منتهية.

الفصل الثاني
الجانب الشكلي

في هذا الفصل سنتعرف على الجانب الشكلي لكتابة الرياضيات. سنتعامل مع: اختيار المصطلحات والرموز الملائمة ومزجها، قواعد الترميز، توضيح كتابة الصيغ، مفهوم التعاريف، مفهوم المبرهنات.

1.2 اختيار الكلمات

الدقة يجب أن تكون القلق الأساسي لأي باحث يكتب رياضيات. فالفئة غالبا تسمى الفئة set، الفئة تصبح فراغ space إذا كان لها تركيب إضافي، كالفراغ المتري metric space (فئة ببعد) أو الفراغ المتجه vector space (فئة بالجمع والضرب العددي).

كلمة عنصر element تعبر عن نوع خاص من العلاقة التابعة، إذا كانت A فئة و $a \in A$ ، فإننا نقول أن a عنصر في A ، مصطلح الانتماء member متغير وكذالك النقطة point، لهذا إذا كان $A \subset \mathbb{R}^n$ أي فراغ، فإن x نقطة في A ، أما إذا كانت A متتابعة نستبدل ' عنصر ' بكلمة حد term، أي نقول أن a حد في A ، إذا كان $V = (v_k)$ متجه، فإن v_k مركبة component لـ V ، وليس حداً (بالرغم من إن المتجه متتابعة منتهية)، ولكن إذا كانت $M = (m_{i,j})$ مصفوفة، فإن $m_{i,j}$ عنصر أو مدخل element or an entry في M ، وليس مركبة (بالرغم من أن المصفوفة متتابعة من المتجهات).

كلمة متغير variable تستخدم في الدوال و المعادلات، ففي الحالة الأولى (الدوال) لها نفس معنى الدليل argument، فهي تشير إلى بيانات الإدخال للدالة، وفي الحالة الأخير تعني مجهول unknown (الكمية التي ستوجد قيمتها)، كثيرات الحدود والدوال النسبية تمثل دوال أو أشياء جبرية؛ لذا مصطلح مبهم indeterminate أجدر بالتفضيل من كلمة متغير variable.

مصطلح بارامتر parameter يستخدم لتمييز متغير محدد له قيمة تبقى ثابتة في المناقشة اللاحقة خلال البحث موضوع الدراسة.

الدالة دائماً لا تسمى الدالة function، للدوال الحقيقية تسمى دائماً الدالة لكن في الأوضاع الأكثر عمومية مصطلحات راسم map أو mapping و تحويل transformation هي الشائعة، لهذا الدالة المركبة $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ تسمى الراسم mapping، والدالة في الفراغات الأقليدية $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ تسمى راسم أو تحويل، بعض الدوال تسمى معاملات operators، مصطلح معامل operator يستخدم أيضاً لتمييز الدوال التي تحل محل دوال لتؤدي إلى دوال أخرى كنتيجة، فمثلاً معامل عملية الاشتقاق differentiation هو مثال مألوف. مقدار الدالة الحقيقية الذي يحل محل الدوال يسمى دالي functional، لهذا التكامل المحدد definite integration دالي.

في المنطق الدالة تسمى الدالة المنطقية predicate، دالة بولية Boolean function، الدالة الافتراضية propositional function أو دالة مميزة characteristic function، هذه المصطلحات تمثل نفس الشيء لكنها غير قابلة للتبادل بشكل كامل، مصطلح الدالة المميزة إذا كانت هناك أشارة واضحة إلى الفئة التي تميزها هذه الدالة، وفيما عدا ذلك نستخدم مصطلح دالة منطقية أو دالة بولية.

ويمكن تلخيص قواعد اختيار الكلمات بالنقط التالية:

- الانتباه إلى الفوارق في المعنى.
- عدم استعمال كلمات غريبة مالم يعرف معناها المضبوط.
- تكرار اختيار الكلمات لمفاضلة المعنى و لتحسين وضوح الكتابة.
- التأكد من صحة كل كلمة (التهجي).

نعرض بعض الأمثلة للفهم السيئ الشائع للمعاني والأخطاء التي تنتج من اختيار سيئ للكلمات.

مثال: سيئ: المعادلة $x - 3 \leq 0$

جيد: المتراجحة $x - 3 \leq 0$.

مثال: سيئ: المعادلة $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

جيد: المتطابقة $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

مثال: سيئ: المتطابقة $x = \sqrt{x^2}$

جيد: المعادلة $x = \sqrt{x^2}$.

مثال: سيئ: الدالة $\sin(x)$

جيد: دالة $\sin$.

مثال: سيئ: $f(A)$ دالة للفئة A

جيد: صورة الفئة A تحت f .

مثال: سيئ: الفترة $[1, \infty)$

جيد: الشعاع $[1, \infty)$ (الفترة اللانهائية $[1, \infty)$).

مثال: سيئ: الفئة هي $\mathbb{Z}$ ناقص $k\mathbb{Z}$

جيد: فئة الفرق لـ $\mathbb{Z}$ و $k\mathbb{Z}$.

مثال: سيئ: مساحة دائرة الوحدة

جيد: مساحة قرص الوحدة.

مثال: سيئ: القيمة المطلقة موجبة

جيد: القيمة المطلقة غير سالبة.

مثال: سيئ: تقطع الدالة المحور العمودي في النقطة الموجبة

جيد: يقطع بيان الدالة ألأحداثي الراسي في النقطة الموجبة.

2.2 الترميز Notation

الترميز هو بناء الصيغ الرياضية وفق قواعد اختيار الرموز الرياضية. كاستعمال الحروف لكتابة الكلمات، فإذا قبلنا بوجهة النظر هذه، فإن وضع المعادلات ضرب من الترجمة، ترجمة من اللغة العادية إلى لغة الرموز الرياضية. أن الضبط الجيد للترميز الجديد ليشد الانتباه، يعتبر احد المهارات ويتطلب جهداً، ومعظم الباحثين يتفادونه (أي الترميز الجديد) عن طيب نفس!

1.2.2 قواعد اختيار الرموز

عند اختيار الرموز symbols يجب مراعاة القواعد التالية:

الفئات. تمثل الفئات بالحروف الكبيرة يونانية أو روماني، مثل

$$S \qquad \Omega \qquad \mathscr{A}$$

عندما نتعامل مع فئات عامة فإن X, Y, Z أو A, B, C هي الرموز الجيدة، الرموز الصغيرة مثل x, y تمثل عناصر الفئة، لذلك $x \in A$ ترميز جيد، $X \in A$ ترميز سيئ ، و $X \in a$ سيئ جداً. إذا وجد أكثر من فئة واحدة مشتركة يجب استعمال الرموز المتماثلة فمثلاً

$$a \in A \qquad b \in B \qquad c \in C$$

أكثر انسجاماً من

$$x \in A \qquad y \in B \qquad z \in C.$$

الأعداد الصحيحة Integers. عند اختيار رمز لعدد صحيح، ابدأ من وسط الأبجدية الرومانية

$$i, j, k, l, m, n \qquad (1.2)$$

خصوصاً إذا استعمل العدد الصحيح كدليل سفلي أو علوي، استعمل p للعدد الأولي، و q إذا وجد عدد أولي مختلف عن p . قائمة الرموز (1.2) لا يمكن أن تمدد لأن الرموز السابقة لها هي f , g , h وهي رموز نموذجية لدوال. الحروف الكبيرة للقائمة (1.2) تستخدم لتمثيل عدد صحيح كبير أو بالاشتراك مع الحروف الصغيرة لتشير إلى مدى العدد الصحيح فمثلاً

$$n = 1, \ldots, N$$

الأعداد النسبية Rational. للأعداد النسبية نستعمل حروف رومانية صغيرة في المدى $a-e$ أو $p-z$. الترميز

$$r = \frac{m}{n}$$

جيد، لأن r يذكرنا بكلمة ‘ rational’ بينما البسط والمقام يتماشى مع اصطلاح الأعداد الصحيحة. إذا وجد أكثر من عدد نسبي استعمل الرموز المجاورة $s, t, \ldots$.

الأعداد الحقيقية Real. للأعداد الحقيقية نستعمل نفس الجزء من الأبجدية الرومانية المخصص للأعداد النسبية أو الأبجدية اليونانية:

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

إذا وجد الأعداد النسبية والحقيقية و إذا كان التفريق بينهما مهم، نستعمل الأبجدية الروماني للأعداد النسبية و الأبجدية اليونانية للأعداد الحقيقية.

بعض الرموز اليونانية لها معنى مميز: الكميات الصغيرة عادة تمثل بـ ε, δ ، بينما للزوايا نستعمل إحدى الرموز $\emptyset, \varphi, \theta$. خصص للثوابت الحقيقية المشهورة الرموز:

$$\pi = 3.141592653\ldots \quad \text{Archimedes' constant}$$
$$e = 2.718281828\ldots \quad \text{Napier's constant}$$
$$\gamma = 0.333177924\ldots \quad \text{Euler} - \text{Mascheroni constant}$$

وكثير غيرها لها معنى ثابت تقليدي مثل $i, =, -, +$. فيفضل أن نستعمل هذه الرموز بمعانيها التقليدية فقط لأننا إذا استعملناها بمعنى آخر فقد يلتبس بمعناها التقليدي ويحدث ارتباكاً أو تضليلاً. ولكن بعض الرموز الأخرى يستعمل بمعاني مختلفة في المسائل المختلفة.

الأعداد المركبة Complex. تميل الأعداد المركبة إلى احتلال نهاية حروف الأبجدية الرومانية، اختيارك الأول يجب أن يكون z أو w . في المستوى المركب نكتب $z = x + iy$ حيث x و y الأجزاء الحقيقية والتخيلية لـ z ، و i الوحدة التخيلية imaginary unit (عدد من الرياضيين يستعملون $\sqrt{-1}$ وليس i).

في الإحداثيات القطبية polar coordinates الترميز القياسي $z = \rho e^{i\theta}$. احترس لا تستعمل i لأي غرض أخر، مثلاً كدليل للمجموع.

المجاهيل. الرمز المثالي لمجهول المعادلة هو x ، وبدون خلاف نستعمل y و z إذا كان هناك أكثر من مجهول، لعدد كبير من المجاهيل فمن الضروري استعمال ترميز المتتابعة $x_1 \dots x_n$. هذا الترميز ملائم جداً لمباهيم كثيرات الحدود أو متغيرات الدالة.

الأشياء المركبة Composite objects. الأشياء المركبة (الزمر، الرسوم البيانية، المصفوفات) أفضل تمثيل لها بالحروف الكبيرة الرومانية أو اليونانية. لذلك استعمل G أو Γ للزمرة أو الرسم البياني، و M للمصفوفة. إذا كان لديك زمرتين استعمل رموز متجاورة مثل G و H . كما هو الحال مع الفئات، لمركبات هذه الأشياء استعمل رموز مماثلة، فعلى سبيل المثال، $g \in G$. الجدير بالذكر شذوذ الرسم البياني عن هذه القاعدة، حيث v و e تستعمل دائما للقمم vertices و الحواف edges، على التوالي.

الدوال. الاختيار الافتراضي لاسم الدالة هو بالطبع f ، وإذا كان هناك أكثر من دالة واحدة، استعمل رموز متقاربة g, h . تعمل الرموز الصغيرة مع أي عدد من المتغيرات: $f(x), f(x,y,x), f(x_1,\dots,x_n)$. إذا كان المجال المقابل للدالة حاصل ضرب ديكارتي تفضل الحروف الكبيرة، لذلك الدالة الحقيقية لمتغيرين قد تعرف كـ

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) \mapsto (f_1(x,y), f_2(x,y)).$$

بعض الدوال الشهيرة سمية من قبل بأسماء وصفية و مثلت برمز (غالباً إحداها يوناني)، وبهذه الوسيلة يتم خلق ارتباط قوي بين الشيء والترميز. من المعروف دالة جاما لاويلر Euler's gamma

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$$

دالة زيتا لريمان Riemann's zeta

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

يوجد ترميز خاص لهذه الدالة: متغيراتها المركبة s تكتب عموما $s = \sigma + i\tau$ ، حيث σ و τ أعداد حقيقية.

أيضاً من الدوال الشهيرة الأخرى بالترميز المخصص هي دالة اويلر φ ، دالة Dedekind ديديكايند η ، دالة Kroneker كانكر δ ، دالة Weierstrass ويرسترس $\mathscr{P}$ ، دالة Lambert لمبارت $\mathscr{W}$ ،...، الخ.

المتتابعات والمتجهات. تطرح المتتابعات مسائل ترميزية معينة تعود إلى وجود الأدلة. لذلك الترميز (a_k) ملائم تماماً لمتتابعة عامة. عندما تحتاج إلى معلومات أكثر، الترميز $(a_k)_{k\geq1}$ أكثر فائدة من $(a_k)_{k\geq1}^{\infty}$ ، لكن الأخير سيكون الاختيار الأفضل إذا ما قورن بـ $(a_k)_{k\geq1}^{n}$. تبعاً فهذا الأخير غير مشجع مثل $(a_1 \dots a_n)$ ، بالرغم من أنه أكثر اختصاراً. إذ يشار غالباً للمتتابعة مباشرة بالترميز (a_k) الذي يمكن أن يصبح مجهداً، وقد يكون من المستحسن تخصيص رمز لمتتابعة

$$a = (a_1, a_2, \dots) \qquad\qquad \boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n).$$

نلاحظ إننا استخدمنا رموز مماثلة استعمال على التوالي، حرف روماني صغير وقلة في الاستعمال، حرف اسود صغير وهو شائع للمتجهات. عند استعمال إشارة الحذف فإن حدين أو ثلاثة من المتتابعة عادة كافي، لكن هناك حالات حيث تحتاج إلى أكثر من حد أو لترتيب مختلف للحدود. فعلى سبيل المثال في التعبير

$$(1 + x, 1 + x^2, \dots, 1 + x^{2^k}, \dots)$$

إدخال الحد العام يزيل أي غموض، بينما الحذف على اليمين يوحي بأن المتتابعة لا نهائية.

الترميز

$$(a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

يشير إلى متتابعة جزئية من متتابعة منتهية حصل عليها بحذف الحد kth ، لقيمة غير محددة لـ $k \neq 1, n$.

الأشياء تصبح معقدة مع متتابعات المتتابعات، هذه الحالة ليست بالمرة غير عادية، فعلى سبيل المثال عندنا متتابعة المتجهات التي يجب أن يشار إلى مركباتها بوضوح

$$V = (V_1, V_2, \dots) \qquad \text{أو} \qquad \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots).$$

نفرض أن V_k (أو v_k) الحد العام لمتتابعتنا. كيف نمثل مركباتها؟.

كالمعتاد نختار الرمز المماثل v ، بالأدلة السفلية لنشير إلى مركبات، العدد الصحيح k يظهر في الاسفل والأعلى، ومداه يجب أن يكون محدد

$$V_k = \left(v_1^{(k)}, \dots, v_n^{(k)}\right) \qquad k = 1,2, \dots .$$

في هذا التعبير استعملنا علامات الحذف، لتحديد مداي الأدلة؛ يمكن أن نستخدم المتباينات أيضاً:

$$V_k = \left(v_j^{(k)}\right) \qquad 1 \leq j \leq n, \quad k > 1.$$

الأقواس مطلوبة على نحو يبين للأدلة العلوية، وخلاف ذلك v_i^k سيفسر بوصفه v_i مرفوع للأس k . على أية حال، قد يحدث إننا نحتاج إلى رفع مركبات المتجه إلى بعض الأسس، بشكل واضح لا نستطيع استعمال عدد مجاور للأدلة العلوية (مثلاً $v_3^{(2)4}$)، لذلك نحتاج إلى الأقواس لكن الترميز البسيط $\left(v_3^{(2)}\right)^4$ غير ملائم. لحل أكثر روعة، نمثل k بوصفة دليل سفلي إضافي، أي استعمال ترميز المصفوفة

$$V_k = (v_{1,k}, \dots, v_{n,k})$$

كملاحظة جانبية، يجب أن نتذكر بأن مع المتجهات رموز الضرب '$\cdot$' و '$\times$' محجوزة للضرب العددي و الضرب ألاتجاهي على التوالي. لهذا السبب في الضرب العددي يجب أن نستعمل تراصف (وضع الأشياء جنب لجنب)

$$a(bV \cdot cW) \qquad\qquad x\boldsymbol{v} \times y\boldsymbol{u}.$$

ترميز السجما. ترميز المجموع

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad\qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots, \qquad (2.2)$$

كان قد قدم بواسطة فورييز [5] . يسمى ترميز سجما sigma (المحدد)، دليل المجموع متغير وهمي يستعمل هذا المتغير للتعداد الداخلي، ومعادلته لا تؤثر في قيمة المجموع :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots\ + n^2.$$

دليل المجموع هو إحدى الحروف الرومانية الستة في القائمة (1.2). لا تغير رمز المجموع مالم يكون هناك سبب جيد لتغييره.

المجموع المضاعف double sum يعرف كالتالي

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} a_{j,k} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{k=1}^{K} a_{j,k}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{K} a_{1,k} + \sum_{k=1}^{K} a_{2,k} + \cdots + \sum_{k=1}^{K} a_{J,k}.$$

المجموع في الأقواس دالة الدليل الخارجي للمجموع j ؛ هذا المجموع يتكرر مراراً ، كل مرة مع قيمة مختلفة لـ j . استعمال الحروف الرومانية الكبيرة المطابقة للدليل في الحد الأعلى للمجموع ملائم جداً.

إذا كان مداي المجموع مستقلة فإن المجاميع الداخلية والخارجية نستطيع تبديلها، القوانين التبادلية والتجميعية تكفل بأن قيمة المجموع لن تتغير. نوضح هذه العملية بمثال

[5] Jean Baptiste Joseph Fourier ، فيزيائي ورياضي فرنسي ، (1768–1830)

$$\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=1}^{3} a_{j,k} = (a_{0,1} + a_{0,2} + a_{0,3}) + (a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3})$$
$$= (a_{0,1} + a_{1,1}) + (a_{0,2} + a_{1,2}) + (a_{0,3} + a_{1,3})$$
$$= \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=0}^{1} a_{j,k}$$

هذه السلسلة من المتطابقات تتبنى نسق واصطفاف قياسي.

إذا كانت الأدلة في المجموع المضاعف لها نفس المدى، فإنهم قد يجمعون.

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \qquad\qquad \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}$$

بخلاف ترميز السجما المحدد (2.2)، في المجموع الغير محدد معلومات المدى قد تحذف تماماً:

$$\sum_{k}\binom{n}{k} = 2^n \qquad n \geq 0.$$

مدى المجموع قد يحدد أيضاً بالمتباينات التي توضع تحت رموز المجموع :

$$\sum_{1\leq k\leq n} a_k \qquad \sum_{k\geq 1} a_k \qquad \sum_{1\leq j,k\geq N} a_{j,k}. \qquad (3.2)$$

فوائد هذا الترميز تصبح واضحة إذا احتجنا إلى تغيير دليل المجموع. اعتبر التلاعب التالي

$$\sum_{-2\leq k\leq n-3} 2^{k+2} = \sum_{0\leq k+2\leq n-1} 2^{k+2} = \sum_{0\leq k\leq n-1} 2^{k} = 2^n - 1.$$

بعد إضافتنا 2 إلى كل حد في المتباينات، استبدلنا ببساطة $k+2$ بـ k ، لنحصل على مجموع المتوالية الهندسية، و بهذا الترميز تغيير دليل المجموع غير صعب.

الانجاز الأعظم هو القانون العام لترميز سجما الذي شكله القياسي

$$\sum_{\wp(k)} a_k$$

حيث $\wp$ أي دالة افتراضية على $\mathbb{Z}$. مدى المجموع يشتمل على تلك القيم لـ k التي تجعل $\wp(k)$ صائبة.

فائدة هذا الترميز بأن دليل المجموع لم يعد مقيد بمتتابعة الأعداد الصحيحة المتتالية، ومدى المجموع قد يعدل بإضافة الشروط

$$\sum_{0<|k|\leq 2} a_k = a_{-2} + a_{-1} + a_1 + a_2$$

$$\sum_{\substack{1\leq k\leq 12 \\ \gcd(k,12)=1}} a_k = a_1 + a_5 + a_7 + a_{11}$$

$$\sum_{\substack{1\leq k\leq 10 \\ k \text{ prime}}} a_k = a_2 + a_3 + a_5 + a_7.$$

مثال: لأي عدد طبيعي n ، نفرض أن $\varphi(n)$ عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من n و الأولية بالنسبة له (بـ $\varphi(1) = 1$). مثلا $\varphi(12) = 4$. هذه دالة اويلر ومن نظرية العدد تعرف بالرموز كالتالي

$$\varphi(1) = 1 \qquad \varphi(n) = \sum_{\substack{1\leq k<n \\ \gcd(k,n)=1}} 1 \,, \qquad n > 1.$$

ملاحظة: أن التراكيب المقدمة أعلاه للمجموع قابلة للتطبيق أيضاً لحواصل الضرب.

الرموز المشتقة. الأشياء الوثيقة الصلة تتطلب ترميز وثيق الصلة والتقارب في الأبجدية يستخدم لهذا الغرض، على سبيل المثال x, y, z . لرابطة أقوى قد يعدل استعمال مدلول الرمز، أدلة سفلية، أدلة علوية وأوسمة (كالإشارات المختارة أعلى أو أسفل الرمز) أخرى.

$$A^* \qquad \overline{\eta} \qquad n^+ \qquad \underline{h} \qquad \tilde{e} \qquad \Omega_- \qquad Z_r.$$

الرمز المشتق $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ غالباً يوجد في الأدب الرياضي.

العديد من الرموز اشتقت من $\mathbb{R}$ فإننا الآن نستعمل

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \qquad\qquad \mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$

3.2 طريقة عرض الصيغ

الميزة المثيرة التي تميز الكتابة الرياضية عن غيرها من الكتابات هي الاستخدام الواسع للرموز والصيغ. والصيغ قطعاً ضرورية للوضوح وسهولة القراءة فالجملة " بافتراض أن f هي الدالة المعرفة بـ $f(x) = x^2 + x$ " أوضح من الجملة " بافتراض أن f هي الدالة التي قيمتها عند قيمة معينة تساوي مربع العدد زائد العدد نفسه "، من جهة أخرى الاستعمال السيئ للصيغ يمكن أن يؤدي إلى كتابة غامضة. الصيغ تعرض ضمن النص أو بصورة مستقلة، وفي أي بحث تجد عادة كلا الطريقتان مع ملاحظة الالتزام بقواعد الترقين (التنقيط) عند الكتابة (Punctuation) وهي وضع رموز اصطلاحية معينة بين الصيغ والرموز والكلمات و الجمل الرياضية. وفيما يلي توضيح لأهم علامات الترقين واستخداماتها:

1) النقطة (.) full stop: تدل على اكتمال معنى الجملة، وتوضع بنهاية الجملة التي تتم معناها، وفي نهاية جمل الأمر.
2) الفاصلة (,) comma: تدل على أن المعنى قبلها لم يكتمل بعد. توضع بين الجمل أو المفردات المتعاطفة التي يتكون من مجموعها كلام تام الفائدة.
3) الفاصلة المنقوطة (؛) semicolon: توضع بين جملتين إحداهما سبب للأخرى.
4) علامة الاستفهام (؟) question mark: توضع بعد الجمل الاستفهامية.
5) علامة التعجب (!) exclamation mark: توضع بعد الجمل المعبرة عن الانفعالات كالتعجب، الفرح، الحزن، الدعاء، الدهشة، ....، الخ.
6) النقطتان الرأسيتان (:) colon: تدل على أن ما بعدها تفصيل أو إيضاح أو تمثيل لما قبلها، وهي تستعمل عند ذكر قائمة من الاشياء.
7) علامة التنصيص (‘‘ ’’) quotation mark: يوضع بينهما الكلام المقتبس بنصه من كلام الغير.
8) القوسان ( ) parentheses: يوضع بينهما كلمة أو جملة تفسر كلمة غامضة سبقتها.

9) الشرطتان (ـ ـ) hyphen: تدل على أن الكلام الوقع بينهما خارج عن سياق ما قبلها وما بعدها.

10) علامة الحذف (...) ellipses: تدل على أن للكلام بقية لم تذكر.

11) القوسين المعكوفين [ ] : يستخدمان إذا أرد الباحث أن يضيف كلاماً من عنده، أي ليس من النص فيضع ما يريد إضافته بينهم.

أن الترقين في الكتابة الرياضية يحدث شعور بالراحة كما في الجملة اللغوية العادية، ويزيل الغموض. والآن ستناول إرشادات استعمال الصيغ والرموز الرياضية.

1.3.2 العرض ضمن النص

عند خلط الصيغ بالنص يجب مراعاة التالي:

- الرموز المفردة ومعظم الصيغ الصغيرة تكتب ضمن النص مع مراعاة ترك مسافات بسيط حول هذه الصيغ أو الرموز.

مثال: سيئ: نفرض أن $x = \pi$.

فإن $x > 3$.

وبالتالي x أكبر من e .

جيد: نفرض أن $x = \pi$. فإن $x > 3$ ، وبالتالي x أكبر من e .

مثال: جيد: لكل $x \in X$ لدينا التحليل $x = \xi + \lambda$ ، بـ $\xi \in \Xi$ و $\lambda \in \boldsymbol{\Lambda}$ ؛ ووفقاً لذلك، نعرف الدالة $P : X \to \Xi, x \mapsto \xi$ ، التي تستخرج المركبة الأولى لـ x.

- تجنب كتابة صيغتين بالاتجاه نفسه، افصل بينهما بفاصلة أو أي علامة ترقين أخرى، لأنهما سيبدوان كصيغة طويلة واحدة. فمثلاً نلاحظ في المثال أعلاه تعريف الدالة متضمن جزئيين ($P : X \to \Xi, x \mapsto \xi$) فصلا بالفاصلة لإزالة الغموض.

- لا تبدأ مطلقاً جملة في فقرة برمز رياضي، وأيضاً لا تبدأ جملة برمز عندما تنتهي الجملة السابقة برمز.

مثال: سيئ: x عدد موجب، وبالتالي له جذر تربيعي .

جيد: حيث أن x عدد موجب، وبالتالي له جذر تربيعي.

مثال: سيئ: M و L خطوط متوازية.

جيد: الخطوط M و L متوازية.

مثال: سيئ: إحدى حلول $\sin x = f(x)$. $f(x)$ دورية.

جيد: إحدى حلول $\sin x = f(x)$. في هذه الحالة $f(x)$ دورية.

- أي رمز أو صيغة في النص لا يجب أن تبدأ بفاصلة.

مثال: سيئ: إذا كان المميز ، Δ غير سالب، فإن الجذور حقيقية.

جيد: إذا كان المميز Δ غير سالب، فإن الجذور حقيقية.

- يجب أن تفصل الرموز في الصيغ المختلفة بكلمات.

سيئ: اعتبر $Sq, q = 1, \dots, n$.

جيد: اعتبر Sq لأجل $q = 1, \dots, n$.

- لا تستخدم مطلقاً الرموز مثل $\forall, \exists, \wedge, \vee, >, \approx, \Longrightarrow, \Leftrightarrow, \neg, =$ في النص استبدلها بالكلمات. المكان الوحيد التي تستخدم فيها هذه الرموز هو الكتابة الرياضية الرسمية كجزء من صيغ المنطق الرمزي المكتمل.

مثال: سيئ: إذا تطابقت الدوال في ثلاث نقط ، تتطابق $\forall$ النقط .

جيد: إذا تطابقت الدوال في ثلاث نقط ، تتطابق في كل النقط .

مثال: سيئ: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

جيد: $x^2 - 1 = 0$ ، تؤدي إلى أن $x = \pm 1$.

- الرموز التي تمثل العلاقات الرياضية (مثل $\subseteq, \in, =, <$) أو المعاملات (مثل $\cap, -, +$) يجب أن تستعمل فقط لربط الصيغ الرياضية، وليس لربط الكلمات بالرموز أو مع بعضهم البعض.

مثال: سيئ: لنفرض أن S فئة كل أعداد القيمة المطلقة < 1 .

جيد: لنفرض أن S فئة كل أعداد القيمة المطلقة الأقل من 1 .

جيد: لنفرض أن S فئة كل الأعداد x بحيث أن $|x| < 1$.

مثال: سيئ: إذا كان x عدد حقيقي وهو > 2 ، فإن $x^2 + x$ يجب أن تكون > 6.

جيد: إذا كان x عدد حقيقي أكبر من 2 ، فإن $x^2 + x$ يجب أن تكون أكبر من 6.

- الكسور يمكن عرضها ضمن النص كالكسر" $x/(y+2)$ " أو الكسور العددية مثل $\frac{1}{2}$.

2.3.2 العرض بصورة مستقلة

- الصيغ الكبيرة كالمصفوفات، التكاملات، رموز المجاميع، رموز المضاريب، أو الكسور الكبيرة ، ...، الخ . تعرض في وسط خط بصورة منفردة، مع أعطاء رقم لكل صيغة على نفس خط الصيغة، وذلك لتسهيل الإشارة إليها لاحقاً.

مثال:

سيئ: نفرض أن $\emptyset = (a^2+b^2+c^2+d^2)/(e^2+f^2+g^2+h^2)\cdot(a+b+c+d)/(e+f+g+h)$.

فإن $\emptyset$ دالة نسبية في ثمانية متغيرات.

جيد:

$$\emptyset = \frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)}{(e^2+f^2+g^2+h^2)}\cdot\frac{(a+b+c+d)}{(e+f+g+h)}. \qquad (2.5)$$

فإن $\emptyset$ دالة نسبية في ثمانية متغيرات.

في الترقيم (2.5) يشير الرقم 2 إلى رقم القسم الذي توجد فيه الصيغة، والرقم 5 يشير إلى رقم الصيغة، يذكر رقم القسم إذا كان البحث طويلاً ، اما اذا كان قصيراً فلا يذكر. لاحظ أن الكسور يجب أن تعرض باستعمال خط أفقي.

- الرموز في المعادلات والمتراجحات مثل $\leq$ و $\geq$ و $>$ و $<$ و $=$ يجب أن تكون في وضعية الاصطفاف العمودي

مثال: سيئ:

$$3^{2x} - 2(3^x) = -1 \rightarrow (3^x)^2 - 2(3^x) + 1 = 0 \rightarrow$$

$$(3^x - 1)^2 = 0 \;\rightarrow\; 3^x = 1 \;\rightarrow\; x = 0.$$

جيد:

$$\begin{aligned} 3^{2x} - 2(3^x) &= -1, \\ (3^x)^2 - 2(3^x) + 1 &= 0, \\ (3^x - 1)^2 &= 0, \\ 3^x &= 1, \\ x &= 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

لاحظ أن التعابير على جانبي علامة التساوي، كذلك لاحظ الفاصلة بعد كل متطابقة.

مثال: سيئ:

$$(x+1)^3 = (x+1)^2(x+1),$$
$$(x+1)^3 = (x^2 + 2x + 1)(x + 1),$$
$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

جيد:

$$\begin{aligned} (x+1)^3 &= (x+1)^2(x+1) \\ &= (x^2 + 2x + 1)(x + 1) \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1. \end{aligned} \qquad (3)$$

لاحظ أن التعابير على الجانب الأيمن بعد السطر الأول، كذلك لاحظ عدم وجود الفاصلة.

مثال: سيئ: هكذا $a \le b = c < d$

جيد: هكذا

$$\begin{aligned} a &\le b \\ &= c \\ &< d. \end{aligned}$$

مثال: جيد: اشرح كيف حل نظام المعادلات التالية

$$x + 2y - 3z = -11$$

$$y + z = 11$$

$$3z = 21$$

مثال: جيد:

$$x^2 + y^2 < 1,$$

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

- ليس من الضروري استخدام الترقين، لزيادة الوضوح هذه صيغة معروضة فيها فواصل على أكمل وجه:

$$a_0 = 1; \qquad a_{k+1} = \begin{cases} a_k^2 - 1, & 1 \leq k < 10; \\ a_k^2, & k \geq 10. \end{cases}$$

إذا بدئ الترقين الكامل شاقاً، فإننا نستبدل بعض الترقين بزيادة المسافة أو بالكلمات:

$$a_0 = 1 \qquad a_{k+1} = \begin{cases} a_k^2 - 1 & \text{if } 1 \leq k < 10 \\ a_k^2 & \text{if } \quad k \geq 10. \end{cases}$$

بشكل خاص، نهاية الجملة في الصيغة ـ كما في المثال أعلاه ـ يجب دائما أن تكون نقطة '.'.

- تجنب الأقواس الزائدة.

مثال: سيئ:

$$(x + y)(x - y) = (x^2 - y^2).$$

مثال: جيد:

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2.$$

مثال: جيد:

$$(a + b)^2 - (a + c)^2 = b^2 - c^2 + 2ab - 2ac\ .$$

- إذا أردت لفت نظر القارئ إلى $b^2 - c^2$ ، بالإمكان أن تكتب
$$(a+b)^2 - (a+c)^2 = (b^2 - c^2) + 2ab - 2ac.$$
- استخدم الأقواس لتجنب تشويش المعنى بين إشارة الطرح والإشارة السالب.

مثال: سيئ جداً:

$$(a+b) - c = -ac - bc.$$

سيئ:

$$(a+b) \cdot -c = -ac - bc.$$

جيد:

$$(a+b)(-c) = -ac - bc.$$

4.2 التعاريف Definitions

التعريف هو "وصف دقيق لا لبس فيها لمعنى مفهوم رياضي"، وبالتالي فهو يميز معنى كلمة بإعطاء كافة الخصائص والخصائص فقط تلك التي يجب أن تكون صحيحة. أي عندما نعرف شيء يجب أن نضمن بأن هذا الخصائص فعلاً موجودة، وبأن تعريفنا يميزها بشكل محدد. وفي هذه الحالة، فإنه يقال بأن الشيء واضح المعالم well-defined؛ وما عدا ذلك فالشيء غامض ill-defined. أن المفاهيم الرياضية من حيث طريقة تعريفها تنقسم إلى:

- **مفاهيم غير معرفة:** وهي مفاهيم تقبل بدون تعريف ولكن يتم تحديد بعضاً من خواصها وكيفية التعامل معها. مثل النقطة المستقيم والمستوى والفئة.
- **مفاهيم معرفة:** وهي التي يعبر عنها بصياغات لفظية و رمزية شارحة بدلالة مفاهيم أخرى أبسط منها أو سبق تعريفها.

ومن أمثلة المفاهيم الرياضية المعرفة: متوازي الأضلاع حيث يعرف بأنه شكل رباعي مستو فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان. ونلاحظ هنا أن اللفظ،متوازي الأضلاع، يمكن أن يحل محله التقرير " شكل رباعي مستو فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان " ومن ناحية أخرى فإن التقرير

ذاته لا يمكن أن يحل محله أو نعوض عنه إلا باللفظ " متوازي الأضلاع ". ومن هنا فإن التعريف عبارة عن متساوية أحد طرفيها لفظه أو مصطلح (اسم المفهوم) وطرفها الأخر جملة خبرية ورمزية شارحة بحيث يمكن التعويض عن أحدهما بالآخر. ونلاحظ أن التعريف يمثل الشرط اللازم والكافي لدلالة المفهوم. وهنا نشير إلى أن عبارة مثل المستقيم هو مجموعة من النقط لا تمثل تعريفاً للمستقيم لأننا يمكننا أن نعوض عن المستقيم بمجموعة من النقط ولكننا لا يمكن أن نعوض عن " مجموعة من النقط " بالمستقيم إذ أن " مجموعة من النقط " يمكن أن تكون أي شكل هندسي. كذلك فإننا عندما نقول أن متوازي الأضلاع هو شكل رباعي مستو فإن هذا أيضاً لا يمثل تعريفاً ولكن الشكل الرباعي ألمستو مجرد أحد خواص متوازي الأضلاع. ولكننا عندما نتحدث عن شكل رباعي مستو فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان فإننا بذلك عرفنا متوازي الأضلاع ولا شيء غير متوازي الأضلاع وإذا ذكرنا أن "متوازي الأضلاع شكل رباعي مستو فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان ومتساويان" فإننا بذلك نكون قد أطنبنا بزيادة مزيد من الخواص لسنا في حاجة إليها في التعريف إذ أن كون كل ضلعين متقابلين متوازيان أمر لازم (وهو هنا أيضاً كاف) ويمكن أن نشتق منه خواص أخرى مثل أن كل ضلعين متقابلين متساويان والقطران فيه ينصف كل منهما الآخر... الخ.

وفي الوقت الذي نجد فيه مصطلحات تعرف بخاصيتين لابد من توفرهما معاً (شكل رباعي + كل ضلعين متقابلين متوازيان) نجد بعض المصطلحات تعرف بخاصية واحدة على الأقل من بين خاصيتين مثل "إتحاد مجموعتين x ، y " هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى x أو y ، ومثل "العدد الصحيح غير السالب" هو الصفر أو الصحيح الموجب، ومثل " $a < b$ " أذا كانت a زاوية b أو $a = b$. مثل هذه المصطلحات هي أسماء لمفاهيم فاصلة (disjunctive) أي تتحقق بواحدة على الأقل من عدة خواص.

ومن ناحية أخرى هناك مفاهيم على درجة تجريدية أعلى من غيرها مثل التوازي، التعامد، الصدق،... وجميعها تدل على خاصية عامة مجردة. فالتوازي أكثر تجريداً من المستقيمات المتوازية والتعامد أكثر تجريداً من المستقيمات المتعامدة والصدق أكثر تجريداً من العبارات الصادقة. ويفرق البعض بين هذين الصنفين من المفاهيم، فالتوازي والتعامد والصدق تسمى مفاهيم وصفية أو نعتيه (attributive) أي تدل على نعت أو صفة بينما مفاهيم مثل

المستقيمات المتوازية ومتوازي الأضلاع والعبارات الصادقة تسمى مفاهيم دلالية (denotative) أي أنها تدل أو تشير إلى مجموعة من الأشياء.

كذلك هناك مفاهيم مفردة ومفاهيم عامة، والمفاهيم المفردة مثل العدد الحقيقي 5 والدالة الخطية $y = 2x + 1$ والعدد غير النسبي e ، والمفاهيم العامة هي التي تدل على مجموعات تحتوي على أكثر من عنصر مثل العدد النسبي والدالة الخطية وهي الدالة التي على الصورة $y = ax + b$ حيث a, b أي أعداد حقيقية، $a \neq 0$.

1.4.2 التعاريف المتكررة

التكرار Recursion هي طريقة تعريف المتتابعات التي لا نعرف أي طريقة مفيدة للتعبير عن الحد النوني كدالة واضحة لـ k . في غياب صيغة واضحة للحد النوني، نسعى إلى تمثيل a_{k+1} في حدود a_k . هذه المتتابعات التكرارية التي تعرف ببيانين: الحد الأول للمتتابعة المسمى الشرط الأولي initial condition، والقاعدة التي تحدد الحد من حد سابق له. فعلى سبيل المثال ، متتابعة المضروب $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ \cdots \ n$ ، يمكن أن تعرف بشكل تكراري كالتالي :

$$0! = 1 \qquad (k+1)! = (k+1) \cdot k! \qquad k > 0.$$

على نفس النمط، المشتقة النوني لـ $g^{(n)}$ للدالة g تعرف بالقاعدة التكرارية

$$g^{(0)}(x) = g(x) \qquad g^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx} g^{(k)}(x) \qquad k \geq 0.$$

متتابعة Fibonacci[6] (وهي المتتابعة التي نحصل على كل حد فيها بعد الحد الثاني بجمع الحدين السابقين له مباشرة) تعرف بشكل تكراري

$$a_0 = 1; \quad a_1 = 1; \quad a_{k+1} = f\,(a_k, a_{k-1}) = a_k + a_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

نجد أن

$$(1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,\ldots).$$

لأن الحد $a_{k-1} = a_{k+1} - a_k$ دالة واضحة المعالم للحدين التاليين، يمكن أن نوسع متتابعة Fibonacci خلفياً ، للحصول على متتابعة لا نهائية مضاعفة

[6] (about 1170–1250) عالم أوربي

$$(\ldots,-21,13,-8,5,-3,2,-1,1,0,1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots).$$

أي متتابعة يمكن أن تمدد خلفياً يقال أنها يمكن عكسها invertible. وبالتالي متتابعة Fibonacci يمكن عكسها.

5.2 المبرهنات Theorems

تبدأ النظرية theory الرياضية بمجموعة من البديهيات[7] axioms أو المسلمات postulates. وهي عبارة يفترض صحتها لا تبرر ولا يطلب التحقق من صحتها. البديهيات هي وحدات بناء النظرية، منها نستنبط عبارات صحيحة أخرى تسمى مبرهنة theorem، قضية منطقية proposition، نتيجة Corollary، تمهيدية lemma. إذن النظرية غنية بقائمة متنامية من العبارات الصحيحة. أن القاسم المشترك بين هذه المصطلحات أن كلها عبارة عن مبرهنات، لكن الفارق الأساسي فيما بينها يكمن في مدى الأهمية لكل منها:

- **مبرهنة:** هي العبارة الرئيسية، وإحدى الأهداف الأساسية لعملك. وبرهان المبرهنة عادة ليس سهلاً . أن مصطلح مبرهنة يطلق على العبارة ألأكثر أهمية، وبالتالي فإن هذا المصطلح يستخدم باقتصاد.
- **قضية**[8] : وهي العبارة التي تستحق الانتباه (عبارة مثيرة أو ذات أهمية خاصة)، لكنها ليست عامة كفاية أو ذو شأن لتسمى ’ مبرهنة ‘.
- **نتيجة:** وهي العبارة التي تستنبطها من مبرهنة أو قضية أو نتيجة أخرى. وهي اقل أهمية من القضية، وهي سهلة وبرهانها سهل وقليل نسبياً . أحياناً نقول هذه النتيجة الطبيعية للمبرهنة A.
- **تمهيدية:** هي العبارة الغير مستقلة، الهدف الوحيد لها هو المساعدة في إثبات مبرهنة أو قضية أو تمهيدية أخرى (بمعنى أخر تدخل في برهان المبرهنة، أو القضية أو النتيجة). تذكر التمهيدية وتثبت قبل أن تستخدم، وهي ليست لها نتيجة مطلقاً بالرغم من أن التمهيدية قد تستعمل أحياناً في اشتقاق النتيجة.

---

[7] يطلق بعض المؤلفين على فرضيات الهندسة البديهيات، وعلى فرضيات الجبر المسلمات.

[8] بعض المؤلفين في الكتب التعليمية يفضلون استخدام مصطلح ’ قضية ‘ بدلاً من مصطلح ’ مبرهنة ‘ لانه يعتبر اقل رهبة للطلبة.

توجد المبرهنات على شكل صيغة رياضية أو عبارة خالية من الرموز أو عبارة مختلطة الكلمات بالصيغ. فعلى سبيل المثال:

مبرهنة.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}. \qquad (1)$$

مبرهنة1. العدد r ، سواء كان حقيقياً أم تخيلياً ، يكون جذراً لكثيرة الحدود $f(x)$ ، التي معاملاتها أعداد مركبة، إذا و إذا فقط كان $x-r$ عاملاً لـ $f(x)$.

مبرهنة 2.5 كل كثيرة حدود معاملاتها أعداد مركبة ودرجتها أعلى من الصفر لها على الأقل جذر مركب واحد.

نلاحظ في المبرهنة 2.5 ، أن الرقم 5 يشير إلى رقم القسم التي توجد فيه المبرهنة، والرقم 2 هو رقم المبرهنة.

كما توجد المبرهنات على شكل خوارزميات Algorithms ، و**الخوارزمية** هي إجراء روتيني موصوف بدقة يمكن أن يطبق ومن خلال تتابع منظم نصل إلى استنتاج. انظر المثال التالي

نتيجة1.1. لاختبار قابلية قسمة عدد صحيح N ، اكبر من الواحد على عدد أولي p أكبر من خمسة نتبع الخوارزمية التالية:

1) نطرح t مرق رقم آحاد N من باقي N ، بعد حذف آحاده منه (قيمة t تحددها المبرهنة السابقة) فنحصل على عدد جديد y أصغر من N .
2) نكرر الإجراء السابق نفسه على العدد الناتج.
3) نستمر في التكرار حتى نصل إلى أصغر عدد يسهل الحكم عليه، إذا كان يقبل القسمة على p أم لا، فإذا كان الأخير يقبل القسمة على p فإن N يقبل القسمة على p وإلا فلا.

عندما تكون الخوارزمية جزء رئيسي من بحثك، عندها تحتاج لشرح الخوارزمية بعناية، أو أثبات عملها، أو تحليل تعقيدها، بالاستعانة بالعديد من الأمثلة لتوضيحها.

بعض المبرهنات الشهيرة سمية من قبل بأسماء وصفية كمبرهنة فيثاغورس، مبرهنة باسكال، مبرهنة القيمة المتوسطة،...، الخ.

عند كتابتنا بحث رياضي، نحتاج لترتيب العبارات لكي كل عبارة أما بديهية أو مبرهنة أو قضية أو نتيجة. بالممارسة فقط العبارات الهامة ستسمى مبرهنات. و من غير المستحسن تسمية كل نتائجك مبرهنات، لأنك إذا فعلت ذلك تفوت فرصة للتأكيد على البنية المنطقية لعملك وتوجيه الانتباه إلى أهم النتائج. وإذا كنت في شك حول تسمية نتيجتك قضية أو مبرهنة، سمها قضية، وعلى نفس النمط، أذا كنت في شك حول تسمية نتيجتك نتيجة أو قضية، سمها نتيجة.

لنتناول الآن كثيرة الحدود المشهورة المقترحة من قبل اويلر: $p(n) = n^2 + n + 41$. نقيم $p(n)$ عند قيم العدد الصحيح المبهمة : $n = 0,1, \dots$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$10 \cdots 20 \cdots 30$
$p(n)$	41	43	47	53	61	71	83	97	131	151	$181 \cdots 461 \cdots 971$

كل هذه القيم لـ $p(n)$ أعداد أولية. علاوة على ذلك $p(-n) = p(n-1)$ ، لذلك تبدو معقولة لتقديم التخمين التالي

تخمين. لكل الأعداد الصحيحة n ، فإن $p(n)$ عدد أولي.

التخمين Conjecture : هو العبارة التي نرغب أن تكون مبرهنة.

ثلاثة أشياء قد تحدث للتخمين:

i) شخص ما يثبته والتخمين يصبح مبرهنة،

ii) شخص ما ينتج مثال مضاد والتخمين يصبح خاطئ،

iii) لا شي يحدث من الخيارين أعلاه والتخمين يبقى تخمين.

في حالتنا نفي التخمين هو يوجد عدد صحيح n ، الذي يجعل $p(n)$ عدد مركب.

لإثبات هذا، نعرض قيمة لـ n . عندما $n = 40$ ، نجد أن

$$\begin{aligned} p(40) &= 40^2 + 40 + 41 \\ &= 40(40+1) + 41 \\ &= 41(40+1) \\ &= 41^2. \end{aligned}$$

لذلك $p(40)$ ليست عدد أولي، التخمين خاطئ.

ملاحظة: صياغة التخمين لعالم الرياضيات مصحوب بخوف من المثال المضاد Counter example.

التخمين الأخر المشهور الذي ينسب إلى إقليدس

تخمين . *يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية p ، التي $p + 2$ عدد أولي ايضاً.*

و تخمين جولدباخ[9]

تخمين. *كل عدد زوجي أكبر من 2 يمكن كتابته على صورة عددين أوليين.*

رغم أن لا يوجد برهان لتخمين جولدباخ إلا أن أحداً لم يستطيع أن يقدم مثالاً واحداً يثبت به عدم صحة التخمين.

[9] Christian Goldbach عالم رياضيات ألماني (1690–1764)

الفصل الثالث

الجانب المنطقي

أحدى أهم أشكال الكتابة الرياضية كتابة البراهين الرياضية. أن كتابة البراهين الرياضية مهارة مكتسبة وتأخذ الكثير من الممارسة. في هذا الفصل سنتعرف على ماهية البرهان، وعلى الأخطاء الشائعة أثناء كتابة البرهان، ثم سنستعرض بعض الطرق لإعطاء قالب للدليل الرياضي.

1.3 البــرهان Proof

يعتبر اكتشاف العلاقات الرياضية من أولوية الانجازات في أبحاث الرياضيين، وبما أن هذه الاكتشافات يجب أن تكون صحيحة و مقنعة لمجتمع الرياضيين، فالبرهنة على صحتها يعتبر في مقدمة انجازات الرياضيين أيضاً.

سنحاول معرفة العناصر التي يتكون منها البرهان، غرضنا الفحص بدقة للدليل الرياضي، تفصيل كل خطوة. سنستعمل ترقيم لتسهيل المطابقة للعناصر المنطقية للبرهان.

نقدم الآن بعض البديهيات (هذه البديهيات تعرف شيء عام: الزمرة (group)، نعطي الفئة **Ω** و المعامل الثنائي '$\odot$' على **Ω** ، بالخصائص التالية:

G1: $\forall x, y, \in \Omega, x \odot y \in \Omega$

G2: $\forall x, y, z \in \Omega, (x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$

G3: $\exists \diamond \in \Omega, \forall x \in \Omega, x \odot \diamond = \diamond \odot x = x$

G4: $\forall x \in \Omega, \exists x' \in \Omega, x \odot x' = \diamond$

فإن احد طلب إثبات أن

$$\forall x \in \mathbb{R}, -(-x) = x$$

إذن ستكون مكان ' $\mathbb{R}$ ' = ' Ω ' ، و ' + ' = ' $\odot$ ' ، $\diamondsuit$ يمثل 0 و x' يمثل $-x$. نستعد لنص واثبات مبرهنتنا.

1. مبرهنة.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, -(-x) = x$
3. البرهان.
4. لنفترض أن $x \in \mathbb{R}$ معطى ;
5. فإن (بحسب G4) $-x \in \mathbb{R}$;
6. لنفترض أن

$$a := \big(x + (-x)\big) + \big(-(-x)\big), b := x + \Big(-x + \big(-(-x)\big)\Big);$$

7. إذن (بحسب G1) $a, b \in \mathbb{R}$ ، و (بحسب G2) $a = b$;
8. فإن (بحسب G3 و G4) $a = 0 + (-(-x)) = (-(-x))$;
9. فإن (بحسب G3 و G4) $b = x + 0 = x$;
10. إذن (بحسب 7، 8 ، 9) $-(-x) = x$.
11. □

البنود 1 ، 3 ، 11 إشارات منطقية logical tags (كلمات أو رموز تقول أشياء حول نص) فهم بمثابة إعلان رسمي عن نص المبرهنة، بداية البرهان ونهاية (الرمز '□').

البنود 5 ،8، 9 تبدأ بالإشارة المنطقية 'فإن then ' ، تأتي بعد استدلال من بديهيات. منهجياً، البند 5 هو عبارة صحيحة مستنتجة من بديهيات.

البنود 7 ، 10 استنتاج طبيعي، وقد اشرنا إليهم بالإشارة المنطقية ' إذن hence '. هذه البنود لا تستعمل فقط بديهيات، ولكن أيضاً حقائق من عبارات سابقة ،المبرهنات، المعطيات، تعاريف.

البنود 4 ، 6 ليست عبارات لكن توجيهات instructions. البند 4 يوجهنا لافتراض أن x عنصر اعتباطي في الفئة. تعكس هذه الجملة الافتتاحية القياسية، التعبير $\forall x \in \mathbb{R}$ في المبرهنة. البند 6 توجهنا لتعريف كميتين جديدتين.

في البند 10 نستعمل ضمنياً الخاصية الانتقالية transitivity لمعامل المساواة (إذا كانت $x = y$ و $y = z$ ، فإن $x = z$)، الذي تعتمد على حقيقة أن المساواة علاقة تكافئ.

برهاننا التالي يثبت أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي. نستعمل نفس النمط والشروط كما في المبرهنة السابقة. على أية حال، هذا البرهان يستعمل بعض التعاريف والحقائق بدون تبرير (لأنها متعارف عليها أي شائعة). في هذا الخصوص هذا البرهان أكثر مثالية من السابق.

1. مبرهنة.
2. $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي.
3. البرهان.
4. نفرض أن $\sqrt{2}$ عدد نسبي ;
5. فإن $\exists m,n \in Z$ بحيث أن $\sqrt{2} = m/n$.
6. لنختار m,n من 5 بحيث أنهما أوليان نسبيان .
7. بما أن $\sqrt{2} = m/n$,
8. فإن $2 = m^2/n^2$;
9. فإن $2n^2 = m^2$;
10. فإن m^2 عدد زوجي ;
11. إذن (بحسب 10) m عدد زوجي ;
12. فإن $m = 2h$ لأي عدد صحيح h ;
13. إذن (بحسب 9 و 12) $2n^2 = 4h^2$;
14. فإن $n^2 = 2h^2$;
15. فإن n^2 عدد زوجي ;
16. إذن (بحسب 15) n عدد زوجي ;
17. إذن (بحسب 11 و 16) m,n ليس أوليان نسبيان ;
18. إذن (بحسب 6 و 17) الافتراض 4 خاطئ ;
19. فإن نفيها صحيح.
20. □

كمية لا بأس بها من الرياضيات مفترضة في البرهان:

تعريف الأعداد النسبية ومن $\sqrt{2}$ (البنود 2، 4 ، 5) ;

تعريف الأولية النسبية (البند 6) ;

بعض خصائص المعادلات (البنود 9 ، 8) ;

مبرهنة في الحساب (البنود 11، 16) ;

تعريف العدد الصحيح الزوجي (البنود 12 ، 17) ;

يحتوي الدليل على عناصر مبتكرة. جوهر البرهان هو البند 4، الافتراض بأن $\sqrt{2}$ عدد نسبي. أن الفرضية بأن $\sqrt{2}$ عدد نسبي تؤدي في النهاية إلى تناقض: البنود 6 و 17 عبارات متضاربة. من هذه الحقيقة نستنتج بان الفرضية في البند 4 خاطئة (البند 18). هنا نتخلى نهائياً عن الفرضية 4. لكن إذا كانت العبارة $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ خاطئة، فإن نفيها صحيح. هذا البند 19، وهو المطلوب إثباته.

إذن فالبرهان هو صنع الاستدلال الذي يثبت المبرهنة، وهو تمرين دقيقة جداً في المنطق، وأكثر تدقيقاً في شواهده وأكثر تشدداً في متطلبات أقناعة، والتفسير يجب أن يبقى قليل الكلام وافي بالمعنى المقصود وجوهري. ويمكن أن نعرفه بأنه عبارة عن معالجة لفظية و رمزية تتمثل في تتابع من العبارات نستنبط كلاً منها من سابقاتها استناداً إلى شواهد معترف بصحتها (مثل البديهيات، المبرهنات، الفروض، تعاريف) واستنباط بأساليب يقرها المنطق.

2.3 الأدلة الخاطئة

البرهان الجيد يحلل الأدلة الرياضية إلى عبارات متعاقبة، وفي بناء الدليل الرياضي ترتكب الأخطاء بسهوله. الوعي بهذه المشاكل سيساعدنا على تفاديها. من هذه الأخطاء

1. أن تبدأ من نهاية البرهان وتنتهي في بدايته.
2. المنطق الخاطئ. هذا يتضمن

- النفي الغير صحيح للعبارة.

- إثبات عكس الشيء بدلاً من الشيء نفسه.
- الفرضية الخاطئة.

3. اعتبار التحقق برهان.
4. إساءة التعامل مع الصيغ. على سبيل المثال، فقد نعطي الدالة قيمة خارج مجالها ($\ln(0)$) ، أو دالة المعكوس غير صحيحة، أو تحتوي على معلومات زائدة، أو التصميم غير واضحة ... الخ.
5. الاستعمال الخاطئ للتعاريف أو استعمال التعاريف الخاطئة. أن أي تعريف معيب قد يشير ضمناً إلى أن الخاصية المعرف غير موجودة مطلقاً، أو انه لا توجد فكرة واضحة عنها.

لنناقش الأمثلة التالية:

مثال: اثبت أن $\sqrt{2}+\sqrt{6}<\sqrt{15}$

برهان خاطئ.

$$\sqrt{2}+\sqrt{6}<\sqrt{15} \Rightarrow \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2<15$$
$$\Rightarrow 8+2\sqrt{12}<15$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{12}<7$$
$$\Rightarrow 48<49$$

العبارة الأخيرة صحيحة التي تكمل البرهان. □

كنا قد افترضنا لإثبات P ، حيث $P=\sqrt{2}+\sqrt{6}<\sqrt{15}$. افترضنا P نفسها، واستنتجنا بشكل صحيح منه العبارة الصحيحة $Q=(48<49)$. إذن ما زلنا لا نعرف إذا ما كانت العبارة الأصلية P خاطئة أو صحيحة، لأن إذا بدنا بالعبارة الخاطئة $\sqrt{2}+\sqrt{6}<-\sqrt{15}$ كنا سنصل بالضبط إلى نفس الاستنتاج. أن ما قمنا به هو "استكشاف Exploration ″ وفي الاستكشاف نبحث عن خطوة تالية تؤدي إلى خطوة سابقة لكن العكس ليس بالضرورة صحيح، لان هناك عدد لا نهائي من الإمكانات للخطوة التالية، ولكن واحدة أو أثنين منها لحسن الحظ

أكثر وضوحاً من بقيتها، ومن المهم تذكر دائما أن الاستكشاف ليس برهاناً وإنما بحث عن نقطة بداية للبرهان، وخطوات الاستكشاف هي خطوات البرهان بالترتيب العكسي. يوجد طريقتان لإثبات مسائل من هذا النوع

الطريقة الأولى: أعادة تتبع الخطوات. نأخذ سلسلة الاستنتاجات المعروضة أعلاه؛ ثم نبدأ من حيث انتهينا ونحاول إثبات سلسلة النتائج العكسية.

البرهان.

$$48 < 49 \Rightarrow \sqrt{48} < \sqrt{49}$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{12} < 7$$
$$\Rightarrow 8 + 2\sqrt{12} < 15$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^2 < 15$$
$$\Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{6} < \sqrt{15}$$

أثبتنا القضية المنطقية $\mathrm{TRUE} \Rightarrow P$ ، الذي منه نستنتج أن P صحيحة. □

الطريقة الثانية: البرهان بالتناقض.

البرهان. دعنا نفترض $\neg P$:

$$\sqrt{2} + \sqrt{6} \geq \sqrt{15} \Rightarrow \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^2 \geq 15$$
$$\Rightarrow 8 + 2\sqrt{12} \geq 15$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{12} \geq 7$$
$$\Rightarrow 48 \geq 49$$

أثبتنا بأن $\neg P \Rightarrow \mathrm{FALSE}$ ، الذي يشير ضمناً بأن $\neg P$ خاطئة، لذا P صحيحة □

مثال: مبرهنة سيئة. إذا كان $x^2 \neq 0$ ، فإن $x^2 > 0$.

برهان سيئ. إذا كان $x > 0$ فإن $x^2 = xx > 0$. إذا كان $x < 0$ فإن $-x > 0$ ، لذلك $(-x)(-x) > 0$ ، أي أن $x^2 > 0$. □

عبارة المبرهنة غير مكتملة في أنه لا يوجد معلومات حول الكمية x هل هي عدد حقيقي أو صحيح أو نسبي، ..ز الخ، في البرهان الفرضية $x^2 \neq 0$ لم تستعمل، بالإضافة إلى أن هذا برهان بالحالات و سيكون مفيد إذا كان واضح كالتالي:

مبرهنة. لكل الأعداد الحقيقية x ، إذا كان $x^2 \neq 0$ ، فإن $x^2 > 0$.

البرهان. لنفرض أن x عدد حقيقي بحيث أن $x^2 \neq 0$. فإن $x \neq 0$ وله حالتين:

(*i*) إذا كان $x < 0$ فإن $-x > 0$ ، لذا $(-x)(-x) > 0$ ، أي أن $x^2 > 0$.
(*ii*) إذا كان $x > 0$ فإن $x^2 = xx > 0$. □

مثال: مبرهنة سيئة. $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a \in \mathbb{Q} \wedge b \notin \mathbb{Q}) \Rightarrow a + b \notin \mathbb{Q}$.

برهان سيئ. نفرض أن $a + b \in \mathbb{Q}$. فإن $a + b = m/n$.

إذا كان $a \in \mathbb{Q}$ ، فإن $a = p/q$ ، و $b = m/n - p/q \in \mathbb{Q}$. □

تحجب الصياغة الرمزية المحتوى البسيط للمبرهنة، مزج الكلمات بالرموز ضروري، وبالتالي يمكن أعادة صياغة نص المبرهنة بالكلمات لتحسين الوضوح. البرهان بسيط لكنه قدم رموز غير ضرورية، بينما الوضوح يمكن أن يحسن بإدخال بعض التعليقات البسيطة.

مبرهنة. مجموع عدد نسبي وغيرنسبي هو عدد غير نسبي.

البرهان . نفرض أن a و z عدد نسبي وغير نسبي على التوالي. اعتبر المتطابقة $z = (a + z) - a$. إذا كانت $a + z$ عدد نسبي، فإن z ستكون أيضاً عدد نسبي. هذا التناقض يوضح بأن $a + z$ يجب أن تكون عدد غير نسبي . □

مثال: مبرهنة. لكل الأعداد الأولية p ، العدد الصحيح $2^p - 2$ قابل للقسمة بـ p .

برهان خاطئ.

$$2^2-2 = 2\cdot 1,\ 2^3-2=3\cdot 2,\ 2^5-2=5\cdot 6,\ 2^7-2 = 7\cdot 18,\ etc.$$

□

المبرهنة أثبتت فقط لـ $p = 2,3,5,7$. فالتحقق من مبرهنة معينة بواسطة المتطلبات العددية لهذه المبرهنة لا يمثل برهاناً.

مثال:

$1=1$

$1+3=2^2$

$1+3+5=3^2$

$1+3+5+7=4^2$

……………………..

إذن: ’’ مجموع الأعداد الفردية ابتداء من الواحد الصحيح يساوي مربع عدد هذه الأعداد ‘‘.

هذا لا يمثل برهاناً لأنه رغم استناده إلى عبارات صحيحة، بل أنه يمثل فقط **تعميماً** محتملاً (تخمين) وليس مؤكد لأنه اعتمد على حالات خاصة والقضية الجزئية لا تصح للحكم على قضية كلية.

مثال: مبرهنة خاطئة. إذا كان $3 = 1$ و إذا كان $7 = 9$ ، فإن $3+7 = 9+1$.

هذا ليس برهانا على أن $1+9 = 3+7$ (رغم أن النتيجة صحيحة) لأنه أعتمد على عبارات (فرضيات) غير معترف بصحتها.

مثال: الصيغة الغير مرتبة التالية

$$f(x)=\frac{14x-2x^3-2x^2+14}{-2x-4}$$

تحتوي على معلومات زائدة (العامل المشترك بين البسط والمقام) الحدود في البسط لم ترتب، ويوجد العديد من الإشارات السالبة، إذن خصائص $f(x)$ غير واضحة. يوجد عدة طرق لتحسين تصميم الصيغة:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 7x - 7}{x + 2}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2 - 7)}{x + 2}$$

$$f(x) = x^2 - x - 5 + \frac{3}{x + 2}.$$

إذا كانت درجة ومعاملات f مهمة، فإنه النسخة الأولى ملائمة. النسخة الثانية تجعل الأمر أسهل لحل المعادلة $f(x) = 0$. النسخة الثالثة تعد للتكامل f . طبقنا القاعدة الأساسية '' اقسم و افتح''.

مثال: في التعبير الغير منظم

$$R = x(ad - bc) - y(ad - cb)^2 + z(ad - cb)^3$$

التعبير الجزئي $ad - bc$ يظهر كوحدة، نستغل هذه الحقيقة لتحسين التصميم:

$$R = xk - yk^2 + zk^3 \qquad k = ad - bc.$$

الصيغة أكثر ترتيباً وبنية R أوضح.

مثال: تعريف خاطئ. لنفرض أن X, Y, Z فئات، ولنفرض أن

$$A := X \backslash Y \backslash Z.$$

الفئة A موجودة، لكنها لم تعرف بشكل محدد، لأن معامل فئة الفرق لا يخضع لقانون التجميع. على العموم لدينا

$$(X \backslash Y) \backslash Z \neq X \backslash (Y \backslash Z)$$

لذلك في تعريف A يجب أن نوضح أي من التعبيرين نقصد $(X \backslash Y) \backslash Z$ أو $X \backslash (Y \backslash Z)$.

مثال: تعريف خاطئ. لنفرض أن A و B فئات ولنفرض أن $f, g : A \to B$ دوال. نعرف الدالة $h = f + g$ كالتالي:

$$h : A \to B \qquad x \mapsto f(x) + g(x).$$

التعريف يحتوي على فرضية مخفية هي أن العناصر في المجال المقابل يمكن أن تجمع مع بعض. أي أن عملية الجمع يمكن أن تفسر بطرقتين: B فئة حيث الجمع غير معرف (على سبيل المثال، إذا كانت g و f دوال افتراضية)، أو غير مغلقة تحت الجمع (على سبيل المثال، إذا كانت B فترة). التعريف الصحيح هو

نفرض أن A فئة ولنفرض أن B فئة مغلقة تحت الجمع ولنفرض أن $f, \mathrm{g} : A \to B$ دوال. نعرف الدالة $h = f + \mathrm{g}$ كالتالي:

$$h : A \to B \qquad\qquad x \mapsto f(x) + \mathrm{g}(x).$$

مثال: تعريف خاطئ. لنفترض أن f يعطى بـ :

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \qquad\qquad f(x) = x^2 y + 1.$$

الخطأ بسيط لكن قاتل: التعبير $f(x)$ يتضمن الكمية الغير محددة y .

يوجد العديد من التفسيرات المنطقية لما يمكن أن تعني هذه الصيغة.

1. إعادة تعريف المجال يحل محل المعلومات المفقودة.

$$f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q} \qquad\qquad f(x, y) = x^2 y + 1.$$

في هذه التعريف y نسبية أيضاً.

2. نعتبر المتغير المفقود بارامتر.

$$f_\lambda : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \qquad f_\lambda(x) = \lambda\, x^2 + 1 \qquad \lambda \in \mathbb{Q}.$$

أبرزنا التغيير في وضع المتغير y بتحويله إلى الحرف اليوناني لمدى، وعملة كدليل سفلي. لكل قيمة لـ λ ، لدينا دالة مختلفة.

3. نعتبر المتغير المفقودة مبهم. في هذه الحالة $f(x)$ كثيرة حدود في y ، ويجب أن نعيد تعريف المجال المقابل لـ f وفقاً لذلك.

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}[y] \qquad\qquad f(x) = x^2 y + 1.$$

الرمز $\mathbb{Q}[y]$ يشير إلى فئة كل كثيرات الحدود في المبهم y ، بمعاملات نسبية.

3.3 بعض استراتيجيات البرهان الرياضي

نعني بالإستراتيجية هنا خطة التحرك للوصول إلى هدف محدد، وهو أثبات صحة القضية المطلوب البرهنة عليها، وتتضمن تتابع التحركات أو الخطوات في هذه الخطة، والتوتولوجية أو الصيغة المنطقية الصحيحة التي ترتكز عليها هذه الخطة.

ومن المهم هنا أن نؤكد أن الوصول إلى إثبات صحة قضية ما أمر يحتاج إلى خبرة ودراية ونظرة شمولية وتحليل لعناصر الموقف ثم إعادة تركيبه بمرونة ويقظة عقلية. كما يحتاج إلى التعرف على ما هو معطى وما هو مطلوب وتحليل المطلوب في ضوء المعطيات وفي ضوء الخواص والمبرهنات السابقة لهذه القضية في النظام الرياضي الذي تنتمي إلية وذلك حتى يتمكن الباحث من أن يرسم لنفسه خطة مناسبة من التحركات يؤدي في النهاية إلى المطلوب.

1.3.3 البرهان المباشر Direct Proof

ويقصد به إثبات صحة المطلوب نفسه أي أن تتابع العبارات المستخدمة في البرهان تؤدي مباشرة إلى العبارة التي تمثل المطلوب ذاته. البرهان المباشر غالباً ما يستخدم لإثبات مبرهنات من الشكل " إذا كان P ، فإن Q ". فكل برهان مباشر يجب أن يبدأ بالفرض P ، وأن يحدد المطلوب إثباته، وبعد عدة خطوات متتابعة نصل إلى النتيجة Q .

مثال: مبرهنة. إذا كان $x + 2 = 5$ فإن $x = 3$ حيث x عدد صحيح .

البرهان. [نفترض صحة القضية P ثم نثبت ـ بالاستعانة بخواص النظام ـ صحة القضية Q]

نفرض أن $x + 2 = 5$

المطلوب إثبات أن $x = 3$

$(x+2) + (-2) = 5 + (-2)$ [خاصية التساوي]

$x + (2 + (-2) = 3$ [خاصية التجميع في الأعداد الصحيحة]

$x + 0 = 3$ [خاصية النظير الجمعي في $\mathbb{Z}$]

$x = 3$ [خاصية العنصر المحايد في $\mathbb{Z}$]

وبذلك نكون قد أثبتنا أن $x = 3$ ، وفي نفس الوقت أثبتنا صحة العبارة كاملة وهي إذا كان $x + 2 = 5$ فإن $x = 3$. □

مثال: مبرهنة. إذا r_2 و r_1 جذران مختلفإن لكثيرة الحدود $p(x) = x^2 + bx + c$ ، فإن $r_1 r_2 = c$ و $r_1 + r_2 = -b$

البرهان. نفترض أن كثيرة الحدود $p(x)$ تتحلل إلى

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)$$

بفك الأقواس في الجانب الأيمن نحصل على

$$p(x) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2$$

بمقارنة معاملات كثيرة الحدود أعلاه بـ $p(x) = x^2 + bx + c$ نحصل على

$$r_1 r_2 = c. \quad \text{و} \quad r_1 + r_2 = -b \qquad \square$$

البرهان المباشر غالباً يبدأ بإعطاء أسماء للأشياء (ترميز)، بعض المؤلفين يوضعون أسماء الأشياء في نص المبرهنة.

2.3.3 البرهان بالتعاكس Proof by contrapositive or Contraposition

التعاكس للنتيجة $P \Rightarrow Q$ هو النتيجة $\neg Q \Rightarrow \neg P$. والذي يعرف بأنه أثبات صحة الحقيقة بإثبات أن تعاكسها صحيح. النتيجة وتعاكسها متكافئات منطقياً($\neg Q \Longrightarrow \neg P \equiv P \Longrightarrow Q$).
هذا التكافؤ يعطينا طريقة لإثبات النتائج يسمى البرهان بالتعاكس. فبدلاً من إثبات المبرهنة بشكلها الأصلي، أحياناً يكون من الأسهل إثبات تعاكسها. فعلى سبيل المثال، المبرهنة '' إذا كان n^2 عدد فردي، فإن n عدد فردي'' يمكن أن تثبت بدلاً من ذلك '' إذا كان n عدد زوجي ، فإن n^2 عدد زوجي''.

مثال: مبرهنة. إذا كان x, y عددان صحيحان وكان مجموعهما عدد زوجي، فإن العددان متساويان.

البرهان. العبارة المكافئة لهذه المبرهنة هي ''إذا كان x, y عددان صحيحان غير متساويان، فإن مجموعهما عدد فردي''، لذا نفترض أن x, y غير متساويان (أي أحداهما فردي والآخر زوجي) أذن يوجد عددين صحيحين k, m بحيث $x = 2k\ , y = 2m + 1$

الآن فإن مجموعهما هو

$$
\begin{aligned}
y + x &= 2m + 1 + 2k \\
&= 2(m + k) + 1
\end{aligned}
$$

وهذا عدد صحيح فردي □

البرهان بالتعاكس مماثل بنائيا للبرهان المباشر، كيف نقرر بين البرهان المباشر والبرهان بالتعاكس؟

يجب أن نقارن بين الفرضيات P و $\neg Q$ ، ونقرر أي منهما أسهل. أحياناً من الضروري تجريب كلا المدخلين لاكتشاف الأسهل.

مثال: اعتبر العبارة

$$\forall n \in \mathbb{N}, (2^n < n!) \Rightarrow (n > 3)$$

الفرضية $(2^n < n!)$ صعبة لأن قيمتها لا تحسب بسهولة. بالمقارنة بفرضية التعاكس الأبسط $(n \leq 3)$ ، وبالتالي نثبت العبارة المكافئة (بالتعاكس)

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq 3 \Rightarrow (2^n \geq n!)$$

نلاحظ بأن التعبير المنطقي $(2^n \geq n!)$ صائب لثلاث قيم لـ n فقط.

البرهان. يجب أن ندقق في ثلاث حالات فقط:

$n = 1 : 2 = 2^1 \geq 1! = 1$

$n = 2 : 4 = 2^2 \geq 2! = 2$

$n = 3 : 8 = 2^3 \geq 3! = 6.$

□

3.3.3 البرهان بالتناقض Proof by contradiction

البرهان بالتناقض للقضية المنطقية P ، هو أن نثبت أنه من المستحيل ألا يكون المطلوب غير صحيح فنفترض أن $\neg P$ ونجد أن هذا يؤدي إلى تعارض أو تناقض مع المعطيات أو المسلمات أو المبرهنات المعترف بصحتها. ويسمى في هذه الحالة البرهان بالتناقض والذي يعرف بأنه إثبات صحة الحقيقية بإثبات أن عكسها باطل.

لهذا فإننا نبين في هذا البرهان أن إذا كان $\neg P$ يؤدي إلى قضية خاطئة فإن P صحيحة، أي أن:

$$\neg P \Rightarrow \text{FALSE}.$$

فعلى سبيل المثال البرهان بالتناقض للعدد الغير نسبي $\sqrt{2}$ الذي تقدم ذكره.

نقدم برهان كلاسيكي بالتناقض أخر.

مبرهنة. لا توجد حلول صحيحة موجبة للمعادلة الديافنتينية (Diophantine) $x^2 - y^2 = 1$

البرهان. سنفترض أنه يوجد حل (x, y) حيث x و y أعداد صحيحة موجبة

بتحليل المعادلة المعطاة نجد أن $(x-y)(x+y) = 1$.

أذن

أما $x + y = 1$ و $x - y = 1$ وهذا يؤدي إلى أن $x = 1\ ,\ y = 0$ وهذا يتناقض مع فرضنا،

أو $x + y = -1$ و $x - y = -1$ وهذا يؤدي إلى أن $x = -1\ ,\ y = 0$ وهذا يتناقض مع فرضنا.

إذن أثبتنا أن الفرض العكسي أدى إلى قضية خاطئة (متناقضة) وهذا يثبت صحة المبرهنة المطلوب إثباتها. □

ملاحظة: يقدم بعض الرياضيين اعتراض على هذه الطريقة وقد أجتنبها في الماضي بعض مشاهير الرياضيين حيث اعتبروه طريقة غير منطقية.

4.3.3 **البرهان بالحالات** Proof by Cases

وهو أن نثبت أنه لا يمكن أن يحدث ألا المطلوب وذلك عندما يكون المطلوب يمثل حالة من عدة حالات معدودة هي كل ما يمكن أن يحدث نتيجة المعطيات.

مثال: اعتبر العبارة التالية

فئة حل المتراجحة $2|x| > |x-1|$ متممة الفترة المفتوحة $(-1,1/3)$.

البرهان. افرض أن x عدد حقيق. يوجد ثلاث حالات.

الحالة الأولى: إذا كانت $x < 0$ ، فإن المتراجحة هي $-2x \geq 1-x$ ، تؤدي إلى $x \leq -1$.

الحالة الثانية: إذا كانت $0 \leq x < 1$ ، فإن المتراجحة هي $2x \geq 1-x$ ، تؤدي إلى $1/3 \leq x < 1$.

الحالة الثالثة: إذا كانت $x \geq 1$ ، فإن المتراجحة هي $2x \geq x-1$ ، تؤدي إلى $x \geq 1$.

لذلك فئة الحل المطلوبة تمثل اتحاد الفترات $x \leq -1$ ، أو $1/3 \leq x < 1$ ، أو $x \geq 1$،

$$(-\infty,-1] \cup [1/3,1) \cup [1,\infty) = (-\infty,-1] \cup [1/3,\infty).$$

التي هي اتحاد الشعاعين، هذه الفئة حصل عليها من خط الأعداد الحقيقي بواسطة ازالة الفترة المفتوحة $(-1,1/3)$ ، كما هو مطلوب □

لاحظ الاختلاف الدقيق بين المتراجحات الصارمة وغير الصارمة، لتجنب فقدان أو تكرار قيمة x .

مثال: مبرهنة. إذا n عدد صحيح موجب، فإن n^7-n تقبل القسم على 7 .

البرهان. أولاً نحلل $n^7 - n$ فنجد أن

$$n^7 - n = n\,(n^6 - 1)$$
$$= n(n^3 - 1)(n^3 + 1)$$
$$= n(n-1)(n^2 + n + 1)(n+1)(n^2 - n + 1)$$

الآن يوجد سبع حالات تعتمد على $n = 7q + r$ حيث $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

الحالة الأولى: $n = 7q$ ، فإن n أحد عوامل $n^7 - n$ وبالتالي تقبل القسمة على 7 .

الحالة الثانية: $n = 7q + 1$ ، فإن $n - 1 = 7q$ أحد عوامل $n^7 - n$ وبالتالي تقبل القسمة على 7 .

الحالة الثالثة: $n = 7q + 2$ ، فإن بالتعويض في العامل $(n^2 + n + 1)$ نجد أن

$$(7q + 2)^2 + (7q + 2) + 1 = 49\,q^2 + 35\,q + 7$$

ومن الواضح أنه يقبل القسمة على 7 .

الحالة الرابعة: $n = 7q + 3$ ، فإن بالتعويض في العامل $(n^2 - n + 1)$ نجد أن

$$(7q + 3)^2 - (7q + 3) + 1 = 49\,q^2 + 35\,q + 7$$

ومن الواضح أنه يقبل القسمة على 7 .

الحالة الخامسة: $n = 7q + 4$ ، فإن بالتعويض في العامل $(n^2 + n + 1)$ نجد أن

$$(7q + 4)^2 + (7q + 4) + 1 = 49\,q^2 + 63\,q + 21$$

ومن الواضح أنه يقبل القسمة على 7 .

الحالة السادسة: $n = 7q + 5$ ، فإن بالتعويض في العامل $(n^2 - n + 1)$ نجد أن

$$(7q + 5)^2 - (7q + 5) + 1 = 49\,q^2 + 63\,q + 21$$

ومن الواضح أنه يقبل القسمة على 7 .

الحالة السابعة: $n = 7q + 6$ ، فإن $n + 1 = 7q + 7$ وهو أحد عوامل $n^7 - n$ وبالتالي تقبل القسمة على 7 . □

5.3.3 برهان الوصل Proving conjunctions

سبق أن أشرنا إلى الشرط اللازم والكافي ففي العبارة الشرطية ($P \Longrightarrow Q$) يسمى P شرطاً كافيا لحدوث Q وتسمى Q شرطاً لازما لحدوث P . وفي والعبارة التبادلية ($P \iff Q$) فإن كل من P , Q شرطاً لازماً وكافياً للآخر وتقرأ P إذا وفقط إذا Q ، ويمكن أن يحل المصطلح ' بالضبط precisely ' ليعني ' إذا وفقط إذا '.العبارات P , Q تسمى المترابطون conjuncts . وإذا ما طلب إثبات صحة عبارة بهذه الصورة 'P إذا وفقط إذا Q ' فمعنى ذلك أنه مطلوب أثبات كل من ' إذا P ، فإن Q ' و ' إذا Q ، فإن P ' ، ويسمى هذا النوع من الإثبات بإثبات الوصل. ويحدث هذا في حالات يكون فيها كل من المبرهنة وعكسها صحيح.

البرهان المباشر للوصلة $P \wedge Q$ يشتمل على براهين منفصلة لمترابطين، الذين يجب أن يميزوا بشكل واضح في قائمة باستعمال الأرقام الرومانية الصغيرة ، $i), ii), iii), iv)$, ect. وفي كل حالة يجب أن نبدأ بذكر ما ننوي إثباته. أي أن البرهان يأخذ الشكل التالي

برهان.

(i) نثبت $P \Rightarrow Q$

(ii) نثبت $Q \Rightarrow P$

مثال: مبرهنة. العدد الطبيعي $n > 1$ أولي إذا وفقط إذا n تقسم $(n-1)! + 1$.

هذه المبرهنة تنص على الوصلة $P \wedge Q$ ، حيث

$$P = \forall n > 1, (n \text{ عدد أولي}) \Rightarrow (n \mid (n-1)! + 1)$$

$$Q = \forall n > 1, (n \mid (n-1)! + 1) \Rightarrow (n \text{ عدد أولي}).$$

أن خلاصة البرهان واضحة الآن.

البرهان.

(i) لنفرض أن n عدد أولي. المطلوب إثبات: n تقسم $(n-1)! + 1$ . ...

(ii) لنفرض أن n عدد طبيعي أكبر من 1 الذي يقسم $(n-1)! + 1$. المطلوب إثبات: n عدد أولي. ...

مثال: مبرهنة. الفئة $\mathbb{Z}\backslash n\mathbb{Z}$ حقل بالضبط إذا كان n عدد أولي.

البرهان. لنفرض أن $n \in \mathbb{N}$ معطى.

(i) نفرض أن $\mathbb{Z}\backslash n\mathbb{Z}$ حقل. المطلوب أثبات: n عدد أولي. ...

(ii)نفرض أن n عدد أولي. المطلوب أثبات: $\mathbb{Z}\backslash n\mathbb{Z}$ حقل. ...

6.3.3 البرهان باستخدام الاستقراء الرياضي Mathematical induction

يستخدم الاستقراء الرياضي لإثبات صحة عبارات رياضية تتعلق بالأعداد الصحيحة الموجبة. وتعتمد طريقة الاستقراء الرياضي أساساً على المسلمة الثالثة من مسلمات العالم الرياضي" بيانو piano" (1858-1932) والتي أوضحت خواص مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ وهذه المسلمات هي:

1) لكل عنصر $n \in \mathbb{N}$ يوجد عنصر آخر n يسمى تالي العنصر n .
2) العنصر 1 ينتمي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ وهو ليس تالي لأي عنصر آخر في $\mathbb{N}$ ، أن العنصر 1 هو أول عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.
3) كل مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية تحتوي العنصر 1 وتحتوي العنصر التالي لكل عنصر فيها هي المجموعة $\mathbb{N}$ بذاتها.

وتعتمد طريقة البرهان باستخدام الاستقراء الرياضي على الخطوات الثلاث التالية:

1) نختبر صحة التعبير المعطى عند بعض القيم العددية الصحيحة الموجبة ولتكن فرضاً عند $n = 1, n = 2$ وهذه الخطوة في حد ذاتها لا تحمل يقيناً مطلقاً يثبت صحة تعبير ما أو عدم صحته.
2) نفترض صحة التعبير المعطى عند $n = k$ حيث $k \in N$.

3) نثبت أن التعبير المعطى يجب أن يكون صحيحاً عندما $n = k + 1$ إذا صح ما افترضنا صحته في ثانياً، ومن ذلك نستنتج أن التعبير صحيح دائماً لكل قيم $n \in \mathbb{N}$.

ملاحظة:

- هناك حالات خاصة نجد فيها أن التعبير المعطى لا تتحقق صحته عند $n = 1$ ولكنها تكون صحيحة لكل الأعداد التي تلي نقطة بداية أخرى ولذا نبدأ بإثبات صحة التعبير المعطى اعتباراً من نقطة البداية هذه .
- الاستقراء الرياضي لا جدوى منه لاشتقاق الصيغ. وإنما هو وسيلة جيدة لإثبات صحة الصيغة التي قد يعتقد أنها صحيحة.

مثال: لنثبت بطريقة الاستقراء صحة العلاقة التالية:

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

البرهان. العلاقة المعطاة يمكن صياغتها في الصورة التالية:

$$6 + 24 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3). \qquad (1)$$

ولإثبات صحة العلاقة (1) :

أولاً. نختبر صحة العلاقة (1) عند بعض القيم الصحيحة الموجبة

عندما $n = 1$ ، فإن $6 = 6$ الطرفين متساويان.

عندما $n = 2$ ، فإن $30 = 30$ الطرفين متساويان.

ثانياً. لنفترض صحة العلاقة (1) عند القيم الصحيحة الموجبة $n = k$ ، أي:

$$6 + 24 + \cdots + k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3). \qquad (2)$$

ثالثاً. نحاول إثبات صحة العلاقة (2) عند القيمة الصحيحة الموجبة التالية $n = k + 1$ وذلك بإضافة الحد $(k+1)(k+2)(k+3)$ إلى طرفي العلاقة (2) :

$$
\begin{aligned}
6 + 24 + \cdots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) \\
&= \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3) + (k+1)(k+2)(k+3) \\
&= (k+1)(k+2)(k+3)\left(\frac{1}{4}k + 1\right) \\
&= \frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

وواضح إن الطرف الأيمن للعلاقة (3) على صورة الطرف الأيمن للعلاقة (2) بعد استبدال كل k بـ $(k+1)$ وذلك يؤكد صحة العلاقة (2). □

وبهذا نكون قد أثبتنا أن العلاقة المعطاة صحيحة عند $n = 1,2,\dots,k,k+1$ ، أذن فهي صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

الفصل الرابع
المقال العلمي

المقال العلمي هو البحث المنشور أو المعد للنشر في أحدى المجلات الرياضية العلمية. والذي شكله العام: عنوان، موجز، كلمات مفتاحيه، مقدمة، جسم، كلمة شكر، المراجع، الملاحق.
ويمكن تلخيص خطوات كتابة أي مقال علمي رياضي بالنقاط التالية:

- الخطوة الأولى هي تحديد الموضوع المراد الكتابة فيه، وفهم لطبيعة تكوين مجاله الرياضي.
- الخطوة الثانية هي تجميع الأبحاث السابقة التي تتحدث عن الموضوع من المجلات بشكل أساسي، وأحياناً من الكتب. وذلك لضمان الجانب الإبداعي في البحث وعدم التكرار.
- الخطوة الثالثة هي الالتزام بشروط كتابة المقال العلمي الرياضي، وهو ما سنتحدث عنه في هذا الفصل.

1.4 العنوان

أن اختيار عنوان Title لبحث ليس بالأمر السهل، فالعنوان الجيد يعطي البحث هويته الفريدة، و يصف محتواه، وبالتالي يستحق بعض الوقت للتفكير فيه. والخطوة الأولى لكتابة عنوان لبحث هو الرجوع إلى عناوين البحوث ذات الصلة بموضوع الدراسة في المجلات، قوائم المراجع، قواعد البيانات. وذلك لمساعدة الباحث للحصول على تشكيلة واسعة من الإمكانيات. والخطوة الأخرى هي الالتزام بالشروط التالية للعنوان:

- لا يجب أن يكون طويلاً .
- لا يجب أن يكون عاماً جداً .

- أن يحتوي على كلمات مفتاحيه، أي يجب أن يشير إلى أحدى فروع الرياضيات.
- أن لا يحتوي على رموز رياضية معقدة مع تجنب استخدامها أن امكن.

لنفحص الآن العناوين التالية.

التحليل الحقيقي التمهيدي.

المصطلح ' تمهيدي ' مناسب في عنوان كتاب دراسي، وبالتالي هذا المصطلح غير ملائم لعنوان مقالة علمية. العبارة ' التحليل الحقيقي ' أكثر عمومية، وتعرف منطقة واسعة في الرياضيات.

الخوارزميات الإقليدية الجاوسية.

تلخيص نتيجة بجملة تجعله عنوان فعال لمقال بحثي.

الحلول الجبرية للمعادلات التفاضلية الجزئية الخطية.

أنه طويل ولكنه يحتوي على كلمات مفتاحيه تجعله غني بالمعلومات لذلك فهو جيد.

متتابعات القواسم ذات الفروق المنتهية.

عنوان جيد، يعلن عن مفهوم جديدة ' متتابعة القواسم' هذا المفهوم يجب أن يعرف ويعطى رمزاً في بند التعاريف. بالإضافة إلى ذلك يحتوي على كلمة مفتاحيه 'الفروق المنتهية'.

2.4 الموجز Abstract

الموجز هو ملخص محتوى البحث المعبر عن العنوان الذي يهدف لتقديم النتائج الأساسية للبحث دون الخوض في التفاصيل. أن الموجز هو الواجهة الرئيسية للبحث إذا كتب بشكل جيد، يكون متمم للعنوان و يعطي الانطباع الأول للقارئ وبالتالي يجب كتابته بعد الانتهاء من كتابة البحث كله و بشكل مرتب ويعكس فعلاً ما جاء في البحث بحيث يبني القارئ صورة عن الموضوع بمجرد قراءته، أن التركيز على الموجز خطوة هامة لقبول البحث للنشر وقد أظهرت

الدراسات أن المقالات ذات الموجز السيئ نسبة قبولها للنشر ضعيفة بغض النظر عن محتواها العلمي. ولكتابة موجز جيد يجب مراعاة التالي:

- يجب أن يكون قصيراً بحيث لا يتجاوز 200 كلمة.
- تحديد فكرة البحث في الفقرة الأولى.
- النتائج الرئيسية يجب أن تظهر، و يعبر عنها بدقة ووضوح.
- يجب أن لا يحتوي على صيغ رياضية معقدة، أومعادلات معروضة، وبالتالي اختصار استخدام الرموز إلى الحد الأدنى مع تجنب استخدامها أن امكن.
- إزالة أي رموز غير ضرورية.
- المفردات المتخصصة يجب أن تختصر للحد الأدنى، لكي لا يستبعد قراء محتملين.
- يجب أن يكون مستقلاً عن البحث، أي أنه لا يجب أن يحتوي على أي إشارات مرجعية فيه، أي يجب أن لا يحتوي على ارقام: استشهاد، هوامش، أو مراجع، تشير إلى: معادلات، اشكال، جداول، أو مبرهنات. والسبب في ذلك أن الموجز يتم التعامل معه بصورة مستقلة عند إدخاله إلى قاعدة البيانات للمجلة المنشور فيها.
- إذا كأن البحث من أنتاج شخص واحد فليستخدم ضمير الجماعة ' نحن we ' ليشير بذلك إلى نفسه وإلى القارئ، أما إذا كأن من أنتاج عدة أشخاص فليستخدموا كلمة 'المؤلفون Authors' مع تحديد عمل كل شخص في جسم البحث. أنظر الأمثلة:
  ' نرى من (1) أن ..... دعنا الآن نثبت أن .... '

  ' المؤلفون أثبتوا في [31] أن ..... '

  ' هذه النتائج كان قد حصل عليها معاً بواسطة أحمد و أنا '

- إزالة أي عبارات غير لازمة. فمثلاً بدلاً من العبارة ' في هذا البحث أثبتنا ....، ومن بين النتائج الأخرى ...' اكتب العبارة ' أثبتنا أن ... '
- يكتب الملخص في الصفحة الأولى للمقال بحجم خط اصغر من خط المستند.

الآن نفحص ملخص اقل مثالية مأخوذة من الأدب الرياضي، ونعمل على تحسينه.

موجز سيئ. نفرض أن F راسم نسبي من الدرجة $n \geq 2$ من كرة ريمان $\bar{C}$. في هذا العمل طورنا نظرية حالات التوازن لنظام دوال Hölder المتصلة f لأي ضغط أكبر من f. سنوضح بأن يوجد درجة مكافئة وحيدة (درجة الإشارة) و حالة توازن وحيدة، التي تكافئ الدرجة المكافئة بكثافة مستمرة موجبة.

العيب البسيط: الرموز F, n و $\bar{C}$ مقدمة، لكن لم تستعمل مرة ثانية في الموجز. وبالتالي هذه الرموز غير ضرورية. الرموز الجديدة تصرف الانتباه بدلاً من مساعدته. حتى إذا استعملت هذه الرموز مرة ثانية في النص، الموجز ليس المكان المناسب للترميز وهذه التعاريف يجب أن تؤجل. الرمز f في الجملة الثانية مستعمل بشكل ملائم. الجملة ' في هذا العمل' زائدة عن الحاجة ويجب ببساطة حذفها. تعبير من هذا النوع يصلح لغرض عمل مقارنة بين البحث الحالي والأعمال الأخرى: ' في 1964 اثبت ميلنور التخمين ... في هذا العمل نثبت ... '

إعادة كتابة الجملة الأولى بدون رموز، الرمز f في الجملة الثانية غير ضروري ويمكن أن نتخلص منه بسهولة . نعيد صياغة الموجز كالتالي:

موجز جيد. نعتبر راسم نسبي لكرة ريمان اكبر من واحد. طورنا نظرية حالات التوازن لنظام دوال Hölder المتصلة لأي ضغط أكبر من الحد الأعلى للدالة. سنوضح بأن يوجد درجة مكافئة وحيدة (درجة الإشارة) و حالة توازن وحيدة، التي تكافئ الدرجة المكافئة بكثافة مستمرة موجبة.

1.2.4 الكلمات ألمفتاحيه Keywords

الكلمات ألمفتاحيه هي فرع المعرفة الرياضية المأخوذة من الأدب الرياضي والمستخدمة في البحث، و التي تساعد القارئ على فهم البحث. وتعتبر جزء من التلخيص فتكتب بعد الموجز مباشرة.

فعلى سبيل المثال البحث الذي عنوانه ' متتابعات القواسم ذات الفروق المنتهية' الكلمات ألمفتاحيه هي ' صيغة جرجوري نيوتن'. أي يفترض أن يكون القارئ على دراية بهذه الصيغة حتى يتسنى له فهم البحث.

3.4 مقدمة Introduction

هي إعطاء فكرة عامة عن البحث، ووصف واضح لجوهر محتواه. فهي مكملة للموجز وشارحة للعنوان، ويجب أن تكتب بعد اكتمال البحث، بحيث لا تتجاوز سبع (1/7) البحث. فمن خلال المقدمة يتم الحكم على البحث ككل. لذا كتابة مقدمة قوية تشجع القارئ على الاستمرار في القراءة ليس بالأمر السهل، السبب في ذلك يتوقف على تقديم تفسير مرضي ومقنع لمفاهيم لم تكن قدمت من قبل. أن الباحث لا يكتب لنفسه بل لغيره ومن الأمور الواجب مراعاتها لضوابط هذه ألكتابه:

- يجب أن تبدأ المقدمة بصياغة المشكلة الأساسية موضوع الدراسة، فإذا لم تستطع فبدلاً من ذلك يجب إعطاء معلومات تاريخية عن جذور مشكلة الدراسة، لأن الفقرة الأولى يجب أن تكون واضحة ومفهومة للقارئ ومشجعة للاستمرار في القراءة.
- لا تكرر نص الموجز في المقدمة. يفترض بأن القارئ يتذكر ما قلته.
- أي مقدمة قوية تعطي خلفية كافية لفهم البحث ككل بدون زيادة.
- عنصران يجب أن يظهرا: نتائجك الرئيسية، ومقارنتها بنتائج الأبحاث السابقة.
- إذا لم تستطيع التعليق على نتائج بعض الأبحاث يجب أن لا تذكرها في المقدمة، ويتم الإشارة إليها. (كمثال: للنتائج الأخرى ذات العلاقة بموضوع البحث انظر [5],[2])
- كل نتائجك الرئيسة يجب أن تظهر، وكذلك التمهيديات الخاصة بك أو المأخوذة من الأدب الرياضي، مع أمكانية إضافة تعليقات حول البراهين، أو أشكال توضيحية، أو بعض التعاريف.
- لا يجب سرد كل التعاريف والترميزات الدقيقة، سوف يكون هناك وقتاً كافي للدقة فيما بعد.
- تجنب إعطاء تفاصيل رياضية لمبرهنات أو صيغ أو طرق أو تعاريف رياضية مألوفة للرياضيين. فعلى سبيل المثال، لا تعطي تفاصيل حول مبرهنة ذات الحدين واكتفي بذكرها فقط.

- استخدام الاسم الوصفي للمبرهنات والدوال والطرق الشهيرة، ويفضل أن تذكر بشكل نصي مقتضب.
- النقاط المهمة نتحدث عنها مرة نظرياً في المقدمة، ومرة أخرى في الجسم، فالمبرهنات و التمهيديات الخاصة بك، التي قدمت في المقدمة تكرر لاحقاً بنفس الترقيم، بشكل حرفي أو مع بعض التعديلات.
- الترتيب المنطقي للأفكار بجعل كل فكرة تقود إلى الفكرة التي تليها بشكل لا يشعر القارئ بوجود فجوة بين الفكرتين.
- قسم النص إلى فقرات، كل فقرة يجب أن تكون حول فكر ة واحدة، بحيث تتكامل مع الفقرة التالية بشكل منطقي، بحيث تكون مجموع الفقرات سلسلة من الحجج المنطقية.
- الأهداف الرئيسية للبحث يجب أن تكون واضحة بشكل غير مباشر.
- ذكر معلومات عن الأقسام أمر لا فائدة منه في أي مقال. مثل " في القسم2 سنعطي بعض الإجراءات التمهيدية"
- في نهاية المقدمة يمكن وضع اقتراحات بحثية مستقبلية لتطوير البحث الحالي أو لإجراء أبحاث أخرى في نفس المجال.

فعلى سبيل المثال لنأخذ مقدمة البحث' متتابعات القواسم ذات الفروق المنتهية'

'' 1 مقدمة

الفروق المنتهية لها استهواء قوي للرياضيين منذ قرون، إسحاق نيوتن خاصة كان يستعملها بعمق، وجزء كبير من الموضوع يرجع مصدره إليه. فقد توصل نيوتن إلى أن الفروق المنتهية من الدرجة nth تكون كثيرة حدود من الدرجة n ، سمية بصيغة الفروق الأمامية للاستكمال، و العكس صحيح، إذا كانت $y^{(n)}(x_m)$ كثيرة حدود من الدرجة n ، فإن $\Delta^n y^{(n)}(x_m)$ ثابتة و $\Delta^{n+1} y^{(n)}(x_m)$ ، $\Delta^{n+2} y^{(n)}(x_m)$ ، ... كلها أصفار. و لإيجاد كثيرة الحدود التي تأخذ القيم التالية

x_m	1	2	3	$\dots$	m
$y^{(n)}$	$y^{(n)}(1)$	$y^{(n)}(2)$	$y^{(n)}(3)$	$\dots$	$y^{(n)}(m)$

سنستخدم صيغة جريجوري نيوتن، التي نستطيع إعادة كتابتها كالتالي

$$y^{(n)}(x_m) = \sum_{i=0}^{n} \binom{x_m - 1}{i} \Delta^i y^{(n)}(1)$$

تستخدم صيغة جريجوري نيوتن في إيجاد الحد العام لبعض أنواع المتتابعات، ففي الأدب الرياضي أنواع عديدة من المتتابعات تختلف باختلاف طرق تكوينها، وطريقة إيجاد حدها العام. . فعلى سبيل المثال، المتتابعة الحسابية لأي أعداد صحيحة تختلف عن المتتابعة الهندسية لأي أعداد صحيحة من حيث طريقة تكوين كل منهما وطريقة إيجاد حدهما العام.

فهل نستطيع أن نكتشف متتابعات جديدة؟

هذا ما سيجيب عليه هذا البحث في أربع مبرهنات أصلية.،،

نلاحظ أن الباحث بدأ بمقدمة تاريخية ثم عرض الخلفية النظرية المأخوذة من الأدب الرياضي، والمستخدمة في البحث، التي ستساعد القارئ على فهم البحث. وبما أن صيغة جرجوري نيوتن، من الصيغ الشهيرة، لم يقدم الباحث أي تفاصيل عنها. نلاحظ أن الباحث لم يعمل أي مقارنة بين نتائجه ونتائج الأبحاث ذات الصلة، والسبب في ذلك أنه لا توجد دراسات سابقة في هذا الموضوع. نلاحظ أيضاً استخدام الباحث لأداة بلاغية بسيطة لجذب وتهيئة القارئ وهي السؤل، للإعلان عن فكرة جديدة.

لناخذ مثال آخر لمقدمة لبحث بعنوان ' الحالة الخاصة لمتتابعات القواسم ذات الفروق المنتهية '

'' 2 مقدمة

الفروق المنتهية لها استهواء قوي للرياضيين منذ قرون، إسحاق نيوتن خاصة كان يستعملها بعمق، وجزء كبير من الموضوع يرجع مصدره إليه. فقد توصل نيوتن إلى أن الفروق المنتهية من الدرجة nth تكون كثيرة حدود من الدرجة n ، سمية بصيغة الفروق الأمامية للاستكمال، و العكس صحيح، إذا كانت $y^{(n)}(x_m)$ كثيرة حدود من الدرجة n ، فإن $\Delta^n y^{(n)}(x_m)$ ثابتة و $\Delta^{n+1} y^{(n)}(x_m)$ ، $\Delta^{n+2} y^{(n)}(x_m)$ ، ... كلها أصفار. و لإيجاد كثيرة الحدود التي تأخذ القيم التالية

x_m	1	2	3	...	m
$y^{(n)}$	$y^{(n)}(1)$	$y^{(n)}(2)$	$y^{(n)}(3)$	...	$y^{(n)}(m)$

سنستخدم صيغة جريجوري نيوتن، التي نستطيع إعادة كتابتها كالتالي (انظر [3] للتفاصيل)

$$y^{(n)}(x_m) = \sum_{i=0}^{n} \binom{x_m - 1}{i} \Delta^i y^{(n)}(1)$$

تستخدم صيغة جريجوري نيوتن في إيجاد الحد العام لبعض أنواع المتتابعات، ففي الأدب الرياضي أنواع عديدة، موخراً اكتشف محمد [1] متتابعات جديدة اسميت بمتتابعات القواسم، وقد اثبت النتائج التالية:

مبرهنة 1.3. إذا كان P حاصل ضرب أعداد أولية مختلفة، فإن متتابعة القواسم العددية هي

$$\left(\prod_{i=0}^{n} p_{i+1}^{\binom{x_m-1}{i}}\right)_{x_m=1}^{\infty}$$

مبرهنة 2.3. إذا كان P حاصل ضرب أعداد أولية مركبة مختلفة، فإن متتابعة القواسم العددية هي

$$\left(\prod_{i=0}^{n} P_{i+1}^{\binom{x_m-1}{i}}\right)_{x_m=1}^{\infty}$$

مبرهنة 3.3. إذا كان $P(x)$ حاصل ضرب كثيرات حدود مختلفة وغير قابلة للاختزال على حقل الأعداد الحقيقية، فإن متتابعة قواسم كثيرة الحدود هي

$$\left(c\prod_{i=0}^{n} p(x)_{i+1}^{\binom{x_m-1}{i}}\right)_{x_m=1}^{\infty}$$

مبرهنة 4.3. إذا كان $P(x)$ حاصل ضرب كثيرات حدود أولية مركبة مختلفة، فإن متتابعة قواسم كثيرة الحدود هي

$$\left(c \prod_{i=0}^{n} P(x)_{i+1}^{\binom{x_m-1}{i}} \right)_{x_m=1}^{\infty}$$

للبراهين نحيل القارئ إلى [1] (ولنتائج الاخرى ذات الصلة انظر [2]). في هذه الورقة نطور هذه المبرهنات لنحصل على عدد اكثر من متتابعات القواسم، مقارنة بعدد المتتابعات التي نحصل عليها من المبرهنات اعلاه. ‘‘.

نلاحظ أن الباحث استخدام جزء من مقدمة البحث السابق، ثم عرض نتائج الدراسات السابقة لاطلاع القارئ على مانشره الاخرين ولتوضيح كيفية تختلف هذه النتائج عن نتائج الدراسة الحالة، ولأن الباحث لم يعرض كل نتائج الأبحاث ذات الصلة أشار اليها باحالة القارئ الى مرجع أو مرجع محددة، ثم بين الباحث في الفقرة الاخيرة الهدف من البحث. لاحظ ايضاً طريقة الاشارة إلى المراجع في المقدمة.

4.4 الجسم

لأعتبارات توضيحية سنقسم شكل الجسم إلى طريقتان، الطريقة الحديثة والطريقة التقليدية، والامر متروك للباحث في تحديد الطريقة الملائمة له.

1.4.4 الطريقة الحديثة

وهي الطريقة التي تقسم الجسم إلى أقسام ذات عناوين ثابتة هي:

2 الترميز و التعاريف Notation and Definitions

وفيه يذكر الباحث الترميز و التعاريف الدقيقة الخاصة به أو المأخوذة من دراسات سابقة والتي استخدمها الباحث في بحثه. في معظم التخصصات الأخرى غير الرياضيات لا تحتاج تقريباً إلى جعل التعاريف أكثر دقة ووضوحاً، كما هو الحال في الرياضيات، فالتعاريف في البحث الرياضي وسيلة لا غنى عنها، وخاصة إذا كنت تستخدم مفهوم جديد، فإنك بحاجة إلى ترميزه برمز معين حتى يسهل الرجوع إليه، وإلى تعريفه لكي تصرف النظر عن مجموعة كبيرة من المعاني وتحصره في معنى واحد، و في هذه الحالة فإن التعريف شامل أي انه سيستعمل في

كافة أنحاء البحث. أما التعريف الذي لا يحتاج إلى أبراز فهو تعريف موضعي يطبق في موضع محدد، كالمثال الحالي أو الفقرة الحالية. و كقاعدة عامة التعاريف يجب أن تعرض قبل النتائج، ولكن على الباحث القيام بخطوة قبل كتابة التعريف وهي عملية الترميز والتي يراعى فيها الآتي:

- الترميز الجيد يكون خالي من الغموض. فلا يجوز أن نستعمل مطلقاً رمزاً واحداً إلى شيئين مختلفين أو رمزين لنفس الشيء حتى في حالات الظهور في أجزاء متباعدة في البحث. لا تكتب ' A_j ، لـ $1 \le j < n$ ' في مكان واحد و ' A_k ، لـ $1 \le k < n$ ' في مكان أخر، أو أن تعبر عن حاصل ضرب a في b ، مرة بـ ab, ومرة أخرى بـ $a \cdot b$ أو $a \times b$ ، ما لم يوجد سبب جيد لعمل ذلك. إحداث مثل هذه التضاربات الصغيرة بعض من 'التلويث ألترميزي '. أثناء تراكم التلويث القراء تصبح متعبة.
- الترميز الجيد ينبغي أن يكون مقلد لكي يسهل تذكره ويسهل التعرف عليه، فالترميز يجب أن يدلنا بسهولة على الشيء الذي يرمز إليه والشيء يجب أن يدلنا بسهولة على رمزه.

1) استعمل الحروف لتصف الكلمات فمثلاً f تعني دالة function ، و n تعني عدد number ، و p تعني أولي prime ، و $\boldsymbol{V}$ تعني متجه vector ، $\boldsymbol{S}$ تعني فئة set ، و M تعني مصفوفة matrix ، $\boldsymbol{G}$ تعني زمرة group،..الخ
2) إذا كانت $\boldsymbol{S}$ و $\boldsymbol{T}$ فئات فإن عناصر $\boldsymbol{S}$ يجب أن تكون $s_1, s_2, s_3, \ldots$ ، بينما عناصر $\boldsymbol{T}$ يجب أن تكون $t_1, t_2, t_3, \ldots$ ، وإذا كان $\boldsymbol{V}$ متجه فإن مدخلاته هي $v_1, \ldots, v_N$. وإذا كانت $\boldsymbol{A}$ مصفوفة فإن مدخلاتها يجب أن تكون $a_{11}, \ldots, a_{NM}$ ، وإذا كان $\mathbb{V}$ فراغ متجه فإن عناصره يجب أن تكون $V^{(1)}, V^{(2)}, \ldots$ وهكذا ، ومدخلات المتجه $V^{(1)}$ ستكون $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \ldots, v_N^{(1)}$.
3) متغيرات الأدلة يجب أن تطابق حدودها النهائية. فمثلاً الأدلة $j, k, l, m, n, \ldots$ الحدود النهائية لها يجب أن تكون $J, K, L, M, N, \ldots$.

سيئ: لكل $r \in [1 \ldots n]$ و $q \in [1 \ldots m]$ ، نفرض أن

$$A(r,q) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} a_{ij}(r,q).$$

جيد: لكل $n \in [1 \dots N]$ و $m \in [1 \dots M]$ ، نفرض أن

$$A(n,m) = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} a_{jk}(n,m).$$

- الترميز الجيد يجب أن يساعدنا أيضاً في تكييف فهمنا للمسألة إذ يوحي ترتيب الرموز والروابط بينها بترتيب الأشياء المرموز إليها والروابط بينها، ونحن بحاجة إلى عدة أمثلة لشرح هذه النقطة.

1) فلكي نرمز إلى شيئين متقاربين في المسألة نستعمل حرفيين متقاربين في الابجدية. فنستعمل عادة أوائل حروف الأبجدية a, b, c للكميات المعطاة أو الثابتة، ونستعمل حروف من أواخر الأبجدية مثل x, y, z للكميات المجهولة أو المتغيرة.

2) وعندما نرمز إلى أشياء من فصيلة واحدة وأشياء أخرى من فصيلة أخرى نميزها بحركات (أوسمة) تضاف إلى الحروف. ففي الهندسة المستوية كثيراً ما نستعمل: A, B, C للنقط أو الزوايا، $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ للمستقيمات.

3) وإذا كأن لدينا شيئان من فصيلتين مختلفتين ولكن بينهما روابط تهمنا في مسألتنا فقد نرمز لهذين الشيئين برمزين متناظرين a, a' و b, b' وهكذا. وفي المثلث نرمز عادة بالرموز a, b, c لرؤوسه وزواياه، ونرمز a', b', c' لأضلاعه. ومفهوم أن a' يقابل الرأس a والزاوية a وهكذا.

- تخلص من أي ترميز غير ضروري.

مثال: سيئ: كل دالة f قابلة للاشتقاق متصلة.

جيد: كل دالة قابلة للاشتقاق متصلة.

- يجب تجنب تعدد المعاني داخل الترميز.

مثال: سيئ: إذا $a = b = c$ ...

جيد: إذا $a = b$ الذي يساوي c ، ...

مثال: سيئ: نفرض أن $0 < \frac{3}{4}\epsilon = \delta$. فإن ...

جيد: نفرض أن $\frac{3}{4}\epsilon = \delta$. فإن $\delta > 0$ ، و

مثال: سيئ جداً: إذا كان $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ ، فإن الجذور حقيقية.

سيئ: إذا كان $\Delta = b^2 - 4ac$ غير سالب، فإن الجذور حقيقية.

جيد: الفئة $\Delta = b^2 - 4ac$. إذا كان $\Delta \geq 0$ ، فإن الجذور حقيقية.

بعد اكتمال عملية الترميز ووضوح الصيغ بالنسبة للباحث يأتي دور كتابة التعاريف والتي يشترط فيها التالي:

- يكتب مصطلح تعريف بخط حاني اسود، مع مراعاة الترقيم إذا وجد أكثر من تعريف، مع إمالة اسم المفهوم، أي إمالة الكلمة أو العبارة التي تختزل التعريف والتي يجب أن تحتوي على الخاصية الأساسية أو الفكرة. و يجب أن يترك مسافة سطر قبل وبعد كل تعريف.
- يتدرج عرض التعاريف على قاعدة الأفضل والأقصر فالأقل أهمية وطولاً وهكذا. فعلى سبيل المثال في حساب التفاضل والتكامل تعريف المشتقة يجب أن يعرض، لكن التعريف الأفضل والأقصر هو تعريف كثيرة الحدود والذي يمكن أن يعرض في سطر.
- يجب ذكر التعاريف الشخصية للباحث والتعاريف الغير مشهورة، أما التعاريف المعروفة للرياضيين فلا يجب ذكرها.
- يجب مراعاة المتطلبات الأساسية للمفهوم موضوع التعريف. فعلى سبيل المثال، إذا كان بحثك يتحدث عن دالة، فإن المتطلبات الأساسية للتعريف الواضح المعالم للدالة هو تحديد المجال والمجال المقابل والقاعد.
- بمجرد تحديد كلمة معينة كمفهوم لتعريف معين، لا يجب استخدام أي كلمة أخرى مرادفة لها في المعنى. فعلى سبيل المثال، إذا عرفة كلمة " ميل " عند نقطة على منحنى الدالة لتعني قيمة المشتقة لا يجب عليك أن تستخدم كلمة " الانحدار" عندما تعني قيمة المشتقة.
- لا تستخدم تعريف باللغة العادية مخالف للتعريف الرياضي الدقيق للمفهوم الذي عرفته. فعلى سبيل المثال، إذا عرفت " النقطة الحرجة " أنها كل نقطة تجعل $f'(x) = 0$ ، لا تقول بعد ذلك " هي النقاط حيث يتغير التقعر بصورة حرجة على منحنى الدالة " فهذا بالغة العادية جيد ومقبول، لكن غير مقبول في البحث الرياضي، لأن المعنى يصبح أكثر عمومية، فلا يعرف القارئ ماذا تقصد فإذا كنت تعني بالحرج " الارتفاع الحاد

للمنحنى " فإن القارئ سيحاول العثور على المكان الذي يعرف " شدة الانحدار للمنحنى " ليعرف النقطة الحرجة.

- من المتفق عليه ‘‘ إذا ’’ تعني ‘‘ إذا وفقط إذا ’’ في التعريف، لذلك لا تستعمل " إذا وفقط إذا " في التعاريف " إذا " تكفي. فمثلاً

تعريف. العدد الصحيح أكبر من واحد يقال أنه عدد أولي إذا قواسمه الموجبة هو العدد نفسه والعدد 1.

- يجب وضع تعريف مختصر وبما يتفق مع التعاريف ذات الصلة.

تعريف. *اتحاد* الفئتين A , B هو الفئة التي تحوي كل العناصر التي تنتمي للفئتين. ويرمز له بالرمز $\cup$ ، ورمزياً كما يلي:

$$A \cup B = \left\{ x : x \in A \ \text{أو} \ x \in B \right\}$$

تعريف. *الفرق* بين الفئتين A, B وهو الفئة التي تتكون من العناصر الموجودة في A وليست موجودة في B . ويرمز له بالرمز \ ، ورمزياً كما يلي:

$$(A \setminus B) = \{x : x \in A \ , x \notin B\}$$

بالاستعانة بالتعريفين السابقين نشتق منهم تعريف جديد لنسميه الفرق المتماثل.

تعريف . *الفرق المتماثل* بين الفئتين A , B يعرف كالتالي:

$$A\Delta B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \ .$$

معامل التحديد $\stackrel{\text{def}}{=}$ يوضح بأن هذا تعريف. هذا الترميز يثبت معنى $A\Delta B$ ، بصياغة رمزية بدلاً من الرمز المستقل.

ملاحظة: التعريف الجديد هو الشيء الأكثر أهمية في البحث لأنه يعطي الباحثين طريقة تفكير جديدة حول الشيء.

- التعريف يتطلب مهلة، لإعطاء وقت للقارئ لامتصاصه. هذا قد ينجز بإعطاء التعريف مرتين، أولاً بالكلمات ثم بالرموز (أو العكس بالعكس)، باستعمال الصياغتين المختلفتين، أو برفد التعريف بمثال.

تعريف. لأي معطى $\varepsilon > 0$ نعرف الفئة

$$S_\varepsilon = \{(x, y) \in R^2 : |x - y| \leq \varepsilon / \sqrt{2}\},$$

حيث S_ε سطح عرضه ε متماثل فيما يتعلق بالقطر الرئيسي في المستوى الديكارتي .

التعريف الرمزي يظهر أولاً، بينما التفسير الفظي يوضح المعنى الهندسي لـ S_ε ، الذي لا يتضح من الصيغة . الكمية ε تظهر كدليل سفلي ، ليشير بأنه بارامتر .

تعريف. لكل عدد حقيقي λ ، نفرض أن $\Pi(\lambda)$ مستوى في فراغ إقليدي متعامد ثلاثي الأبعاد للمتجه $v(\lambda) = (1, \lambda, \lambda^2)$.

فمثلاً $\Pi(\lambda)$ يحوي النقط $z = (x_1, x_2, x_3),\ z \in R^3$ لحاصل أي ضرب عددي $z \cdot v = x_1 + x_2\lambda + x_3\lambda^2$ مساوي للصفر.

في هذا التعريف الكمية λ تظهر كمتغير لكلاً من Π و v. المثال يعيد صياغة التعريف في شكل يصلح للاحتساب.

- إذا استخدمت رمزاً جديداً فيجب تعريفه بطريقة جيدة تحدده تماما فيما إذا كأن عدد أو دالة،...، الخ.

  مثال: سيئ: حيث أن n عدد مركب ، $n = ab$.

  جيد: حيث أن n عدد مركب ، $n = ab$ ، لبعض الأعداد الصحيحة a و b.

  مثال: سيئ: إذا استبدلت كثيرة الحدود $f(x)$ بـ $\mathbb{Z} \ni f(n)$ ، هل $f(x)$ له معاملات صحيحة؟

جيد: إذا استبدلت كثيرة الحدود $f(x)$ بـ $f(n) \in \mathbb{Z}$ لكل $n \in \mathbb{Z}$ ، هل $f(x)$ له معاملات صحيحة؟

- عرف كل رمز قبل استعماله، حالما تعرف الرمز يجب أن يستعمل بالدوام على استقامة واحدة في القول والعمل (باتساق).
- تعريف الرمز يجب أن يظهر قريباً قدر الإمكان حيث الرمز يستعمل أولاً، قبل أو بعد الظهور الأول، بشرط أن التعريف معطى ضمن نفس الجملة.

مثال: نعطي نفس التعريف ثلاث مرات، لنفصل التغييرات التي ترافق كل نسخة للتأكيد عليها.

اعتبر متسلسلة القوى

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

حيث المعامل a_n هو مربع عدد التثليث $n-\mathrm{th}$.

تعريف a_n يأتي مباشرة بعد ظهوره الأول. نلاحظ أن الرمز a غير ملائم لمصطلح عدد التثليث triangular number .

في النسخة الثانية نغير كلاً من النص والصيغة.

نفرض أن t_n عدد التثليث $n-\mathrm{th}$. نعتبر متسلسلة القوى

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n^2 x^n,$$

الآن t_n تعرف قبل بداية استعمالها. الرمز t المختار ملائم لأنه سيذكرنا بالتثليث 'triangular'. الصيغة أوضح.

نسختنا الثالثة تجمع تعاريف لفظية و رمزية.

نعتبر متسلسلة القوى $h(x)$ التي معاملاتها مربع أعداد التثليث، يعني،

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n^2 x^n \qquad t_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

الصيغة أكثر تعقيداً لأن كل شي معرف بداخلها لكنها مستقلة أيضاً، لذلك من السهل الرجوع اليها.

3 النتائج The Results

في هذا القسم يعرض الباحث النتائج التي توصل إليها بحسب التسلسل المنطقي لهذه النتائج و مستوى الأهمية لها. فتعرض التمهيديات أولاً، ثم المبرهنات، ثم تعرض القضايا، و النتائج، أخيراً التخمين. ويتخلل كل ذلك الملاحظات، بعد ذلك تعرض الأمثلة، ويتخللها الأشكال التوضيحية أن وجد. مع وجوب أبراز و ترقيم المصطلحات مبرهنة، قضية، نتيجة، تمهيدية، تخمين، بتسلسل رقمي موحد، أما المصطلحات، مثال، ملاحظة، إذا تم الإشارة إليها لاحقاً يجب أن ترقم بتسلسل رقمي كلاً على حده، مع أبراز مصطلح مثال وإمالة مصطلح ملاحظة، مع مراعاة ترك مسافة سطر قبل وبعد كل مبرهنة أو مثال أو ملاحظة. فعلى سبيل المثال قد نكتب

تمهيدية 1.3. ...

مبرهنة 2.3. ...

ملاحظة 1.3. ..

قضية 3.3. ...

نتيجة 4.3. ...

تخمين4.4. ...

مثال 1.3. ...

مثال 2.3. ...

ملاحظة 2.3. ...

المبرهنات: عند كتابة المبرهنات (المبرهنة، القضية، النتيجة، التمهيدية) و التخمين، يجب مراعاة التالي:

- نصوص المبرهنات يجب أن لا تحتوي على تعليقات أو أمثلة.
- اكتب كل الفروض الضرورية في نصوص المبرهنات. أو بمعنى أخر، يجب أن تكون نصوص المبرهنات مكتفية ذاتياً، حتى يكون بمقدور أي قارئ قراءة أي مبرهنة، ومعرفة عن ماذا تتحدث، دون الحاجة للرجوع إلى أجزاء سابقة أو النظر في كافة أنحاء البحث ليفك شفرة الترميز أو يجد التعاريف الاصطلاحية الخاصة.
- يفضل أن يحتوي نص المبرهنة على اقل ما يمكن من الرموز. فعلى سبيل المثال قارن

مبرهنة. إذا كان x عدد حقيقي، فإن $0 \geq x^2$.

بـ

مبرهنة. مربع كل عدد حقيقي هو عدد غير سالب.

- يفضل عند كتابة المبرهنات استخدم جمل قصيرة على الأقل جملتين واحدة للفرض، والأخرى للاستنتاج، تأخذ أحدى الأشكال التالية:

إذا كان ...، فإن ... .

إذا كان ...، فإن ...، إذن ... .

نفرض أن ... . فإن ... .

نفرض أن ... . فإن ...، مالم ... .

نفرض أن ... تحقق ... . فإن ... .

نفرض أن ... تحقق الفروض أعلاه. فإن ... .

نفرض أن الفروض 1−5 صحيحة. فإن ... .

إذا كان ... و إذا كان ...، فإن ... .

نفرض أن ... . وبالإضافة إلى ذلك، نفرض أن ... . فإن ... .

نفرض ... . فإن ... . وايضاً إذا كان ...، فإن ... .

- تكتب المصطلحات مبرهنة، قضية، نتيجة، تمهيدية، بخط اسود حاني، وتكتب عباراتها، بنص مائل، والأعداد في النص لا يجب أن تكتب بنص مائل. على سبيل المثال:

نتيجة. *تحت شروط النتيجة* 2 *، المعادلة* (3) *صحيحة*.

- قبل عرض المبرهنات يفضل أن يتقدم عبارة تمهيدية.

مثال: سيئ: الآن لدينا التالي

مبرهنة. *الدالة* $H(x)$ *المعرفة بالصيغة* (4.1) *متصلة.*

مبرهنة. *لأي ثابت* p *، الدالة* $f(x) = x^p$ *قابلة للتفاضل، و*

$$\frac{d}{dx}x^p = px^{p-1}.$$

جيد: نستطيع الآن إثبات النتائج التالية

مبرهنة 1.3 *الدالة* $H(x)$ *المعرفة بالصيغة* (4.1) *متصلة.*

مبرهنة 2.3 *لأي ثابت* p *، الدالة* $f(x) = x^p$ *قابلة للتفاضل، و*

$$\frac{d}{dx}x^p = px^{p-1}.$$

الأمثلة Examples: تساعد الأمثلة في توضيح المفاهيم المجردة، وبالتالي تساعد القارئ على فهم البحث، لذا البحث الجيد يحتوي الكثير من الأمثلة. وعند كتابة الأمثلة يجب مراعاة التالي:

- الأمثلة القصيرة يجب أن تعرض ضمن فقرة في النص، بنفس خط النص.
- الأمثلة الطويلة يجب أن تعرض بصورة مستقلة، خصوصاً إذا كان المثال بند رئيس في عملك، مع إعطاء رقم لكل مثال أذا كان هناك أكثر من مثال، مع مراعاة كتابة مصطلح مثال بخط اسود حاني، ونصه بخط عادي.
- يجب أن يسبق المثال أو الأمثلة عبارة تمهيدية تحدد عن ماذا يتحدث المثال أو الأمثلة. فعلى سبيل المثال " نعرض هنا بعض الأمثلة التي توضح المبرهنة 3.2 ."
- المثال الجيد تحدد فيه المشكلة في بداية المثال.

- المثال الجيد توضح فيه التقنية المستخدمة في حل المشكلة.
- المثال الجيد يعطي تفسير طبيعي لخطوات الحل.
- المثال الجيد لا يعطي تفاصيل الحسابات التي قمت بها.

مثال: إذا أردة استخدام مبرهنة سندوتش لإيجاد الخطوط المقاربة لمنحى الدالة

$$y = \frac{\sin(x)}{x}.$$

ما هي المشكلة؟

سيئ: سأحسب الخطوط المقاربة.

جيد: سنجد الخطوط المقاربة للدالة

$$y = \frac{\sin(x)}{x}.$$

ما هي التقنية المستخدمة؟

سيئ: حساب النهاية لـ y ستدللنا على الخطوط المقاربة.

جيد: لإيجاد الخطوط المقاربة، سنأخذ النهاية عندما x تقترب من $\pm\infty$.

ما هو التفسير الطبيعي؟

سيئ: بالنظر إلى الرسم، فإن y تتجه إلى ألأحداثي x .

جيد: بالنظر إلى منحنى الدالة، نرى بأن عندما x تقترب من $\pm\infty$ ، y تقترب من 0 ، لذلك المنحنى يقترب من ألأحداثي x .

الآن نعيد كتابة المثال الجيد:

" المثال التالي يوضح استخدم مبرهنة سندوتش

مثال 1.2. سنجد الخطوط المقاربة للدالة

$$y = \frac{\sin(x)}{x}.$$

لإيجاد الخطوط المقاربة، سنأخذ النهاية عندما x تقترب من $\pm\infty$. لتحديد هذه النهايات، سنستخدم مبرهنة سندوتش. بالنظر إلى منحنى الدالة، نرى بأن عندما x تقترب من $\pm\infty$ ، y تقترب من 0 ، لذلك المنحنى يقترب من ألأحداثي x . "

الأشكال التوضيحية Figure: وهي أداة بصرية مهمة في الرياضيات، فبعض فروع الرياضيات (مثل: حساب التفاضل والتكامل، الهندسة، الجبر الخطي، التوبولوجيا) هندسية بطبيعتها، وقيمة الصورة واضحة. أن الأشكال التوضيحية كالصور والرسم البياني، لا يمكن استبدالها بشرح مكتوب، فمازلنا نحتاج إلى الكلمات، لكن الأشكال التوضيحية يمكن أن تحسن وضوح الشرح دائماً. أن الشكل التوضيحي الجيد هو الذي يحدد كل النقاط المطلوب التركيز عليها، ويعرض المعلومات المثيرة والمهمة. وكل شكل يجب أن يعرض و أن يرقم ويعنوناً (تعليق بسيط بعد رقم الشكل). يكتب مصطلح شكل بخط اسود حاني، وعنوان الشكل بخط عادي.

الملاحظات Remarks: الملاحظة يجب أن تكون تعليق قصير، والمناقشة الرئيسية يجب أن تكون مستقلة منطقياً عن محتوى الملاحظة. يكتب مصطلح ملاحظة بخط مائل، ونصه بخط عادي.

4 إثبات النتائج Proof of the Results

في هذا القسم يعرض الباحث براهين النتائج التي توصل إليها بنفس ترتيب عرض النتائج. ويمكن أن نوجز شروط كتابة البرهان الجيد بالنقط التالية:

- كل برهان يجب أن يبدأ بالكلمة ' *برهان* *Proof* ' بخط مائل، وبجسم نص عادي، وأن ينتهي برمز المربع ' □ '.
- ابدأ البرهان بنص فرضياتك مع ذكر ما أنت ستثبت. فعلى سبيل المثال" نفرض أن ... سنثبت أولاً..."
- إذا كان البرهان معقداً فيجب عرض مناقشة تمهيدية في بداية البرهان يتم فيها توضيح الفكرة الأساسية للبرهان مع ترك كل الحسابات الروتينية للقارئ.

- كل رمز يجب أن يكون قد عرف سابقاً في بند التعاريف أو في أقصى موعد ضمن نفس الجملة التي ظهر فيها هذا الرمز.
- اكتب كل جملة وفق قواعد لغوية صحيحة. أيضاً لتنسى قواعد الترقين.
- تأكد بأن كل عبارة كتبتها، القارئ يعلم بأنها أثبتت، أو ستثبت، أو يفترض أن القارئ على علم بالإثبات. على سبيل المثال إذا كتبت

" بواسطة (12) لدينا $A = B$ ، لنرى ..."

بفرض أنك تريد أثبات العبارة، هذا يعتبر تشويش، لأنه يفضل الإعلان عن البرهان قبل العبارة، لذلك اكتب " الآن سنثبت أن (12) تؤدي إلى $A = B$ ، لنرى ...".

- يجب أن يحتوي البرهان على عبارة تشير إلى مساره. كأن تقول مثلا

سنثبت أن ...

الآن سنوضح أن ...

سنثبت هذا بالاستقراء على n .

نناقش المسألة بالتناقض.

سنتناول الآن الاتجاه المعاكس.

- تجنب القفز في الخطوات بدلاً من التسلسل المنطقي. يتضمن هذا القفز من إحدى العبارات إلى أخرى
  - بدون تبرير القفزة.
  - بحذف الكثير من الخطوات في الوسط.
  - باستعمال مبرهنة صعبة دون إثباتها.
  - الأسوأ استعمال مبرهنة صعبة دون ذكرها.
- اذكر طريقة الإثبات المتبعة لديك. فعلى سبيل المثال '' سنثبت هذه العبارة بالتناقض، وسنثبت هذه العبارة مباشرة، هنا سنفترض العكس...''
- لخص ما أثبته بعبارات كأن تقول " أثبتنا أن... "
- استخدم كلمات دليلية مثل (بما أن since، لأن because، من جهة أخرى on the other hand، لاحظ note، إذن hence، ومن ثم and hence، أي أن so that، حيث أن such that)، لتوضح للقارئ كيفية استدلالك.

سيئ: أثبتنا أن إذا كانت a^2 عدد زوجي، فإن a عدد زوجي. نفرض a^8 عدد زوجي . فإن a^4 عدد زوجي.

جيد: أثبتنا أن إذا كانت a^2 عدد زوجي ، فإن a عدد زوجي . نفرض a^8 عدد زوجي. فإن بتطبيق النتيجة على التوالي لـa^4, a^2، و a^8 ، نلاحظ أن a عدد زوجي.

- إذا تطلب البرهان تحليل عدة حالات، ربما بعض منها يجب أن يحذف. فعلى سبيل المثال يمكن أن تقول " تحليل الحالة (b) على نفس النمط، وسيترك للقارئ ".
- عند عرض التفسيرات (الأسباب) يجب مراعاة التالي:

1) كل عبارة رياضية يجب أن تبرر بواحد أو أكثر من التفسيرات الست التالية: بواسطة بديهية ، بواسطة مبرهنات تم أثباتها من سابق، بواسطة تعريف، بواسطة قوانين المنطق، بواسطة خطوة سابقة في البرهان الحالي، بواسطة فروض hypothesis.

فعلى سبيل المثال إذا افترضت أن f متصلة عند $a = 2$, وG زمرة آبيلة، فإن عندما تحتاج إلى هذه الفرضيات، فلا تقول

" بواسطة الفروض، لدينا ..."

بل يجب أن تقول

" بواسطة الفروض، f متصلة؛ لهذا السبب لدينا ..."

2) يفضل استعمل جمل تفسيره بسيطة وفقرات قصيرة. فعلى سبيل المثال نستنتج أن $AB = AC$ بحسب المبرهنة3.1، ....

3) تعرض التفسيرات أما بين الأسطر أو بين قوسين معكوفين على اليمين.

$f(x) = x^2$, باستبدال تعريف الدالة

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

فإن بفك المربع الأول، وتجميع الحدود المتشابه، وأخيراً بحذف العامل المشترك h، نحصل على

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x + h.$$

الطريقة الاخرى:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$ [تعريف $f(x)$]

$$= \frac{(x^2+2xh+h^2)-x^2}{h}$$ [بالفك]

$$= \frac{2xh+h^2}{h}$$ [بتجميع الحدود المتشابه]

$$= 2x + h.$$ [بالقسمة]

أما أذا عرضت الخطوات في سطر فيجب وضع التفسير أسفل انظر المثال التالي

$$\lim_{h\to 0}[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] + \lim_{h\to 0}[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

[مبرهنة مجموع النهاية]

4) لا تكتب التفسيرات المألوفة للرياضيين. فبدلاً من أن تكتب

فإن من المتراجحة ألمثلثيه، لدينا $|a| \leq |a-b| + |b-c|$

يجب أن تكتب

فإن $|a| \leq |a-b| + |b-c|$

5) يجب استخدام الأسماء الوصفية لـ المسلمات والتعاريف والمبرهنات والمعادلات و الطريق الرياضية،...،الخ المشهورة، عند إعطاء تفسير.

سيئ: بحسب المبرهنة 5.7

جيد: بحسب المبرهنة الأساسية في الحساب

سيئ: بحسب البديهية 3

جيد: بحسب المتباينة ألمثلثيه.

6) إذا كان التفسير كبيراً وواضحاً فيجب أن يترك للقارئ. فمثلا يمكن أن تقول "التفاصيل الكاملة للحسابات متوفرة على موقع المؤلف (http://...) أو في الملحق رقم1 "

7) اجتنب المختصرات المعتادة مثل ($\because, \Rightarrow, \therefore$) واستبدلها بالكلمات.

2.4.4 الطريقة التقليدية

في هذه الطريقة يقسم الجسم إلى أقسام Sections ترقم وتعنون، بحيث تناقش السمات المختلفة للموضوع بشكل انفرادي أي كلاً على حده. وتوجد ثلاثة أسباب رئيسية لتقسيم الجسم إلى أقسام:

- التقسيم يشير إلى إستراتيجية تقديمك لموضوعك.
- يسمح للقارئ بإيجاد المعلومات بسرعة وسهولة.
- يساعد القارئ في سهولة متابعة القراءة والتوقف والتفكير ملياً لما كنت تقوله.

ولا يوجد تقسيم موحد، والأمر متروك للباحث في تحديد التقسيم الملائم. فعلى سبيل المثال، إذا كان موضوعك المبرهنة A ونتيجة المبرهنة B ، لكن برهان المبرهنة A يعتمد على التمهيديات 1، 2 و 3 التي براهينها طويلة ومعقدة، فمن الأفضل ترتيب بحثك بالطريقة التالية:

القسم 2. نص التمهيديات1 ، 2 و3 .

القسم 3. نص وبرهان المبرهنة A .

القسم 4. نص وبرهان نتيجة المبرهنة B .

القسم 5. مناقشة نتيجة المبرهنة B .

الأقسام 6 ، 7 ،8 براهين التمهيديات1 ، 2 و3 .

ويوجد الكثير من التقسيمات في المقالات الرياضية فقد تجد مثلاً التقسيم التالي:

القسم 2. التعاريف و الحسابات التمهيدية.

القسم 3. برهان التمهيدية الرئيسية.

القسم 4. نص وبرهان المبرهنة الرئيسية.

القسم 5. الأمثلة التوضيحية للمبرهنة الرئيسية.

وعلى أي حال، عند استخدام هذه الطريقة يجب مراعاة الآتي:

- تقدم الأمور السهلة والصغيرة.

- يجب مراعاة التسلسل المنطقي وعدم القفز بشكل عشوائي في التفاصيل.
- إذا كان البحث كبيراً وصعباً ولا يوجد مسار متسلسل خلال الموضوع، فيجب أن يحلل إلى أقسام فرعية Subsections بعناوين جانبية، يشرح كل قسم جزء من البحث بحيث يتناسق مع العنوان التالي. فهذا يساعد على توضيح التركيب المنطقي للبحث. إذا الأقسام الفرعية مستقلة فإنها ترتب طبقاً لأهميتها.

ملاحظة: أذا كان البحث طويلاً يفضل ان يقسم البحث إلى أجزاء وكل جزء يقسم إلى اقسام.

5.4 كلمة شكر Acknowledgement

وفي القسم الأخير يشكر الكاتب أناس لتوجيههم ودعمهم. وهذا القسم يوضح للقارئ أن كان البحث قد تم الاطلاع عليها ومراجعته من قبل متخصصين أم لا. وبالإمكان حذف هذا البند إذا أرتا الباحث عدم إضافته.

6.4 المراجع References

تتطلب الكتابة العلمية الإشارة دائماً إلى المصادر الأخرى المستشهد بها، وذلك لإعطاء الفضل لمن يستحقه و لتفادي الانتحال. ويطر الباحث للاستشهاد في الحالات التالية:

- عند اقتباس أمثلة.
- عند اقتباس مقطع من عمل أو الحصول على حقيقة من مصدر.
- عند استعمال نتيجة رياضية أثبتت بواسطة شخص آخر.
- عند إعطاء مصدر فكرة ذات بصيرة للبرهان.
- عند إعادة صياغة عمل شخص آخر. في الحقيقة إذا كان عملك خاطئ يمكن أن تقول ’’ هذا خطأ لكن ليس عيبي‘‘.

ينفذ هذا في مرحلتين. أولاً، المصدر مذكور في النص بأسلوب مختصر، لكي لا يتدخل في القراءة. ثانياً، قائمة كاملة مرتبة لكل المصادر المستشهد بها (كتب، أطروحات، ورقات بحثية)، تقدم في نهاية البحث، في قسم يسمى ' المراجع أو قائمة المصادر Bibliography '.

الإشارة للمرجع في النص. يوضع الاقتباس بين علامات تنصيص '' '' في سياق نص الباحث. إذا أعاد الباحث صياغة نص مقتبس فلا تستخدم علامات التنصيص. عند توثيق المصدر، إذا كان المصدر كتاباً أو رسالة علمية يجب أن يدون الباحث بين قوسين معكوفين، رقم المصدر اولاً ثم يشير إلى الصفحة أو الصفحات، أو المبرهنة، أو الفصل. أما إذا كان مقال يجب أن يدون رقم المصدر بين قوسين معكوفين فقط.

ايلر [1، ص.45] ''اثبت أن e عدد غير نسبي''.

الجانب الحسابي للنظرية موجود في [8، ص ص. 22–36].

هذا يمكن العثور عليه في اكس [7 ، الفصل. 2].

وقد تم الحصول على نتائج مشابهة بشكل مستقل بواسطة واكس ستنتشر [7].

على سبيل المثال انظر [5، المبرهنة 2.3].

الإشارة للمرجع في قائمة المصادر. لكتابة قائمة المصادر يوجد بعض الشروط، من هذه الشروط أن يعطى كل مرجع رقماً متسلسلاً بين قوسين معكوفين، وأن ترتب المراجع أبجدياً، عادة حسب لقب المؤلف، إذا كان هناك مرجعين مختلفين لنفس المؤلف يكتب اسم المؤلف في المرة الأولى و يستبدل بخط في المرة الثانية. أما الشروط الأخرى فتختلف تبعاً لاختلاف نوع المصدر إذا كان كتاب، رسالة علمية، مقال، مرجع الكتروني.

الكتاب يحتوي على البيانات التالية في قائمة المصادر:

اسم المؤلف، عنوان الكتاب بخط مائل، رقم الطبعة أن وجدة، رقم الجزء أن وجد، الناشر، بلد النشر، سنة النشر بين قوسين.

[2] الجبوري. شلال حبيب عبد الله، *الجبر الخطي*، الطبعة الأولى، الجزء الأول، جامعة دمشق، (1998).

[19] H. Hasse, *Number theory*, Springer-Verlag, Berlin (1980).

إذا كان هناك مرجع آخر للمؤلف H. Hasse تم الاستشهاد به في النص يتم توثيقه في قائمة المصادر، هكذا

[20] ________ , *Number theory advanced* , Springer-Verlag, Berlin (1985).

المقال العلمي يحتوي على البيانات التالي في قائمة المصادر:

اسم الكاتب، عنوان لمقال، اسم المجلة بخط مائل، رقم المجلد بخط بارز بجانبه سنة النشر بين قوسين بجانبه رقم العدد، أرقام الصفحات التي نشرة فيها المقال كاملاً.

اسم المجلة في اغلب الأحيان يعطى بشكل مختصر في المجلات الأجنبية. هكذا، *J. Reine Angew. Math*. اختصار Journal f ¨ur die reine und angewandte Mathematik.

[33] P. Morton and J. H. Silverman, Periodic points, multiplicities, and dyn amical units, *J. Reine Angew. Math*., **461** (1995) no. 14, 81–122.

[6] شحادة. الأسدي، حول صف متتاليات في فضاء هيلبرت، *مجلة بحوث جامعة حلب*، المجلد **38** (2003) العدد 41 ، 35–41.

الرسائل العلمية (أطروحة دكتوراه أو ماجستير) تحتوي على البيانات التالي في قائمة المصادر:

أسم الباحث، عنوان الرسالة بخط مائل، اسم الدرجة، اسم الكلية، اسم الجامعة، البلد، السنة بين قوسين.

[5] الجونة. احمد علي، *الصيغ التحليلية للدوال فوق الهندسية الرباعية*، كلية التربية لودر، جامعة عدن، اليمن، (2008).

[3] V. Anagnostopoulou, *Sturmian measures and stochastic dominance in ergodic optimisation*, PhD Thesis, Queen Mary, University of London (2008).

المصادر الإلكترونية، يراعى فيها ما تم بيانه في توثيق المراجع وفق نوع كل مرجع، مع إضافة تاريخ الحصول على المرجع من الشبكة (الشهر، اليوم، السنة) و عنوان الموقع على الانترنت.

[10] L. Pottmeyer, Heights and totally real numbers, preprint, (2012). Retrieved October, 12, 2013 from http://chaosbook.dk.

7.4 الملاحق Appendixes

الملحق يحتوي على المعلومات الضرورية التي ليس من الملائم إدراجها في جسم البحث. والهدف منها اعطاء تفاصيل خاصة، أو إعطاء معلومات عامة. مع ملاحظة أن هذا البند يمكن أن يحذف إذا أرتا الباحث عدم إضافته. على سبيل المثال جداول بيانات، براهين طويلة ومملة، النتائج العددية المفصلة، ....الخ.

7.4 مثال لمقال

نعطي المثال التالي لمقال علمي نشر لكاتب هذه السطور.

متتابعات القواسم ذات الفروق المنتهية

محمد عبد الله سعيد سالم

قسم الرياضيات، كلية التربية ردفإن

جامعة عدن

ص. ب. (201) الحوطة

البريد الالكتروني: alhoshiby@hotmail.com

الموجز

اكتشفنا متتابعات جديدة أسميناها متتابعات القواسم. بواسطة أربع مبرهنات أصلية أثبتناها.

الكلمات ألمفتاحيه. صيغة جريجوري نيوتن.

1 مقـــــدمة

الفروق المنتهية لها استهواء قوي للرياضيين منذ قرون، إسحاق نيوتن خاصة كان يستعملها بعمق، وجزء كبير من الموضوع يرجع مصدره إليه. فقد توصل نيوتن إلى أن الفروق المنتهية من الدرجة $n\text{th}$ تكون كثيرة حدود من الدرجة n ، سمية بصيغة الفروق الأمامية للاستكمال، و العكس صحيح، إذا كانت $y^{(n)}(x_m)$ كثيرة حدود من الدرجة n ، فإن $\Delta^n y^{(n)}(x_m)$ ثابتة و $\Delta^{n+1} y^{(n)}(x_m)$ ، $\Delta^{n+2} y^{(n)}(x_m)$ ، ... كلها أصفار. و لإيجاد كثيرة الحدود التي تأخذ القيم التالية

x_m	1	2	3	$\dots$	m
$y^{(n)}$	$y^{(n)}(1)$	$y^{(n)}(2)$	$y^{(n)}(3)$	$\dots$	$y^{(n)}(m)$

سنستخدم صيغة جريجوري نيوتن، التي نستطيع إعادة كتابتها كالتالي

$$y^{(n)}(x_m) = \sum_{i=0}^{n} \binom{x_m - 1}{i} \Delta^i y^{(n)}(1) \tag{1.1}$$

تستخدم صيغة جريجوري نيوتن في إيجاد الحد العام لبعض أنواع المتتابعات، ففي الأدب الرياضي أنواع عديدة من المتتابعات تختلف باختلاف طرق تكوينها، وطريقة إيجاد حدها العام. فعلى سبيل المثال، المتتابعة الحسابية لأي أعداد صحيحة تختلف عن المتتابعة الهندسية لأي أعداد صحيحة من حيث طريقة تكوين كل منهما وطريقة إيجاد حدهما العام.

فهل نستطيع أن نكتشف متتابعات جديدة؟

هذا ما سيجيب عليه هذا البحث في أربع مبرهنات أصلية.

2 الترميز و التعاريف

سنشير إلى فئة الأعداد الطبيعية بواسطة $\mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}$. وبواسطة $\mathbb{Z}$ نشير فئة الأعداد الصحيحة. و بواسطة $\mathbb{R}$ نشير إلى فئة الأعداد الحقيقية. بواسطة $\mathbb{R}[x]$ نشير إلى فئة كل كثيرات الحدود على $\mathbb{R}$ بالمبهم x .

تعريف 1.2. يسمى P عدد *أولي* مركب و $P \in \mathbb{Z}$ في ، إذا كان $P = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ ، حيث $p_1, p_2, \dots, p_k$ هي أعداد أولية مختلفة.

تعريف 2.2. تسمى $P_1, P_2, \dots, P_k$ *أعداد أولية مركبة مختلفة*، إذا كان $P = P_1 \cdot P_2 \cdots P_k$.

تعريف 3.2. تسمى $P(x)$ *كثيرة حدود أولية مركبة*، و $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ إذا كان $P(x) = cp_1(x) \cdot p_2(x) \cdots p_k(x)$ ، حيث $p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x)$ كثيرات حدود مختلفة و غير قابلة للاختزال على حقل الأعداد الحقيقية ، $c \neq 0$ ثابت.

تعريف 4.2. تسمى $P_1(x), P_2(x), \dots, P_k(x)$ *كثيرات حدود أولية مركبة مختلفة*، إذا كان $P(x) = cP_1(x) \cdot P_2(x) \cdots P_k(x)$.

تعريف 5.2. سنعرف نوعين من *متتابعات القواسم*:

- *متتابعة القواسم العددية*:
  - وهي الدالة $s : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ المعرفة بالمعادلة

$$s(x_m) = \prod_{i=0}^{n} p_{i+1}^{\binom{x_m - 1}{i}} \qquad (2.1)$$

  - وهي الدالة $s' : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ المعرفة بالمعادلة

$$s'(x_m) = \prod_{i=0}^{n} P_{i+1}^{\binom{x_m-1}{i}} \quad (2.2)$$

- *متتابعة قواسم كثيرة الحدود:*
  - وهي الدالة $S : \mathbb{N} \to \mathbb{R}[x]$ المعرفة بالمعادلة

$$S(x_m) = c\prod_{i=0}^{n} p_{i+1}(x)^{\binom{x_m-1}{i}} \quad (2.3)$$

  - وهي الدالة $S' : \mathbb{N} \to \mathbb{R}[x]$ المعرفة بالمعادلة

$$S'(x_m) = c\prod_{i=0}^{n} P_{i+1}(x)^{\binom{x_m-1}{i}} \quad (2.4)$$

تعريف 6.2. سنعرف نوعين من مثلث القواسم:

- *مثلث القواسم العددي*، إذا كانت $s(1), s(2), s(3) \dots, s(k+1)$ الحدود الأولى لمتتابعة القواسم العددية، عندئذ $s(2) \div s(1), s(3) \div s(2), \dots, s(k+1) \div s(k)$ تسمى *قواسم* s . نشير إلى هذه القواسم بواسطة $ds(1), ds(2), \dots, ds(k)$ على التوالي أو ds ، لدينا

$$ds(1) = s(2) \div s(1), ds(2) = s(3) \div s(2), \dots, ds(k) = s(k+1) \div s(k)$$

حيث d يسمى *معامل القواسم*، و $ds(1), ds(2), \dots$ *القواسم الأولى*. القواسم للقواسم الأولى تسمى *القواسم الثانية* ونشير لها بواسطة $d^2s(1), d^2s(2), \dots$ أو d^2s ، وبنفس الطريقة نعرف *القواسم الثالثة والقواسم الرابعة*، الخ .. وهكذا، و إذا كانت d^ns ثابت و $d^{n+1}s, d^{n+2}s, \dots$ كلها تساوي واحد، فإن n تسمى درجة القواسم.

ملاحظات

- نجد درجة القواسم بواسطة العلاقة $n = 1,2, \dots, k-1$ ، حيث $k, n \in \mathbb{N}$.
- نجد عدد الحدود الأولى بواسطة العلاقة $m = k+1$ ، حيث $m \geq 3$.

- باستبدال s بـ S ، و s' بـ S' على نفس النمط، نعرف *مثلث قواسم كثيرة الحدود*.

3 النتـــــائــج

أثبتنا النتائج التالية:

مبرهنة 1.3. إذا كان P حاصل ضرب أعداد أولية مختلفة، فإن متتابعة القواسم العددية هي

$$(s(1), s(2), \dots, s(m), \dots, s(x_m), \dots).$$

مبرهنة 2.3. إذا كان P حاصل ضرب أعداد أولية مركبة مختلفة، فإن متتابعة القواسم العددية هي

$$(s'(1), s'(2), \dots, s'(m), \dots, s'(x_m), \dots).$$

مبرهنة 3.3. إذا كان $P(x)$ حاصل ضرب كثيرات حدود مختلفة وغير قابلة للاختزال على حقل الأعداد الحقيقية، فإن متتابعة قواسم كثيرة الحدود هي

$$(S(1), S(2), \dots, S(m), \dots, S(x_m), \dots).$$

مبرهنة 4.3. إذا كان $P(x)$ حاصل ضرب كثيرات حدود أولية مركبة مختلفة، فإن متتابعة قواسم كثيرة الحدود هي

$$(S'(1), S'(2), \dots, S'(m), \dots, S'(x_m), \dots).$$

نعرض ألآن بعض الأمثلة لتوضيح المبرهنات على نحو أفضل.

مثال 1.3. أوجد متتابعة القواسم إذا عملت أن $P = 2 \cdot 5 \cdot 3$.

الحل:

لدينا $p_1 = 2,\ p_2 = 5,\ p_3 = 3$ ، أذن $k = 3$ ، وبالتالي $n = 2, m = 4$

لذلك صيغة الحد العام هي

$$s(x_4) = \prod_{i=0}^{2} p_{i+1}^{\binom{x_4-1}{i}}$$
$$= p_1^{\binom{x_4-1}{0}} \cdot p_2^{\binom{x_4-1}{1}} \cdot \; p_3^{\binom{x_4-1}{2}}$$
$$= 2 \cdot 5^{x_4-1} \; \cdot 3^{\frac{1}{2}x_4^2-\frac{3}{2}x_4+1}.$$

من هذا نستنتج أن متتابعة القواسم هي

$$(s(1), s(2), s(3), s(4), \dots, s(x_4), \dots)$$
$$= \left(2{,}10{,}150{,}6750, \dots, 2 \cdot 5^{x_4-1} \; \cdot 3^{\frac{1}{2}x_4^2-\frac{3}{2}x_4+1}, \dots\right).$$

مثال 2.3. أوجد متتابعة القواسم إذا عملت أن $P = 6 \cdot 35 \cdot 143$.

المثال سيترك للقارئ

أرشاد: صيغة الحد العام هي

$$s'(x_4) = 6 \cdot 35^{x_4-1} \; \cdot 143^{\frac{1}{2}x_4^2-\frac{3}{2}x_4+1}$$

مثال 3.3. أوجد متتابعة القواسم إذا علمت أن $P(x) = x(x+1)(x^2+1)$.

الحل

لدينا $c = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = (x+1), p_3(x) = (x^2+1)$ ، أذن $k = 3$ ،

وبالتالي $n = 2, m = 4$

لذلك صيغة الحد العام هي

$$S(x_4) = \prod_{i=0}^{2} p_{i+1}(x)^{\binom{x_4-1}{i}}$$
$$= p_1(x)^{\binom{x_4-1}{0}} \cdot \; p_2(x)^{\binom{x_4-1}{1}} \cdot p_3(x)^{\binom{x_4-1}{2}}$$
$$= x \cdot (x+1)^{x_4-1} \; \cdot (x^2+1)^{\frac{1}{2}x_4^2-\frac{3}{2}x_4+1}$$

من هذا نستنتج أن متتابعة القواسم هي

$$(S(1), S(2), S(3), S(4), \dots, S(x_4), \dots) =$$
$$\left(x, x(x+1), x(x+1)^2(x^2+1), x(x+1)^3(x^2+1)^3, \right.$$
$$\left. \dots, x(x+1)^{x_4-1}(x^2+1)^{\frac{1}{2}x_4^2-\frac{3}{2}x_4+1}, \dots \right)$$

مثال4.3. أوجد متتابعة القواسم $P(x) = (2x^2+x)(x^2-1)(x^3+2x^2+x+2)$

المثال سيترك للقارئ

أرشاد: صيغة الحد العام هي

$$S'(x_4) = (2x^2 + x) \cdot (x^2 - 1)^{x_4 - 1} \cdot (x^3 + 2x^2 + x + 2)^{\frac{1}{2}x_4^2 - \frac{3}{2}x_4 + 1}$$

4 إثبـــات النتـــائـــج

***البرهان*4.1.** لإثبات المبرهنة1.1. لاحظ أن الفكرة الرئيسية في البرهان هي بناء مثلث القواسم.

أولاً نثبت $P = p_1 \cdot p_2$

بحسب التعريف6.2 نبني مثلث القواسم

$$\begin{array}{lccccc} s & p_1 & , & p_1p_2 & , & p_1p_2^2 \\ ds & & p_2 & & p_2 & \\ d^2s & & & 1 & & \end{array}$$

درجة القواسم هي $n = 1$.

عدد الحدود الأولى $m = 3$ هي

$$(p_1 , p_1p_2 \ , p_1p_2^2, \dots) = (s(1), s(2), s(3), \dots).$$

نعيد كتابة الحدود الأولى بالشكل التالي:

$$(p_1p_2^0, p_1 \cdot p_2^1, p_1p_2^2, \dots)$$

وبالتالي، الحد العام للحدود الأولى هو

$$s = p_1 \cdot p_2^{0,1,2}. \qquad (4.1)$$

بتطبيق (1.1) نستطيع إعادة كتابة (4.1) كالتالي

$$
\begin{aligned}
s(x_3) &= p_1 \cdot p_2^{y^{(1)}(x_3)} \\
&= p_1^{\binom{x_3-1}{0}} \cdot p_2^{\binom{x_3-1}{1}} \\
&= \prod_{i=0}^{1} p_{i+1}^{\binom{x_3-1}{i}}.
\end{aligned}
$$

من هذا نستنتج أن متتابعة القواسم هي

$$(s(1), s(2), s(3), \dots, s(x_3), \dots\ ).$$

نفس الحجج تطبق للحالات

$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3, P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4, P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5, \dots$ ، الخ.

وهكذا والآن نتحول إلى الحالة $P = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k$

بحسب التعريف 6.2 نبني مثلث القواسم

$$
\begin{array}{lccccc}
s & p_1\ ,\ p_1p_2\ ,\ \dots & ,p_1 p_2^{y^{(1)}(k)} p_3^{y^{(2)}(k)} \cdots p_k & , & p_1 p_2^{y^{(1)}(k+1)} p_3^{y^{(2)}(k+1)} \cdots p_k^k \\
ds & p_2 & & \iddots & \\
d^2 s & \quad p_3 & \iddots & & \\
\vdots & \ddots & \iddots & & \\
d^n s & p_k & p_k & & \\
d^{n+1} s & & 1 & &
\end{array}
$$

من هذا المثل نجد أن:

درجة القواسم هي $n = k - 1$.

عدد الحدود الأولى $m = k + 1$ ، و هي

$$
\begin{aligned}
&\left(p_1\, , p_1 p_2\, , \dots , p_1 p_2^{y^{(1)}(k)} p_3^{y^{(2)}(k)} \cdots p_k\, ,\ p_1 p_2^{y^{(1)}(k+1)} p_3^{y^{(2)}(k+1)} \cdots p_k^k, \dots \right) \\
&\qquad = (s(1), s(2), \dots, s(k), s(k+1), \dots)
\end{aligned}
$$

نعيد كتابة الحدود الأولى بالشكل التالي:

$$\left(p_1p_2^0p_3^0\cdots p_k^0\,,p_1p_2^1p_3^0\cdots p_k^0,\dots,p_1p_2^{y^{(1)}(m-1)}p_3^{y^{(2)}(m-1)}\cdots p_k^1\,,p_1p_2^{y^{(1)}(m)}p_3^{y^{(2)}(m)}\cdots p_k^{m-1},\dots\right)$$
$$=(s(1),s(2),\dots,s(m-1),s(m),\dots)$$

وبالتالي الحد العام للحدود الأولى هو

$$s=p_1\cdot p_2^{0,1,2,\dots,y^{(1)}(m-1),y^{(1)}(m)}$$
$$\cdot\, p_3^{0,0,1,3,\dots,y^{(2)}(m-1),y^{(2)}(m)}\cdots p_k^{0,0,\dots,0,1,m-1} \qquad (2.4)$$

نلاحظ أن p_k له المتتابعة $0,0,\dots,0,1,m-1$. حيث

$$\underbrace{\underbrace{0,0,\dots,0,}_{n\ \text{مرة}}\ 1,m-1}_{m\ \text{مرة}}$$

نوجد الحد العام لهذه المتتابعة

x_m	1 ,	2 ,	$\dots$,	$m-2$,	$m-1$,	m
$y^{(n)}$	0 ,	0 ,	$\dots$,	0 ,	1 ,	$m-1$
$\Delta y^{(n)}$	0		$\dots$		1	$m-2$
$\vdots$	$\ddots$				$\iddots$	
$\Delta^n y^{(n)}$			1	$m-n-1$		
$\Delta^{n+1} y^{(n)}$				0		

وبتطبيق (1.1) نحصل على $y^{(n)}(x_m)=\binom{x_m-1}{n}$. وهذه كثيرة حدود من الدرجة n في x_m . لذلك نستطيع أعادة كتابة (2.4) كما يلي

$$\begin{aligned}s(x_m)&=p_1\cdot\ p_2^{y^{(1)}(x_m)}\cdot\ p_3^{y^{(2)}(x_m)}\cdots p_k^{y^{(n)}(x_m)}\\&=p_1^{\binom{x_m-1}{0}}\cdot p_2^{\binom{x_m-1}{1}}\cdot p_3^{\binom{x_m-1}{2}}\cdots p_k^{\binom{x_m-1}{n}}\\&=\prod_{i=0}^{n}p_{i+1}^{\binom{x_m-1}{i}}.\end{aligned}$$

من هذا نستنتج أن متتابعة القواسم هي

$$(s(1), s(2), \dots, s(m), \dots, s(x_m), \dots). \qquad \square$$

***البرهان* 2.4.** لإثبات المبرهنة2.3 نفرض أن P عدد أولي مركب من الشكل $P = P_1 P_2 P_3 \cdots P_k$. باستعمال الرموز $s', P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$ بدلاً من $s, p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ في برهان المبرهنة1. وبنفس الطريقة، نجد أن

$$\begin{aligned} s'(x_m) &= P_1 \cdot {P_2}^{y^{(1)}(x_m)} \cdot {P_3}^{y^{(2)}(x_m)} \dots {P_k}^{y^{(n)}(x_m)} \\ &= \prod_{i=0}^{n} P_{i+1}^{\binom{x_m-1}{i}}. \end{aligned}$$

$\square$

***البرهان* 3.4.** لإثبات المبرهنة 3.3. نفرض أن $P(x)$ كثيرة حدود من الشكل $P(x) = cp_1(x)p_2(x)p_3(x) \cdots p_k(x)$. وباستعمال الرموز $S, P(x), p(x)_1, p(x)_2, p(x)_3, \dots, p(x)_k$ بدلاً من $s, P, p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ في برهان المبرهنة1. وبنفس الطريقة، نجد أن

$$\begin{aligned} S(x_m) &= cp_1(x) \cdot p_2(x)^{y^{(1)}(x_m)} \cdot p_3(x)^{y^{(2)}(x_m)} \dots p_k(x)^{y^{(n)}(x_m)} \\ &= c \prod_{i=0}^{n} p_{i+1}(x)^{\binom{x_m-1}{i}}. \end{aligned}$$

$\square$

***البرهان* 4.4.** لإثبات المبرهنة 4.3. نفرض أن $P(x)$ كثيرة حدود أولية مركبة من الشكل $P(x) = cP_1(x)P_2(x)P_3(x) \cdots P_k(x)$. وباستعمال الرموز $S', P(x), P(x)_1, P(x)_2, P(x)_3, \dots, P(x)_k$ بدلاً من $s, P, p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ في برهان المبرهنة1. وبنفس الطريقة، نجد أن

$$\begin{aligned} S'(x_m) &= cP_1(x) \cdot P_2(x)^{y^{(1)}(x_m)} \cdot P_3(x)^{y^{(2)}(x_m)} \dots P_k(x)^{y^{(n)}(x_m)} \\ &= c \prod_{i=0}^{n} P_{i+1}(x)^{\binom{x_m-1}{i}}. \end{aligned}$$

□

المـــــراجـــــــع

[1] Murray R. Spiegel, **Schaum's Outlines of Theory and Problems of Calculus of Finite Differences and Difference Equations**, first Edition, .McGraw-Hill, (1971), 33-34.

[2] S. S. Sastry, **Introductory Methods of Numerical Analysis**, Fourth Edition, Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi, (2007), 73-75.

الفصل الخامس
طباعة المقال

كثيراً ما يحتاج متخصصي الأقسام العلمية و طالبي الدراسات العليا إلى توثيق مشاريعهم البرمجية و كتابة التقارير العلمية، لنشرها في مؤتمرات أو لتقديمها كرسالة ماجستير أو دكتوراه، وغالباً ما تكون معالجات النصوص الحديثة مثل مايكروسوفت word هي البيئة المفضلة لهؤلاء للعمل على كتابة تقارير كهذه، ربما لأنها تستند على مبدأ أن أي عملية يجريها المستخدم على النص سيرى أثرها جلياً أمامه مباشرة، و ما يراه من تأثيرات على النص وقت الكتابة هو ما سيحصل عليه بعد طباعته للتقرير، هذه تعتبر خاصية مرنة ترجح كفة معالجات النصوص الحديثة لدى الكثير من المستخدمين، إلا أن السهولة في الاستخدام تأتي على حساب ميزة مهمة ألا وهي " تشكيل و إعداد هيكلة واضحة للتقرير معروفة بدايته، تفاصيله و نهايته ". وجود نمط معين و هيكلة ثابتة للتقارير أمرٌ يفضله كثير من كتاب التقارير العلمية، لكونها تحتوي على معيار عالمي ثابت و معتمد فيما لو أرادوا نشرها في مؤتمر أو مناقشتها كلجنة، البرامج الحديثة ومن بينها برنامج word لا تؤدي الغرض اللازم لمهمة كهذه على الرغم من سهولتها و تعدد خياراتها، لعل البديل لها والأفضل هو ما يسمى بـ نظام (برنامج) الـ $l^{A}T_{E}x$ يُنطَق بالشكل التالي " لايتك " من بين الأهداف الكبرى للنظام أن يقوم مؤلف النص بإدخال نصه على أن تسند مهام الإخراج الفني والتنسيق الآلي للنظام، فبخلاف ما يجري عليه الأمر حينما يكتب النص على نظام word حيث يركز الكاتب على تنسيق الخطوط،... الخ، يكتفي المرء في نظام لايتك بإشعار النظام بأنه يكتب مبرهنة أو تعريفاً أو عنواناً ليقوم النظام بمهام التنسيق، كما أن هذا النظام يدعم كتابة المعادلات الرياضية مهما تعقدت حدودها و تكاثرت في حين أن معالجات النصوص غير قادرة على دعم كتابة معادلات رياضية بشكل مرن. أن استعمال نظام لايتك في تنضيد النصوص الرياضياتية يكاد أن يكون اليوم معياراً عالمياً تعتمده جل النشرات العلمية المختصة وتشترط تقديم البحوث مطبوعة به.

سنتناول في هذا الفصل كيفية طباعة المقال العلمي باستخدام نظام الايتك، وبافتراض أن البرنامج محمل على جهازك، وبافتراض أيضاً أن لغة الكتابة هي اللغة الانكليزية.

1.5 إنشاء مستند لايتك

إنشاء مستند لايتك ينقسم إلى ثلاثة أقسام، القسم الأول يتم فيه تحديد نوع المستند حتى يتمكن لايتك من تحديد التنسيق المناسب لذلك، والقسم الثاني هو المسمى بالديباجة وهي التي تشتمل على الحزم الأساسية في تفعيل الأوامر والبيئات في جسم المستند، القسم الثالث هو جسم المستند و الذي يشتمل على النصوص والأوامر و البيئات والتي تكون في مجملها مستندك.

1.1.5 نوع المستند

الخطوة الأولى في كتابة مستند الايتك هي تحديد نوع المستند إذا كان مقال أو كتاب أو تقرير، وتحديد حجم الخط ونمط تنسيق الورق الذي سيطبع عليه المستند وذلك من خلال الأمر

\documentclass[options]{class}

حيث تعني options أن على الكاتب كتابة أي من الخيارات التالية بحيث يفصل بين كل خيار وأخر بإشارة الفاصلة:

a4paper لطباعة المستند على ورق A4.

12pt, 11pt, 10pt ويتم اختيار إحداها التحديد حجم الخط والاختيار الافتراضي هو 12pt.

twoside لطباعة مستند برأس صفحة ذات وجهين(وجه للصفحات الفردية واخر للصفحات الزوجية). ورأس الصفحة هو جزء يتخلل الهامش العلوي يمكن أن يكتب داخله أي بيان بحيث يتم تكراره مع كافة صفحات المستند.

leqno لطباعة ارقام الصيغ في الجهة اليسرى بدلاً من الجهة اليمنى في صفحات المستند.

وأما class فتعني أن على الكاتب تحديد نوع المستند والذي لا بد وان يكون احد الخيارات التالية:

article لتخبر لايتك أن نوع المستند الذي ستكتبه هو مقال علمي سينشر في إحدى المجلات العلمية وهذا بالطبع هو الخيار المفضل لدينا بحكم أننا نريد أن نكتب مقال علمي.

report لتخبر لايتك أن نوع المستند الذي ستكتبه هو أطروحة ماجستير أو دكتوراه.

book لتخبر لايتك أن نوع المستند الذي ستكتبه هو كتاب.

إذن الخطوة الأولى تمت وقمنا بكتابة الأمر

\documentclass[12pt,a4paper]{article} (1)

2.1.5 الديباجة

وهي الخطوة الثاني في إنشاء المستند، وهي امتداد للخطوة الأول في كتابة الأوامر التي تلي الأمر (1)، الذي يتم فيها ضبط قياسات صفحات المستند التي ستظهر على شكل pdf، من حيث الطول، العرض، تحديد الهوامش، ترقيم الصفحات،...، الخ، بالإضافة إلى كتابة الأوامر التي تعرف بالحزم. والحزمة هي أمر يسمح للكاتب باستعمال مجموعة من الأوامر والبيئات في جسم المستند. أن الحزم و الأوامر التي ستكتب في الديباجة ستؤثر على المستند ككل.

والجدول التالي يوضح أهم الحزم والأوامر المستخدمة في الديباجة.

الرقم	الحزمة أو الامر	الغرض من الاستخدام
1-	\usepackage[ansinew]{Inputence}	لتخبر لايتك بأن النظام المعتمد لديك في إدخال البيانات هوWindows.
2-	\usepackage{ amsmath}	لعرض الصيغ الرياضية في عدة خطوط.
3-	\usepackage{ amssymb}	للسماح باستخدام الرموز الرياضية.
4-	\usepackage{amsthm}	للسماح باستخدام بيئة الإثبات proof.
5-	\usepackage{ color}	للسماح باستخدام أوامر التلوين في تلوين نصوص المستند.
6-	\usepackage{ verbatim}	للسماح باستخدام بيئة التعليق

		comment وذلك لكتابة التعليقات على المستند والتي لا تظهر في المخرجات.
-7	\usepackage{amsthm}	للسماح باستخدام بيئة التعاريف.
-8	\setlength{\textwidth}{6.5in}	لتحديد عرض الصفحة بالانش والقيمة المستخدمة هي القيمة الافتراضية والتي يمكن تغييرها.
-9	\setlength{\textheight}{8.9in}	لتحديد ارتفاع الصفحة بالانش والقيمة المستخدمة هي القيمة الافتراضية والتي يمكن تغييرها.
-10	\setlength{\oddsidemargin}{1in}	لتحديد عرض الهامش الجانبي الأيسر.
-11	\setlength{\evensidemargin}{1in}	لتحديد عرض الهامش الجانبي الأيمن.
-12	\setlength{\topmargin}{-5in}	لتحديد عرض الهامش الأعلى. ملاحظة: قد لا تحتاج إلى هذه الأوامر، فعند تحديد نوع الملف يحدد لايتك أوتوماتيكيا الهوامش اللازمة.
-13	\pagestyle{empty}	لطباعة مستند خالي من أرقام الصفحات.
-14	\Linespread{factor}	لعمل مسافة مفردة بين اسطر المستند، نستخدم القيمة 1.3 بدلاً من الكلمة factor ، والقيمة 1.6 لعمل مسافة مزدوجة. ملاحظة: وحدات الطول المستخدمة هي Inch=2.5 centimeter Inch=72.27 points=72.27 pt Pica=12 points =12 pt
-15	\pagestyle{myheadings}	لترقيم الصفحات في الأعلى. الترقيم الافتراضي في الأسفل.
-16	\numberwithin{equation}{section}	لترقيم الصيغ الرياضية بواسطة رقم القسم ورقم الصيغة.
-17	\markboth{رأس الصفحة الزوجية}{ رأس الصفحة الفردية}	لإنتاج رأس ذو وجهين.

بعد تحديد نوع المستند واعداد الديباجة نكون قد أنتهينا تقريباً من تهيئة المستند، وبالتالي ننتقل إلى الخطوة الاخير من انشاء المستند وهي كتابة المقال في بيئة المستند المعروفة بجسم المستند، وبافترض أننا قمنا بعمل التالي:

```
\documentclass[12pt,a4paper]{article}
\usepackage[ansinew]{inputenc}
\usepackage{amsmath}
\usepackage{amsfonts}
\usepackage{amssymb}
\usepackage{makeidx}
\usepackage{amsthm}
\numberwithin{equation}{section}
\begin{document}
جسم المستند
\end{document}
```

2.5 جسم المستند

وهي البيئة الخاصة بالشروع بكتابة المستند باستخدام أوامر لايتك وبيئاته. وكل ما يكتب هنا يمكن مشاهدته على شكل مخرجات pdf .

1.2.5 التعامل مع النصوص

بعد أن قمنا في البند السابق بإنشاء مستند الايتك، من المؤكد أنك شغوف لمعرفة كيفية إدخال النصوص المختلفة داخل جسم المستند، وكيفية التعامل معها.

لكتابة نص عادي أكتب ببساطة الذي تريده، لبدء فقرة جديدة اترك سطر فارغ، بعض الرموز لها معاني خاصة، الأكثر أهمية الرمز(\) سلاش، و رمز الدولار ($). كل أوامر الايتك مسبوقة بالسلاش ومعظم رموز الرياضيات والصيغ البسيطة يجب تترافق مع علامة الدولار. وقبل أن نتحدث عن الأوامر المستخدمة للتعامل مع النصوص هناك بعض التعريفات التي يجب أن نستوعبها، ولعل أهم ما يجب أن نستوعبه هو تعريف الفقرات وتعريف البيئة.

الفقرة هي أي عدد من الكلمات والحروف والرموز و الصيغ الرياضية البسيطة، تنتهي بترك سطر فارغ أو باستخدام الأمر \\ . و البيئة هي هيكلة محددة البداية والنهاية ذات تنسيق معين.

الجدول التالي يوضح أهم الأوامر الأساسية المستخدمة في التعامل مع النصوص.

النـــــوع	الأمـــــــــــــر	الـغرض مــن استـــخدامـة
إمالة النص	\textit{ النص }	إمالة النص المكتوب.
	\textst{ النص }	إمالة النص المكتوب
	\emph{ النص }	تأكيد النص المكتوب بإمالة خفيفة.
أبراز النص	\textbf{ النص }	لإبراز النص.
تغيير حجم الخط	{\footnotesize النص}	حجم الخط هو 8pt size
	{\small النص}	حجم الخط هو 9pt size
	{\normalsize النص}	حجم الخط هو 10pt size
	{\large النص}	حجم الخط هو 14pt size
	{\LARGE النص}	حجم الخط هو 17pt size
	{\huge النص}	حجم الخط هو 20pt size
	{\Huge النص}	حجم الخط هو 25pt size
تغيير نوع الخط	\textrm{ النص }	لكتابة النص بالخط الروماني.
	\texttt{ النص }	لكتابة النص بخط الآلة الكاتبة.
	\textsf{ النص }	كتابة النص بخط sans serif.
	\textnormal{ النص }	خط المستند العادي.
الألوان	{\color{red}النص}	لتلوين النص بالون الأحمر قس على

		ذلك بقية الألوان.
الأقواس	$\{$ النص $\}$ (النص) [النص]	لطباعة النص بين قوسين مجعدين. لطباعة النص بين قوسين هلاليين. لطباعة النص بين قوسين مربعين.
ضبط المسافات	\hspace{number mm or cm} \vhspace{ number mm or cm} \smallskip \medskip \bigskip \noindent ~	لإنتاج مسافة أفقية بين الكلمات والجمل محددة بالملي أو بألسنتي. لإنتاج مسافةعمودية بين الفقرات، ،الأقسام محددة بالملي أو بألسنتي (يجب أن يوضع الأمر بين خطيين فارغين). لإنتاج مسافة عمودية صغيرة بين السطور والفقرات دون الحاجة إلى تحديدها بالملي. لإنتاج مسافة عمودية متوسطة بين السطور والفقرات دون الحاجة إلى تحديدها. لإنتاج مسافة عمودية كبيرة بين السطور والفقرات دون الحاجة إلى تحديدها. لحذف أي مسافة قد تحدث في بداية أي فقرة. لعمل مسافة أفقية صغيرة بين الحروف والكلمات.
السطور	\leftline{النص} \rightline{النص} \centerline{النص} \underline{النص} \line{النص} \\ or \newline {\setlenght{\baselineskip} %{1.5 \baselineskip} السطور .\par}	لمحاذاة السطر إلى يسار الصفحة. لمحاذاة السطر إلى يمين الصفحة. لجعل السطر في وسط الصفحة. لوضع خط تحت النص. لكتابة النص في سطر كامل. لكسر السطر الحلي والبدء سطر جديد. لعمل مسافة بين السطور قدرها سطر ونصف.
الخط المستقيم	\hrulefill \dotfill \hrule	لإنتاج خط مستقيم بين الكلمات. لإنتاج خط مستقيم منقط بين الكلمات. لإنتاج خط مستقيم يفصل بين سطرين.
العنــاويـــن	\title{العنوان}	لكتابة عنوان الكتاب أو المقال أو الأطروحة.

	\author{اسم الكاتب}	لكتابة اسم المؤلف.
	\date{}	لعدم طباعة التاريخ الحالي.
	\today	لكتابة التاريخ الحالي مع ملاحظة كتابة اسم الشهر.
	\date{التاريخ}	لكتابة التاريخ.
	\maketitle	لإظهار العنوان، اسم الباحث، والتاريخ الحالي، في صفحة منفصلة للكتاب والأطروحات وفي نفس الصفحة للمقال.
	\chapter{العنوان}	لكتابة عنوان لفصل، وهذا متاح في الكتب والأطروحات فقط.
	\section{العنوان}	كتابة عنوان قسم رئيسي في مقال علمي أو ضمن فصل في كتاب أو أطروحة.
	\subsection{العنوان}	لكتابة عنوان فرعي من القسم الرئيسي.
	\subsubsection{العنوان}	لكتابة عنوان متفرع من العنوان الفرعي للقسم الرئيسي.
	\paragraph{العنوان}	كتابة عنوان فقرة.
	\subparagraph{العنوان}	لكتابة عنوان فقرة فرعية.
	\tableofcontents	لإنتاج فهرس بعناوين الأقسام الرئيسية.
مربع نصي	\mbox{النص}	لكتابة مربع نصي.
حاشية	\footnote{النص}	لإنتاج حاشية سفلية.
صفحـــــة	\newpage	النص بعد هذا الأمر سيكون في صفحة جديدة.
	\thepage	لإنتاج رقم للصفحة الحالية.
	\ldots	لإنتاج نقط التتابع الثلاث الأفقية.
	\vdots	لإنتاج نقط التتابع الثلاث العمودية.
رمـــــوز	$\backslash$	لطباعة سلاش \
	\%	لطباعة %
	\$	لطباعة $
	\&	لطباعة &
	-	لإنتاج داش صغيرة.
	--	لإنتاج داش تدل على تتابع الصفحات.
	---	لإنتاج خط صغير.
	: , ? . ' `	لطباعة : ' ؟ . ، ˝
بيئة المحاذاة	\begin{center} الـفـقـــرة	لمحاذاة الفقرة أو الفقرات في الوسط. بمعنى أخر أن الفقرة أو الفقرات ستكتب

	\end{center}	بحيث تتوسط الصفحة.
	\begin{flushleft} الـفـقـــــرة \end{flushleft}	لمحاذاة الفقرة أو الفقرات إلى الجهة اليسرى للصفحة.
	\begin{flushright} الـفـقـــــرة \end{flushright}	لمحاذاة الفقرة أو الفقرات إلى الجهة اليمنى للصفحة.
بيئـة القوائـم	\begin{enumerate} \Item النــــص ⋮ \Item النــــص \end{enumerate}	لإنتاج قائمة ذات تعداد رقمي.
	\begin{itemize} \Item النــــص ⋮ \Item النــــص \end{itemize}	لإنتاج قائمة ذات تعداد نقطي.
	\begin{description} \Item[word] النــــص ⋮ \Item[word] النــــص \end{ description }	لإنتاج قائمة ذات تعدد رمزي محدد أو وصفي أي وصف مجموعة من الكلمات. نستبدل الكلمة word بأي كلمة أو رمز نرغب فيه.

أمـــــثلة محلـــولة

الرقم	شكل الإخراج على الـ بي دي اف	طريقة الإدخال
1-	It does not matter whether you enter one or several spaces after a word. An empty line starts a new paragraph.	It does not matter whether you enter one or several spaces after a word. An empty line starts a new paragraph.
2-	Today is April 6, 2014.	Today is \today.
3-	You can *lean* on me!	You can \textsl{lean} on me!

Please, start a new line right here! \\ Thank you!	Please, start a new line right here! Thank you!	-4
{\Large Don’t read this! It is not true. You can believe me!\par}	Don’t read this! It is not true. You can believe me!	-5
\begin{Large} This is not true. But then again, what is these days \ldots \end{Large}	This is not true. But then again, what is these days . . .	-6
This is another \begin{comment} rather stupid, but helpful \end{comment} example for embedding comments in your document.	This is another example for embedding comments in your document.	-7
Mr.~Smith was happy to see her\\ cf.~Fig.~5\\ I like $ n+2 $. What about you? Add a squared and b squared to get c squared. Or, using a more mathematical approach: $a^2 + b^2 = c^2$	Mr. Smith was happy to see her cf. Fig. 5 I like $n+2$. What about you? Add a squared and b squared to get c squared. Or, using a more mathematical approach:$a^2+b^2=c^2$	-8
Footnotes\footnote{This is a footnote.} are often used by people using \LaTeX.	Footnotes[1] are often used by people using LaTeX. [1]This is a footnote.	-9
\flushleft \begin{enumerate} \item You can next the list environments to your taste: \begin{itemize} \item But it might start to look silly. \item[-] With a dash. \end{itemize} \item Therefore remember: \begin{description} \item[Stupid] things will not become smart because they are in a list. \item[Smart] things, though, can be presented beautifully in a list. \end{description} \end{enumerate}	1. You can next the list environments to your taste: • But it might start to look silly. - With a dash. 2. Therefore remember: **Stupid** things will not become smart because they are in a list. **Smart** things, though, can be presented beautifully in a list.	-10

\begin{flushleft} This text is\\ left-aligned. \LaTeX{} is not trying to make each line the same length. \end{flushleft}	This text is left-aligned. $\LaTeX$ is not trying to make each line the same length.	-11
\begin{flushright} This text is right-\\aligned. \LaTeX{} is not trying to make each line the same length. \end{flushright}	This text isright- aligned.$\LaTeX$ is not trying to make each line the same length.	-12
\begin{center} At the center\\of the earth \end{center}	At the center of the earth	-13
This\hspace{1.5cm}is a space of 1.5 cm.	This is a space of 1.5 cm.	-14

-15

```
\documentclass[a5paper,11pt]{article}
\usepackage{color}
\author{Andr\'e Heck\\
AMSTEL Institute}
\title{A Sample Document in \LaTeXe}
\date{}
\begin{document}
\maketitle
\begin{abstract}
Dit is een voorbeeld van een korte
Nederlandstalige tekst met
enkele Engelstalige fragmenten. Zie ook
hoofdstuk 9 van
\emph{The \LaTeX\ Companion}
\cite{GMS94}.
\end{abstract}
\tableofcontents
\section{Begin of the article}
We laten het eigenlijke artikel beginnen
met een
\textcolor{green}{Nederlandstalige}
sectie \ldots
\section{End of the article}
\ldots\ and finally, the article ends for
some very
strange reasons with an English section.
\begin{thebibliography}{99}
\bibitem{GMS94}
M.~Goossens, F.~Mittelbach,
A.~Samarin. \emph{The \LaTeX\
Companion},
Addison-Wesley (1994), ISBN~0-201-
54199-8.
\end{thebibliography}
\end{document}
```

A Sample Document in $\LaTeX$

A ndre' Heck

AMSTEL Institute

Absract

Dit is een voorbeeld van een korte Nederlandstalige tekst met enkele Engelstalige fragmenten. Zie ook hoofdstuk 9 van aThe $\LaTeX$ Companion[1]

Cnotents

1	Begin of the article	1
2	End of the article	2

1 Begin of the article

We laten het eigenlijke artikel beginnen met een Nederlandstalige sectie…

1

2 End of the article

… and finally, the article ends for some very strange reasons with an English section.

References

[1] M. Goossens, F. Mittelbach, A. Samarin. *The $\LaTeX$ Companion*, Addison-Wesley (1994), ISBN 0-201-54199-8.

2

2.2.5 الإشارات المرجعية

الأرقام مفيدة للغاية في كتابة بحث رياضي أو تأليف كتاب، فترقيم البنود الأساسية، التعاريف، المبرهنات، البراهين، المعادلات، الأمثلة، الجداول، الإشكال، الملاحظات، المراجع، الصفحات،… ، الخ. ينتج لنا أسماء تسلسلية لهذه التعاريف والمبرهنات والمراجع … الخ.

أنظر إلى الأمثلة التالية:

- e.g. as Theorems 1, 5 and 7. عند الإشارة إلى عدة مبرهنات
- e.g. Theorem 5 etc. عند الإشارة إلى مبرهنة
- Bad: By the equation 8 lines up, we see. . .
- Good: By equation (3), we see. . .

سنرى الآن كيف فعل ذلك في مستند الايتك. مطلقاً لا تكتب" By (2) and Theorem 3 ، لأن هذه الأعداد قد تتغير بكل تعديل في المستند، ولأن البنية الرقمية للايتك تسمح لنا بتمييز جزء من المستند بإعطاء اسم له، حتى يمكنك فيما بعد الانتقال السريع لهذا الجزء عن طريق ذلك الاسم وهو ما يسمى بالإشارة المرجعية Cross-Referencing ، والتي تنقسم إلى قسمين:

أولاً العناوين: نستطيع إعطاء عنوان ونستطيع استخدام هذا العنوان لنشير إلى ذلك البناء باستعمال الأمر \label{marker} حيث marker هو الاسم الاختياري الذي يحدده المستخدم في بداية أي بيئة (بيئة مبرهنة أو قسم أو جدول أو معادلة ...الخ). بعد ذلك نستطيع عمل إشارة مرجعية باستخدام الأوامر التالية:

\ref{marker} وذلك لطباعة رقم النظرية أو الجدول أو القسم ...الخ.

\eqref{marker} وذلك لطباعة رقم الصيغة الرياضية.

\pageref{marker} وذلك لطباعة رقم الصفحة التي يوجد فيها النظرية أو الجدول أو المعادلة أو القسم ...الخ، مع العلم أن هذا الأمر لا يستعمل اثناء كتابة المقالات العلمي.

فعلى سبيل المثال، إذا أعطى باحث في بداية القسم الثاني الموجود في الصفحة رقم 4 العنوان \label{sect1} . فإنه عند الإشارة إليه في أي مكان من المستند يستطيع أن يكتب مثلاً ’’ see the section~\ref{sect1} on page ~\pageref{ sect1} ‘‘ ليحصل على ’’ see the section 2 on page 4 ‘‘. بعد عمل الإشارة المرجعية أذا حدث أي تعديل في المستند فإن الأرقام ستتغير آليا.

ثانياً الاقتباسات: معظم المقالات تحتوي على مراجع في نهاية المقال مرقمة بأرقام متسلسلة، ولعمل ذلك في لايتك نستخدم البيئة التالية:

\begin{thebibiography}{99}

\bibitem{marker 1}هنا يتم كتابة معلومات المرجع الأول

⋮

\bibitem{marker n}هنا يتم كتابة معلومات المرجع النوني

\end{thebibiography}

حيث marker1 هي الاسم الاخير لمؤلف المرجع الأول... و marker n هي الاسم الأخير لمؤلف المرجع النوني، وعند الإشارة إلى إحدى المراجع في المتن نستخدم:

\cite{marker} وذلك لطباعة الرقم المتسلسل للمرجع المعني، حيث marker هو الاسم الأخير للمؤلف في ذلك المرجع.

\cite[... .\ ...]{marker} وذلك لطباعة الرقم المتسلسل الموجود في قائمة المراجع بين قوسين مربعين مع رقم الصفحة أو الصفحات أو المبرهنة أو الفصل في ذلك المرجع التي يحددها المستخدم. فعلى سبيل المثال قد نكتب

see \cite[p.\ 22]{Scheid}

see for instance \cite[Thm.\ 2.1]{Spiegel}

For details see \cite{Sastry}

لنحصل على

see [7, p. 22]

see for instance [7, Thm. 2.1]

For details see [3]

ملاحظة :الرقم 99 يكتب من قبل المستخدم ليخبر لايتك بأن عدد المراجع لن يتجاوز هذا الرقم، وعدم كتابته سيؤدى إلى عدم ظهور الأرقام المتسلسلة في قائمة المراجع.

3.2.5 تعريف البيئات الجديدة و البيئات الخاصة

جرت العادة في الكتابة الرياضية في معظم المقالات أن تأخذ المبرهنات والتخمينات، التعاريف والأمثلة، الملاحظات، الملخص، البرهان، كلاً منها نمط خاص من التنسيق يميزها عن غيرها، ويختلف عن تنسيق النص العادي للمستند. في هذا البند سنتعرف على أعداد هذه التنسيقات. باستخدام الأوامر

```
\theoremstyle{style}
\newtheorem{envname}{caption}[within]
\newtheorem{envname}[numberedlike]{caption}
```

المبرهنات و التخمينات: تكتب المبرهنات (Theorem, Proposition, Corollary, Lemma) والتخمينات (Conjecture) بنص مائل و عنوان بارز بخط روماني. مع ترقيمها بترقيم موحد. ينفذ هذا الأمر في مرحلتين:

أولاً: يتم التعريف عن البيئات الجديدة في بداية المستند بإتباع التالي

- استبدال style بـ plain لتخبر الايتك بأنك ترغب في تنسيق ينتج عنوان بارز بالخط الروماني وجسم نص بالخط المائل.
- استبدال within بـ section لتخبر الايتك بأنك ترغب في إظهار رقم القسم جنباً إلى جنب مع رقم المبرهنات.
- caption في كل مرة نكتب الأمر newtheorem\ هي اسم إحدى المصطلحات Theorem, Proposition, Corollary, Lemma , Conjecture
- envname هو عنوان البيئة والذي يختلف تبعاً لاسم المصطلح، فمثلاً للمصطلح Theorem لنختار له العنوان thm، والمصطلح Lemma العنوان lem،... وهكذا.
- numberedlike نستبدلها بعنوان البيئة الأولى، وذلك لتخبر لايتك أن ترغب في ترقيم موحد ومتسلسل.

فمثلاً إذا كانت نتائج الباحث التي توصل إليها هي Theorem، و Lemma ، و Conjecture. فإننا سنكتب

```
\theoremstyle{plain}

\newtheorem{thm}{Theorem}[section]
\newtheorem{lem}[thm]{Lemma}
\newtheorem{conj}[thm]{Conjecture}
```

ملاحظة: الـ [thm] تعني أن هذه البيئات لها نفس الترقيم المتسلسل.

ثانياً: عند الحاجة لكتابة احد النتائج أو جميعها نستخدم البيئة

```
\begin{envname}

Text

\end{envname}
```

حيث envname هو عنوان البيئة الذي نريد كتابتها. فمثلاً إذا أراد الباحث كتابة نص النتائج التي توصل إليها في القسم الثالث، سيعمل التالي:

```
\begin{thm}

A subset of the real line is compact if and only if it is closed and
bounded.

\end{thm}

\begin{lem}

In any graph, the sum of the degrees of the vertices is twice the number of
edges.

\end{lem}

\begin{conj}

All perfect numbers are even.

\end{conj}
```

لنحصل على

Theorem 3.1. *A subset of the real line is compact if and only if it is closed and bounded.*

Lemma 3.2. *In any graph, the sum of the degrees of the vertices is twice the number of edges.*
Conjecture 3.3. *All perfect numbers are even.*

التعاريف والأمثلة: تكتب التعاريف والأمثلة بعنوان بارز روماني و بنص روماني، مع ترقيم التعاريف والأمثلة كلاً على حدة. بطريقة مشابهة لكتابة المبرهنات، نكتب التعاريف والأمثلة ولكن باستعمال الأمرين

\theoremstyle{style}

\newtheorem{envname}{caption}[within]

أولاً: يتم التعريف عن البيئات الجديدة في بداية المستند بإتباع التالي

- استبدال style بـ definition لتخبر الايتك بأنك ترغب في تنسيق ينتج عنوان بارز بالخط الروماني وجسم نص بالخط الروماني.
- استبدال within بـ section لتخبر الايتك بأنك ترغب في إظهار رقم القسم جنباً إلى جنب مع رقم التعريف، المثال.
- caption في كل مرة نكتب الأمر \newtheorem هي اسم إحدى المصطلحات Definition, Example
- envname هو عنوان البيئة والذي يختلف تبعاً لاسم المصطلح، فمثلاً للمصطلح Definition لنختار له العنوان definition، والمصطلح Example العنوان exa.

لنكتب إذن

\theoremstyle{definition}

\newtheorem{definition}{Definition}[section]

\newtheorem{exa}{Example}[section]

ثانياً: عند الحاجة لكتابة التعاريف والأمثلة نستخدم البيئة

\begin{envname}

Text

\end{envname}

حيث envname هو عنوان البيئة الذي نريد كتابتها. فمثلاً إذا أراد الباحث كتابة تعريفيين في القسم الثاني وهو القسم الخاص بالتعاريف، وايضاً كتابة مثال في القسم الثالث وهو القسم الخاص بالنتائج سيعمل التالي:

\begin{definition}

A \emph{ prime } number is a positive integer with no positive integer

divisors other than 1 and itself .

\end{definition}

\begin{definition}

A \emph{ set } is a collection of well-defined, unordered, distinct objects.

\end{definition}

\begin{exa}

This equation has no solutions.

The solution set of this equation is empty.

\end{exa}

لنحصل على

Definition 2.1. A *prime* number is a positive integer with no positive integer divisors other than 1 and itself .

Definition 2.2. A *set* is a collection of well-defined, unordered, distinct objects.

Example 3.1. This equation has no solutions. The solution set of this equation is empty.

الملاحظات: تكتب الملاحظات بعنوان مائل وبنص روماني، مع ترقيم الملاحظات أذا كانت أكثر من ملاحظة، أو وتم عمل إشارة مرجعية لإحدى الملاحظات في المقال. بطريقة مشابه لكتابة التعاريف والأمثلة، باستعمال الأمرين

\theoremstyle{style}

\newtheorem{envname}{caption}[within]

أولاً: يتم التعريف عن البيئات الجديدة في بداية المستند بإتباع التالي

- استبدال style بـ remark لتخبر الايتك بأنك ترغب في تنسيق ينتج عنوان بخط مائل وجسم نص بالخط الروماني.
- استبدال within بـ section لتخبر الايتك بأنك ترغب في إظهار رقم القسم جنباً إلى جنب مع رقم الملاحظة.
- استبدل caption بـ اسم المصطلح Remark .
- envname هو عنوان البيئة والذي يختلف تبعاً لاسم المصطلح، فمثلاً للمصطلح Remark لنختار له العنوان rem .

لنكتب إذن

\theoremstyle{remark}

\newtheorem{rem}{Remark}[section]

ثانياً: عند الحاجة لكتابة ملاحظة نستخدم البيئة

\begin{envname}

Text

\end{envname}

حيث envname هو عنوان البيئة الذي نريد كتابتها. فمثلاً إذا أراد الباحث كتابة الملاحظة التالية في القسم الثاني

\begin{rem}

We find a degree of divisors by relationship ~$n=k-1$.

\end{rem}

لنحصل على

Remark 2.1. We find a degree of divisors by relationship $n = k - 1$.

ملاحظة: علامة النجمة * تحذف الترقيم. فإذا أراد الباحث كتابة تعريف واحد، ومثال واحد، ومبرهنة واحدة، وملاحظة واحدة. فإنه فقط سيستخدم الأمرين

\theoremstyle{style}

\newtheorem*{envname}{caption}

البيئات الخاصة: وهي بيئات ذات تنسيق خاص يزودنا بها برنامج الايتك ولا نحتاج إلى تعريفها في بداية المستند وهي، بيئة الموجز، و بيئة البرهان. فالموجز يكتب بنص روماني بحجم اصغر من خط المستند، وكذلك مصطلح abstract، واما البرهان يبدأ بالمصطلح proof بخط مائل وبجسم نص روماني وينتهي بعلامة المربع الصغير، فعلى سبيل المثال

\begin{abstract}

We have found out new sequences called the divisors sequences. By the four original theorems we have proved them.

\end{abstract}

\begin{proof}

To prove the corollary, we note that the distinct primes are a subsequence of basic sequence. Using the symbol $ p_{k} $ instead of $ a_{k} $ in the proof of Theorem.

\end{proof}

لنحصل على

Abstract

We have found out new sequences called the divisors sequences. By the four original theorems we have proved them.

Proof . To prove the corollary, we note that the distinct primes are a subsequence of basic sequence. Using the symbol p_k instead of a_k in the proof of Theorem.

□

أما إذا راد الباحث ترقيم وعنونة البراهين يستعمل البيئة

```
\begin{proof} [caption]
Text
\end{proof}
```

حيث يتم استبدال caption بـ اسم المبرهنة المراد أثباتها، فعلى سبيل المثال.

```
\begin{proof}[Proof of Theorem~{\rm\ref{mythm}}]
 Using `\verb"proof*"' does not produce a square box.
\end{proof}
```

لنحصل على

Proof of Theorem 2.1. Using `proof*' does not produce a square box.

□

4.2.5 الشكل العام للمقال

عندما تبدأ بطباعة المقال، بالطبع أنك لا تتبنى أسلوب أي مجلة معينة، لذلك يجب أن تستعمل أسلوب معياري لطباعة المقال، بعد إرسال المقال والموافقة على نشرة يجب أعادة طباعته وفق الشكل العام للمجلة المنوي النشر فيها.

في هذا البند سنأخذ مثال فقط وليس مقال حقيقي، لنتعرف من خلاله على الشكل العام لكيفية كتابة المقال. لنبد الآن كتابة مقالنا المتجمع من البنود السابقة.

```
\documentclass[12pt,a4paper]{article}
\usepackage[ansinew]{inputenc}
\usepackage{amsmath}
```

```
\usepackage{amsfonts}

\usepackage{amssymb}

\usepackage{makeidx}

\usepackage{amsthm}

\numberwithin{equation}{section}

\begin{document}

\title{A Sample Article in LATEX}

\author{Mohammed Abdulla Saeed Salem \\

Department of Mathematics \\
College of Education—Radfan \\
University of Aden\\
P. O. Box (201) Alhuta, Yemen \\
E-mail: alhoshiby@hotmail.com }
\date{ }

\theoremstyle{definition}

\newtheorem{definition}{Definition}[section]

\newtheorem{exa}{Example}[section]

\theoremstyle{remark}

\newtheorem{rem}{Remark}[section]

\theoremstyle{plain}

\newtheorem{thm}{Theorem}[section]

\newtheorem{lem}[thm]{Lemma}
\newtheorem{conj}[thm]{Conjecture}

\maketitle

\begin{abstract}
We have found out new sequences called the divisors sequences. By the
four original theorems we have proved them.
\end{abstract}
```

```
\noindent \textbf{ Keywords:} the Gregory-Newton's.

\section{Introduction }
Finding the general term of primes have had a strong appeal to
mathematicians for centuries.  e.g. Euler's polynomial $ k^{2}+k+41.$

\noindent But is there method to find the general term for any finite
sequence of primes?.
  Using the Newton formula for the collocation polynomial, which can be
written as (for more details, see \cite[Ch. 2]{Spiegel})
\begin{equation}
f(x)
\end{equation}
\noindent This paper has answered this question by one corollary.

\section{ Notation and Definitions}
\begin{definition}
A \textit{prime}  number is a positive integer with no positive integer
divisors other than $ 1 $ and itself.
\end{definition}
\begin{definition}
A \textit{set} is a collection of well-defined, unordered, distinct objects .
\end{definition}
\begin{rem}
We find a degree of divisors by relationship ~$n=k-1$.
\end{rem}

\section{The Results}
We have proved the following results:
\begin{thm}
A subset of the real line is compact if and only if it is closed and
bounded.
\end{thm}
\begin{lam}
In any graph, the sum of the degrees of the vertices is twice the number of
edges
\end{lam}
\begin{conj}
All perfect numbers are even.
\end{conj}
\begin{exa}
This equation has no solutions. The solution set of this equation is empty .
\end{exa}
```

```
\section{The Results and Proofs}
\begin{proof}
To prove the corollary, we note that the distinct primes are a subsequence
of basic sequence. Using the symbol $ p_{k} $ instead of  $ a_{k} $ in
the proof of Theorem .
\end{proof}

\section*{ Acknowledgement}
Thank you very much.

\begin{thebibliography}{99}
\bibitem{Spiegel}  Murray R. Spiegel, Schaum's Outlines of Theory and
Problems of Calculus of Finite Differences and D
ifference Equations, first Edition, McGraw-Hill, (1971), 33--34.
 \end{thebibliography}

\end{document}
```

لنحصل على

A Sample Article in LATEX

Mohammed Abdulla Saeed Salem
Department of Mathematics
College of Education{Radfan
University of Aden
P. O. Box (201) Alhuta, Yemen.
E-mail: alhoshiby@hotmail.com

Abstract

We have found out new sequences called the divisors sequences. By the four original theorems we have proved them.

Keywords: the Gregory-Newton's.

1 Introduction

Finding the general term of primes have had a strong appeal to mathematicians for centuries. e.g. Euler's polynomial $k^2 + k + 41$.
But is there method to _nd the general term for any _nite sequence of

primes?. Using the Newton formula for the collocation polynomial, which can be written as (for more details, see [1, Ch. 2])

$$f(x) \tag{1.1}$$

This paper has answered this question by one corollary.

2 Notation and Definitions

Definition 2.1. A *prime* number is a positive integer with no positive integer divisors other than 1 and itself .

Definition 2.2. A *set* is a collection of well-defined, unordered, distinct objects.

Remark 2.1. We find a degree of divisors by relationship $n = k - 1$.

3 The Results

.

Theorem 3.1. *A subset of the real line is compact if and only if it is closed and bounded.*

Lemma 3.2. *In any graph, the sum of the degrees of the vertices is twice the number of edges.*
Conjecture 3.3. *All perfect numbers are even*
Example 3.1. This equation has no solutions. The solution set of this equation is empty.

4 The Results and Proofs

Proof . To prove the corollary, we note that the distinct primes are a subsequence of basic sequence. Using the symbol p_k instead of a_k in the proof of Theorem.

□

Acknowledgement

Thank you very much.

References

[1] Murray R. Spiegel, Schaum's Outlines of Theory and Problems of Calculus of Finite Differences and Difference Equations, first Edition, McGraw-Hill, (1971), 33-34.

5.2.5 كتابة الصيغ الرياضية

تبنى الصيغة الرياضية من مكونات مختلفة تصنف كالتالي:

- العمليات الحسابية.
- الخفض والرفع.
- الأوسمة.
- معاملات ذات الحدين.
- التطابق.
- علامات الحصر.
- المعاملات.
- علامات الحذف.
- التكاملات.
- المصفوفات.
- الجذور.
- المجموع والمضروب.
- النص.

العمليات الحسابية: تكتب العمليات الحسابية $a+b, a-b, -a, a\,/\,b, ab,$ كما هو متوقع كالتالي:

$a + b$, $a - b$, $-a$, a / b, $a b$

إذا رغبت في استعمال $\cdot$ او $\times$ للضرب، استعمل \cdot أو \times على التوالي. التعابير $a \cdot b$ و $a \times b$ تكتب كالتالي:

$a \cdot b$ and $a \times b$

الكسور المعروضة، مثل

$$\frac{1 + 2x}{x + y + xy}$$

تكتب باستعمال الأمر \frac{ }{ } كالتالي:

```
\[
\frac{1 + 2x}{x + y + xy}
\]
```

الخفض والرفع: يمكن رفع أو خفض الرموز لكتابة أس أو دليل علوي أو سفلي باستعمال الأمر

^{ … } للرفع ، والأمر _{…} للخفض. فعلى سبيل المثال : a_{i_1}, a^2, a^{i_1} تكتب كالتالي

$a_{i_{1}}$, a^{2}, $a^{i_{1}}$:تكتب كالتالي

```
$a_{i_{1}}$, $a^{2}$, $a^{i_{1}}$
```

الأوسمة: أكثر أربعة أوسمة رياضية تستعمل هي:

$\bar{a}$ تكتب `$\bar{a}$`.

$\hat{a}$ تكتب `$\hat{a}$`.

$\tilde{a}$ تكتب `$\tilde{a}$`.

$\vec{a}$ تكتب `$\vec{a}$`.

معاملات ذات الحدين: لكتابة معاملات ذات الحدين نستعمل الأمر \binom{ … }{ … }

فعلى سبيل المثال $\binom{a}{b+a}$ تكتب ضمن النص `$\binom{a}{b + c}$` .

بينما النسخة المعروضة

$$\binom{a}{b+a}\binom{\frac{n^2-1}{2}}{n+1}$$

تكتب

```
\[
```

```
\binom{a}{b + c} \binom{\frac{n^{2} - 1}{2}}{n + 1}
\]
```

التطابق: الصيغتان الأكثر أهمية للتطابق هما

$a \equiv v \pmod{\theta}$ يكتب $a \equiv v \pmod{\theta}$.

$a \equiv v \pod{\theta}$ يكتب $a \equiv v \pod{\theta}$.

علامات الحصر: وهي الأقواس الهلالية، المربعة، المجعدة، رمز القيمة المطلقة،...،الخ.

التي تأخذ الأوامر \left(… \right) ، \left[… \right] ، \left{… \right} ،...، الخ.

حجم علامات الحصر هذه يتناسب مع حجم الرموز بداخلها آلياً، بخلاف (...) ، […]. فعلى سبيل المثال الصيغة $(a + b)^2$ تكتب $(a + b)^{2}$ و الصيغة

$$\left(\frac{1 + x}{2 + y^2}\right)^2$$

تكتب

```
\[
\left( \frac{1 + x}{2 + y^{2}} \right)^{2}
\]
```

مثال أخر، الصيغة

$$\left|\frac{a + b}{2}\right|, \left\|A^2\right\|$$

تكتب

```
\[
\left| \frac{a + b}{2} \right|,
\quad \left\| A^{2} \right\|
\]
```

المعاملات: الرموز الرياضية / ,+,-,=,! الموجودة في لوحة المفاتيح يمكن إدخالها مباشرة، ولا تحتاج إلى أمر محدد أو طريقة إدخال خاصة. لكن $a \neq b$ تكتب $a \neq b$ ، و $+\infty$

تكتب $+\infty$ ، الدالة $\sin x$ تكتب $\sin x$، و $\ln x$ تكتب $\lnx$. وبنفس الطريقة

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

تكتب

```
\[
\lim_{x \to 0} f(x) = 0
\]
```

علامات الحذف: لا تكتب ثلاث نقط ’’...‘‘ للحذف، استعمل \cdots بين العمليات (+،−، ×، ...، الخ) و \ldots في المتتابعات. فعلى سبيل المثال $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تكتب

```
$F(x_{1}, x_{2}, \ldots , x_{n})$
```

و كذلك $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ تكتب $x_{1} + x_{2} + \cdots + x_{n}$.

التكاملات: نستخدم الأمر { ... }^{ ... }_int\ لكتابة رمز التكامل. فعلى سبيل المثال لكتابة

$$\int_{0}^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

نكتب

```
$$\int_{0}^{\pi} \sin x \, dx = 2$$
```

الأمر ,\ لعمل مسافة رقيقة.

المصفوفات: الجدول التالي يوضح أربعة أنواع من البيئات المختلفة لكتابة المصفوفات، حيث يمكن إضافة إي عدد من الصفوف باستخدام الأمر \\ ، ويتم الفصل بين كل خانة وأخرى باستخدام الرمز & .

الرقم	طريقة الإخراج على الـ pdf	مـــثال	البيئــــــة
-1	$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}$	$ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix} $	\begin{matrix} …. \end{matrix}
-2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} $	\begin{pmatrix} …. \end{pmatrix}
-3	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	$ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} $	\begin{bmatrix} …. \end{bmatrix}
-4	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$	$ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} $	\begin{vmatrix} …. \end{vmatrix}

الجذور: نستخدم الأمر \sqrt{ … } لكتابة الجذر ألتربيعي. فعلى سبيل المثال $\sqrt{2}$ يكتب $\sqrt{ 2 }$ ، لكتابة $\sqrt{a+2b}$ نكتب $\sqrt{a + 2b}$. أما الجذر النوني $\sqrt[n]{5}$ يتعامل مع دليلين، ويكتب $\sqrt[n]{5}$.

المجموع و المضروب: نستخدم الأمر \sum_{ … }^{ … } لكتابة رمز المجموع، والأمر \prod_{ … }^{ … } لكتابة رمز المضروب. فعلى سبيل المثال

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad \prod_{i=1}^{n} x_i^2$$

يكتب

```
\[
\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} \qquad \prod_{i=1}^{n} x_{i}^{2}
\]
```

حيث \qquad أمر مسافة لفصل صيغتين.

النص: في بعض الأحيان قد ترغب في كتابة نص في الصيغة الرياضية باستعمال الامر {... }text\ ، وكل ما تعلمناه سابقاً عن تنسيق النصوص يصح هنا. على سبيل المثال

$$a = b \text{ by assumption}$$

ستكتب

```
$$
a = b \text{\qquad by assumption}
$$
```

أسماء المتغيرات في النموذج الرياضي، ستطبع آليا بشكل مائل، اما تنسيق النص أو الحروف المستخدمة في الصيغة الرياضية فإن الجدول التالي يوضح الأوامر اللازمة لذلك.

الـــــنوع	الأمـــــــــر	الـــغرض من استخدامه
نوع الخط	\mathrm{... }	الحروف المكتوبة داخل القوسين المجعدين تظهر بالخط الروماني.
	\mathbf{...}	لظهور الحروف بشكل بارز.
	\mathit{...}	لظهور الحروف بشكل مائل.
	\mathnormal{...}	لظهور الحروف بشكل العادي.
حجم الصيغة	\displaystyle{...}	الصيغة الرياضية المكتوبة داخل القوسين. المجعدين تظهر بالحجم الأكبر المسوح به.
	\textstyle{...}	لظهور الصيغة بالحجم المتوسط .
	\scriptstyle{...}	لظهور الصيغة بحجم صغير.
	\scriptscriptstyle{...}	لظهور الصيغة بالحجم الأصغر المسوح به.
ضبط المسافة	\, or \thinspace	لطباعة مسافة رفيعة بين الرموز.
	\: or \medspace	لطباعة مسافة متوسطة بين الرموز.
	\; or \thickspace	لطباعة مسافة ثخينة بين الرموز.
	\quad	لطباعة مسافة أوسع بين الرموز.
	\qquad	لطباعة مسافة أكبر بين الرموز.

6.2.5 عرض الصيغ الرياضية

حيثما تكتب صيغة رياضية ستحتاج إلى بيئة رياضية معدة لهذا الغرض. وتنقسم الصيغة الرياضية من حيث طريقة عرضها إلى عرض صيغة معينة أو عرض عدة صيغ، ولكل منها بيئتها الخاصة.

عرض معادلة: تعرض أي معادلة رياضية بدون ترقيم باستخدام علامة الدولار المضاعفة $$...$$ أو \[... \] . إذا أردت ترقيم المعادلة استخدم البيئة

\begin{equation} ... \end{equation}\. لايتك يكتب الترقيم آلياً. عند الرغبة في عمل إشارة مرجعية للمعادلة نستعمل

\begin{equation}\label{eqmarker} الصيغة \end{equation}

ولإنتاج الإشارة المرجعية نستخدم الأمر \eqref{eqmarker} .

المعادلة الكبيرة: يمكن تقسيمها إلى عدة صفوف باستخدام البيئة

\[\begin{split} الصيغة \end{split} \]

حيث يستخدم الرمز & لتحديد نقطة الاصطفاف العمودي، ويمكن إضافة أي عدد من الصفوف باستخدام الأمر \\ في نهاية كل صف.

الدالة متعدد القواعد: لكتابة الدالة متعددة القواعد نستخدم البيئة

\[f(x)=\begin{cases} الصيغة \end{cases} \]

بداخل البيئة نستعمل الرمز & لتحديد نقطة الاصطفاف العمودي، والأمر \\ بعد ألانتها من كل صف ما عدا الصف الأخير، والأمر \text{...} لكتابة نصوص الحالات.

عرض عدة صيغ: لعرض صيغتين أو أكثر في اصطفاف عمودي في سطور نستعمل البيئة

\begin{align}.....\end{align}

حيث يستخدم الرمز & لتحديد نقطة الاصطفاف، والأمر \\ بعد الانتهاء من كل صف ما عدا الصف الأخير. هذه البيئة تكتب كل صيغة في صف مع ترقيم متسلسل، بالتالي نستطيع

استخدام الأمر {label{eqmarker\ في كل صف قبل كتابة الأمر \\ (أي عمل إشارة مرجعية)، كما نستطيع ازالة ترقيم بعض الصيغ باستعمال الأمر nonumber\ في كل صف قبل كتابة الأمر \\ .

وعند الرغبة في حذف الترقيم لكل الصيغ نستعمل علامة النجمة * لحذف الترقيم. بمعنى أخر نستعمل البيئة

\begin{align*}…..\end{align*}

ملاحظة: نقط الاصطفاف العمودية في الرياضيات هي علامات التساوي والتباين.

أو بالإمكان استعمال البيئة

\begin{eqnarray}….\end{eqnarray}

وهي شبيه بالبيئة align و الفرق بين البيئة align والبيئة eqnarray في المسافة حول نقاط الاصطفاف العمودي فقط، حيث تعطي البيئة الحالية مسافة اكبر. و تكتب كل نقطة اصطفاف عمودي بين الرمزين &...& ، والأمر \\ بعد الانتهاء من كل صف باستثناء الصف الأخير. هذه البيئة أيضاً تعطي كل صيغة في صف رقم متسلسل، بالتالي نستطيع استخدام الأمر {label{eqmarker\ في كل صف قبل كتابة الأمر \\، كما نستطيع إزالة ترقيم بعض الصيغ باستعمال الأمر nonumber\ في كل صف قبل كتابة الأمر \\ .

وعند الرغبة في حذف الترقيم لكل الصيغ نستعمل البيئة

\begin{eqnarray*}…..\end{eqnarray*}

ولعرض عدة صيغ رياضية في اصطفافات عمودية عدة نستخدم البيئة

\begin{alignat}{number}…..\end{alignat}

حيث تستبدل الكلمة number بعدد طبيعي يشير إلى عدد الأعمدة. تستخدم & بقدر عدد نقاط الاصطفاف العمودي، و الأمر \\ بعد الانتهاء من كل صف باستثناء الصف الأخير.

كل صف يعطى ترقيم متسلسل، ، بالتالي نستطيع استخدام الامر {label{eqmarker\ في كل صف قبل كتابة الأمر \\، كما نستطيع إزالة ترقيم بعض الصيغ باستعمال الأمر nonumber\ في كل صف قبل كتابة الأمر \\ .

وعند الرغبة في حذف الترقيم لكل الصفوف نستعمل البيئة

\begin{alignat*}{number}…..\end{alignat*}

لكتابة عدد من الصيغ الرياضية البسيطة في صفوف وأعمدة نستعمل البيئة

$ \begin{array}{xx…x}…….\end{array} $

حيث إن عدد الأعمدة يتم تحديده من خلال عدد الحروف المجودة في xx…x والتي تستبدل بواحد أو أكثر من الحروف التالية:

r يعنى محاذاة العناصر في ذلك العمود إلى اليسار.

L يعنى محاذاة العناصر في ذلك العمود إلى اليمين.

c يعنى توسيط العناصر في ذلك العمود.

ولإضافة خط فاصل عمودي يضاف" | " بين الحروف المذكورة سلفا، ولإضافة خط فاصل بين الصفوف يستخدم الأمر \hline في بداية كل سطر، ويمكن إضافة إي عدد من الصفوف باستخدام الأمر \\ ، ويتم الفصل بين كل خانة وأخرى باستخدام الرمز & .

ملاحظة: الحجم الافتراضي للصيغ البسيطة داخل البيئة array هو \textstyle ، ولاستعمال النمط البارز يجب استخدام الأمر \displaystyle{ … } في كل خانة يحتاج إليه فيها، وقس على ذلك بقية الأنماط.

أمـــــــثلة محلـــــولة

طريقة الإدخال	شكل الإخراج على الـ بي دي اف	الرقم

`Add $a$ squared and $b$ squared`
`to get $c$ squared. Or, using`
`a more mathematical approach`
`\begin{equation}`
`a^2 + b^2 = c^2`
`\end{equation}`
`Einstein says`
`\begin{equation}`
`E = mc^2 \label{clever}`
`\end{equation}`
`He didn't say`
`\begin{equation}`
`1 + 1 = 3 \tag{dumb}`
`\end{equation}`
`This is a reference to`
`\eqref{clever}.`
	Add *a* squared and *b* squared to get *c* squared. Or, using a more mathematical approach
	$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (3.1)$
	Einstein says
	$E = mc^2 \qquad (3.2)$
	He didn't say
	$1 + 1 = 3 \qquad \text{(dumb)}$
	This is a reference to (3.2).
		-1

`Add $a$ squared and $b$ squared`
`to get $c$ squared. Or, using`
`a more mathematical approach`
`\begin{equation*}`
`a^2 + b^2 = c^2`
`\end{equation*}`
`or you can type less for the`
`same effect:`
`\[ a^2 + b^2 = c^2 \]`
	Add *a* squared and *b* squared to get *c* squared. Or, using a more mathematical approach
	$a^2 + b^2 = c^2$
	or you can type less for the same effect:
	$a^2 + b^2 = c^2$
		-2

`$\forall x \in \mathbf{R}:` `\qquad x^{2} \geq 0$`	$\forall x \in \mathbf{R}: \qquad x^{2} \geq 0$	-3
`$x^{2} \geq 0\qquad` `\text{for all }x\in\mathbf{R}$`	$x^{2} \geq 0\qquad \text{for all }x\in\mathbf{R}$	-4
`${\displaystyle \int f^{-1}(x-x_a)\,dx}$`	${\displaystyle \int f^{-1}(x-x_a)\,dx}$	-5
`${\textstyle \int f^{-1}(x-x_a)\,dx}$`	${\textstyle \int f^{-1}(x-x_a)\,dx}$	-6
`${\scriptstyle \int f^{-1}(x-x_a)\,dx}$`	${\scriptstyle \int f^{-1}(x-x_a)\,dx}$	-7
`${\scriptscriptstyle \int f^{-1}(x-x_a)\,dx}$`	${\scriptscriptstyle \int f^{-1}(x-x_a)\,dx}$	-8

`Examples of Greek characters are`
`$\delta$,`
 	
`$\Delta$, $\theta$, and $\Theta$.\\`
`Note the difference between\\ $\Pi$ and`
`$\prod$ (as in $\prod_{i=1}^n$), and\\`
`between $\epsilon$ and $\varepsilon$.`
	Examples of Greek characters are δ,
	Δ , θ , and Θ .
	Note the difference between
	π and $\prod(as\ in\ \prod_{i=1}^n)$,and
	between ϵ and ε
		-9

Compare \begin{align*} x^2+y^2 &< 1 \\ y &= \sqrt{1-x^2} \end{align*} with \begin{eqnarray*} x^2+y^2 &<& 1 \\ y &=& \sqrt{1-x^2} \end{eqnarray*}	Compare $x^2+y^2<1$ $y=\sqrt{1-x^2}$ With $x^2+y^2 \quad < \quad 1$ $y \quad = \quad \sqrt{1-x^2}$	-10
\begin{alignat*}{2} F_0 &= 0 & \qquad F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 & \qquad F_3 &= 2 \\ F_4 &= 3 & \qquad F_5 &= 5 \end{alignat*}	$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1$ $F_2 = 1 \qquad F_3 = 2$ $F_4 = 3 \qquad F_5 = 5$	-11
\[\begin{split} (x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{k}y^{n-k} \\ &= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2\\ &\quad + \cdots + nxy^{n-1} + y^n\\ \end{split} \]	$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ $= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2$ $+ \cdots + nxy^{n-1} + y^n$	-12
\begin{equation}\label{xx} \begin{split} a& =b+c-d \\ & \quad +e-f \\ & =g+h\\ & =i \end{split} \end{equation}	$a = b + c - d$ $\quad + e - f$ $= g + h \qquad (2.1)$ $= i$	-13
\begin{align} a_1& =b_1+c_1 \nonumber \\ a_2& =b_2+c_2-d_2+e_2 \end{align}	$a_1 = b_1 + c_1$ $a_2 = b_2 + c_2 - d_2 + e_2 \qquad (2.6)$	-14
\[f(x) = \begin{cases} -x & \textnormal{if $x<0$}, \\ x & \textnormal{otherwise} \end{cases} \]	$f(x) = \begin{cases} -x & if\ x < 0 \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$	-15
$a\bmod b \\ x\equiv a \pmod{b}$	$a \bmod b$ $x \equiv a \pmod{b}$	-16
\begin{eqnarray} a & = & b + c \\ & = & d + e + f + g + h + i + j + k + l \nonumber \\ && +\: m + n + o \\ & = & p + q + r + s \end{eqnarray}	$a \quad = \quad b + c \qquad (3.12)$ $= \quad d + e + f + g + h + i + j + k + l$ $+ m + n + o \qquad (3.13)$ $= \quad p + q + r + s \qquad (3.14)$	-17

<table>
<tr>
<td>\begin{equation*}
|x| =
\begin{cases}
-x & \text{if } x < 0,\\
0 & \text{if } x = 0,\\
x & \text{if } x > 0.
\end{cases}
\end{equation*}</td>
<td>$$|x| = \begin{cases} -x & if \quad x < 0 \\ 0 & if \quad x = 0 \\ x & if \quad x > 0 \end{cases}$$</td>
<td>-18</td>
</tr>
<tr>
<td>\[
\Biggl(\sum_{k=1}^n k^3\Biggr) =
\Biggr(\frac{n(n+1)}{2}\Biggr)^2
\]</td>
<td>$$\Biggl(\sum_{k=1}^n k^3\Biggr) = \Biggr(\frac{n(n+1)}{2}\Biggr)^2$$</td>
<td>-19</td>
</tr>
<tr>
<td>\begin{equation*}
\begin{matrix}
1 & 2 \\
3 & 4
\end{matrix} \qquad
\begin{bmatrix}
p_{11} & p_{12} & \ldots
& p_{1n} \\
p_{21} & p_{22} & \ldots
& p_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots
& \vdots \\
p_{m1} & p_{m2} & \ldots
& p_{mn}
\end{bmatrix}
\end{equation*}</td>
<td>$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix}$$</td>
<td>-20</td>
</tr>
<tr>
<td>Compare
\[
\mathbf{M} = \begin{pmatrix}
x & x^2 \\ 1+x & 1+x+x^2 \end{pmatrix}
\]
and
\[
\mathbf{M} = \left(\begin{array}{ll}
x & x^2 \\ 1+x & 1+x+x^2
\end{array}\right)
\]</td>
<td>Compare
$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1+x & 1+x+x^2 \end{pmatrix}$$
And
$$\mathbf{M}=\left(\begin{array}{ll} x & x^2 \\ 1+x & 1+x+x^2 \end{array}\right)$$</td>
<td>-21</td>
</tr>
<tr>
<td>\[\begin{array}{lcr}
\mbox{First number} & x & 8 \\
\mbox{Second number} & y & 15 \\
\mbox{Sum} & x + y & 23 \\
\mbox{Difference} & x - y & -7 \\
\mbox{Product} & xy & 120
\end{array}\]</td>
<td>First number x 8
Second number y 15
Sum x + y 23
Difference x – y -7
Product x y 120</td>
<td>-22</td>
</tr>
<tr>
<td>\begin{eqnarray*}
\cos 2\theta & = & \cos^2 \theta -
\sin^2 \theta \\
& = & 2 \cos^2 \theta - 1
\end{eqnarray*}</td>
<td>$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= cos^2\theta - sin^2\theta \\ &= 2cos^2\theta - 1 \end{aligned}$$</td>
<td>-23</td>
</tr>
</table>

7.2.5 إنشــاء جــدول

لإنشاء جدول نتبع الخطوات التالية:

- الخطوة الأولى هي عمل عنوان وترقيم للجدول باستعمال البيئة

```
\ begin{table}
\caption {text}
…
\end{table}
```

نستبدل text بعنوان الجدول.

- الخطوة الثاني هي توسيط الجدول باستعمال بيئة المحاذاة

```
\begin{center}
…
\end{center}
```

- والخطوة الأخيرة هي إنشاء الجدول باستخدام البيئة

```
\begin{tabular}{xx…x}
…
\end{ tabular}
```

حيث xx…x تمثل عدد الأعمدة، والتي يمكن استبدالها بواحد أو أكثر من الحروف التالية:

r ويعنى محاذاة العناصر في ذلك العمود إلى اليسار.

L ويعنى محاذاة العناصر في ذلك العمود إلى اليمين.

c ويعنى توسيط العناصر في ذلك العمود.

ولإضافة خط فاصل عمودي يضاف" | " بين الحروف المذكورة سلفاً، ولإضافة خط فاصل بين الصفوف يستخدم الأمر \hline في بداية كل سطر، ويمكن إضافة إي عدد من الصفوف

باستخدام الأمر \\ ، ويتم الفصل بين كل خانة وأخرى باستخدام الرمز & . لإدراج نص أو اشارة أو فراغ بين الاعمدة نستخدم {   }@ . ولدمج الخلايا استخدم الأمر

\multicolumn{عدد الخلايا أو الأعمدة المراد دمجها}{c}{نص الخلية المدمجة}

لإضافة خط أفقي داخل الجدول استخدم الأمر \cline{i-j} حيث i , j أرقام الأعمدة. فعلى سبيل المثال \cline{3-5} ينتج خط أفقي ممتد من العمود 3، 4 إلى العمود 5.

أمـــــــثلة محلــــولة

الرقم	شكل الإخراج على الـ بي دي اف	طريقة الإدخال
1	7C0 Hexadecimal 3700 octal 11111000000 binary 1984 decimal	\begin{tabular}{|r|l|} \hline 7C0 & hexadecimal \\ 3700 & octal \\ \cline{2-2} 11111000000 & binary \\ \hline \hline 1984 & decimal \\ \hline \end{tabular}
2	Ene Mene Muh!	\begin{tabular}{|c|c|} \hline \multicolumn{2}{|c|}{Ene} \\ \hline Mene & Muh! \\ \hline \end{tabular}
3	leading space left and right	\begin{tabular}{l} \hline leading space left and right\\ \hline \end{tabular}

<table>
<tr>
<td>\begin{table}
\caption{}
\begin{center}
\begin{tabular}{@{} c r @{.} l
@{}} \hline
e expression &
\multicolumn{2}{c}{Value}
\\ \hline
e & 2 & 7183 \\
e^e & 15 & 155 \\
$(e^e)^e$ & 1618 & 5 \\ \hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}</td>
<td>Table 1:
<table><tr><td>e expression</td><td>value</td></tr><tr><td>e</td><td>2.7183</td></tr><tr><td>e^e</td><td>15.155</td></tr><tr><td>$(e^e)^e$</td><td>1618.5</td></tr></table></td>
<td>4</td>
</tr>
<tr>
<td>\begin{table}
\caption{the first table}
\begin{center}
\begin{tabular}{||l|l||} \hline
n & $P_n(x)$ \\ \hline
0 & $ 1 $ \\
1 & x \\
2 & $(3x^2-1)/2$ \\
3 & $(5x^3-3x)/2$ \\ \hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}</td>
<td>Table 2: the first table
<table><tr><td>n</td><td>$P_n(x)$</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>x</td></tr><tr><td>2</td><td>$(3x^2-1)/2$</td></tr><tr><td>3</td><td>$(5x^3-3x)/2$</td></tr></table></td>
<td>5</td>
</tr>
</table>

8.2.5 المختصرات

الاختصار Macro هو مجموعة من الصيغ أو النصوص أو الاثنين معاً يمكن حفظها لتنفذ دفعة واحدة فيما بعد بواسطة أمر جديد يتم تعريفه في الديباجة.

و يتم تعريف الأمر : أما باستعمال الأمر

\newcommand{\name}{definition}

حيث name هو اسم الأمر الجديد، و Definition هو تعريف الأمر الجديد.

وعند الرغبة في تنفيذ الأمر في أي مكان من المستند نكتب الأمر \name .

أو يتم التعريف باستعمال الأمر

\newcommand{\name}[counter]{definition}

حيث name هو اسم الأمر الجديد، و definition هو تعريف الأمر الجديد، و counter يشير إلى عدد التعريفات المتغيرة التي يمكن أن يأخذها الأمر الجديد (تصل إلى تسعة تعريفات متغيرة كحد أقصى) والتي يشار إليها بالرموز 9 # ,..,#1, #2 على الترتيب.

وعند الرغبة في تنفيذ الأمر في أي مكان من المستند نكتب الأمر

\name{definition 1}{definition 2}…{definition 9}

ويلجأ الباحث للاختصار للأسباب التالية:

- إذا وجد رمز معقد يظهر أكثر من مرة في المستند أو نص، اصنع له اختصار. فمثلا لكتابة العبارة the not so short introduction to أكثر من مرة، يمكن اختزالها بأمر جديد لنسميه tenss ، فيكون تعريف الأمر الجديد على النحو التالي:

\newcommand {\tenss }{ the not so short introduction to }

الآن عند كتابة الأمر tenss\ في أي موضع في المستند سيتم طباعة العبارة المذكورة.
مثال أخر إذا أردت كتابة الرمز $\mathbb{R}_+^n$ أكثر من مرة، يمكن اختزاله بأمر جديد لنسميه rnp\ ، فيكون تعريف الأمر الجديد على النحو التالي:

\newcommand{\rnp}{\mathbb{R}^{n}_{+}}

الآن عند كتابة الأمر $\rnp$ في أي موضع في المستند سيتم طباعة الرمز المذكور.

- يفضل عمل الاختصار إذا كنت تستعمل أكثر من مرة صيغ مبنية وفقاً لمخطط هيكلي تعتمد على بارامترات. فعلى سبيل المثال لطباعة العبارتين

This is not introduction 3 to

This is very introduction 6 to

يمكن اختزال العبارتين بأمر جديد نسيمه txist ، نكتب الأمر الجديد على النحو التالي:

\newcommand{\txsit}[2]{ This is #1 introduction #2 to }

الآن لطباعة العبارتين المذكورتين في المستند نكتب الأمرين التاليين:

\txist{not}{3}

\txist{very}{6}

مثال أخر الصيغتان $i_1 \ldots i_n, k_1 \ldots k_m$ تعتمد على بارامترين ويمكن أن تكتبهم باختصار

\newcommand{\row}[2]{#1_{1},\ldots,#1_{#2}}

وعند الطباعة في جسم المستند نكتب

$ \row{i}{n}, \row{k}{m}$

- استعمال الاختصار يكاد يكون إجباري، إذا قدمت نموذج متغير من الترميز قد يتغير أثناء عملية الكتابة للأسباب المختلفة. فعلى سبيل المثال إذا عرفت فراغات جديدة تعتمد على ثلاثة بارمترات وفي بداية الترميز كان الفراغ من النوع $H_r^{p,q}$ ، يبدو مناسباً تقديم الاختصار

\newcommand{\msp}[3]{H^{#1,#2}_{#3}}

أذا فيما بعد رغبت في تغيير H لبعض الرموز الأخرى، أو إعادة ترتيب الأدلة، فإننا قد نكتب على سبيل المثال

$\msp{p}{q} {r} $ and $ \msp{i}{j} {k} $

لنحصل على

$$H_r^{p,q} \quad and \quad H_k^{i,j}$$

مثال أخر، إذا أراد الباحث التعامل مع المحددات قد يعرف

\newcommand{\col}[1]{\left[\begin{matrix} #1 \end{matrix} \right]}

الآن نستطيع طباعة

\[\col{1\\ 2 \\ 3\\}+\col{-1\\ 3 \\ -2\\} =\col{0\\ 5 \\ 1\\} \]

لنحصل على

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\5\\1\end{bmatrix}$$

ملاحظة: لا تستعمل اختصارات لأوامر الايتك. فعلى سبيل المثال لا تختصر

\begin{equation} لتصبح \be .

الفصل السادس

المجلات

أن الهدف الأساسي لأي باحث بعد كتابة الأطروحة (ماجستير MSc أو دكتوراه PhD) هو نشر هذا البحث في أحد المجلات العلمية العالمية بغرض إدخاله في بنوك المعلومات لأضافته إلى المعرفة الإنسانية وسعياً لتداوله بين الباحثين، فالبحث المنشور هو أقوى من البحث الغير منشور، وهنا يجب علينا أن نوضح أولاً الفرق بين البحث المعد للنشر والمسمى مقال (ورقة بحثية) research paper ، وبين الأطروحة thesis أو dissertation التي تعتبر تركيب متميز، بين الكتاب القصير و المقال العلمي، في المقارنة التالية:

الأطروحة	المقال العلمي
1. الحد الأدنى خمسون صفحة، الطول يتفاوت حسب الموضوع، والمتطلبات المؤسساتية. 2. الشكل العام - عنوان البحث - الملخص Summery: يهدف إلى لم شتات الموضوع بصفحات. ويتلى ذلك ، كلمة الشكر ، جدول المحتويات، و قوائم الجداول، قوائم الأشكال، قوائم الرموز الرياضية . - الجسم: الجسم يحتوي على معظم المادة، شكله العام يقسم إلى فصول، وتقسم الفصول إلى أقسام، و أقسام فرعية. طول الفصول المستقل قد يتفاوت، خاتمة قصيرة لكل فصل أمر	1. الحد الأدنى ثلاث ورق، الطول يتفاوت حسب الموضوع، ومتطلبات المجلة المنوي النشر فيها. 2. الشكل العام - عنوان البحث - الموجز Abstract: الهدف الرئيسي للموجز هو تقديم النتائج الأساسية للبحث دون الخوض في تفاصيل كثيرة في حد أعلى 200 كلمة. - مقدمة: الهدف منه هو إعطاء فكره تساعد على فهم البحث ككل. - الجسم: يشير إلى إستراتيجية تقديمك لموضوعك حيث يناقش الجسم السمات المختلفة للموضوع بشكل انفرادي أي كلاً على حده. الشكل

مرغوب أن لم يكن إلزامي. - الفصل الأول هو المقدمة: هنا نجد خلفية المادة، تفاصيل كافية قادرة على فهم النتائج الرئيسية، وصف محتوى بقية ألأطروحة. - قائمة المراجع - الملاحق: وهو يحتوي على المادة المساعدة التي لا تدخل في النص الرئيسي كجداول البيانات، بيانات كمبيوتر، براهين طويلة ومملة،...، الخ.	العام للجسم يقسم إلى أقسام، و أقسام فرعية. - القسم قبل الأخير في البحث هو كلمة الشكر: حيث يشكر المؤلف أناس لتوجيههم ودعمهم. - قائمة المراجع: وهي قائمة المصادر التي اعتمد عليها الباحث. - الملاحق: والهدف منها إعطاء تفاصيل خاصة، أو إعطاء معلومات عامة. مع ملاحظة أن هذا البند يمكن أن يحذف إذا أرتا الباحث عدم إضافته.

أن أكثر المقالات متخصصة أي أنها تبلغ نتائج جديدة إلى الاختصاصيين دائما ضمن نطاق ضيق، لذلك تحتوي على لغة اصطلاحية غير مفسرة و اقتباسات مقتضبة شائعة، ولذا فالقرارات الواعية يجب أن تجعل منذ البداية لأن العنوان، الموجز، الفقرات الأولى للمقدمة ستحدد المسار لبقية المقال بالنسبة لقبوله أو عدم قبوله للنشر.

بعد الانتهاء من كتابة المسودة الأولى للمقال First Draft تأتي مرحلة المراجعة وتنقيح المقال وهذه المرحلة مهمة جداً، لأنه مهما كان الكاتب متمرس ولديه خبرة فإنه لابد أن يقع في أخطاء أثناء الكتابة ولذا فإن المراجعة ضرورية جداً وهنالك نوعان من المراجعة:

- مراجعة لغوية تشمل لغة المقال وصحة النحو، والعبارات التمهيدية والختامية.
- مراجعة علمية وتشمل مراجعة المحتوى العلمي للمقال.

الأفضل بعد كتابة المقال أن يتركه الكاتب جانباً لعدة أيام أو أسبوع ثم يعود لقراءته، هذه الحيلة (ترك المقال لفترة) تجعل الكاتب ينظر للمقال وكأنه يراه أول مرة وبالتالي يكون أقدر على مراجعته.

بعد المراجعة الأولى يقوم الكاتب بإعطاء المقال للزملاء من ذوي نفس التخصص لقراءته ومراجعته من ناحية علمية، ثم بعد ذلك يعطيه لشخص تكون لغته الأم هي لغة المقال لمراجعته من ناحية لغوية وإن لم يستطع الوصول لشخص لغته الأم هي لغة المقال يعطي المقال لشخص لغته قوية، فمثلاً إن كان المقال بالإنجليزية ينصح أن تتم مراجعته لغوياً من قبل شخص لغته الأم هي الإنجليزية وإن لم يتوفر هذا الشخص يقوم آخر (ممن لغته الإنجليزية قوية) بمراجعة المقال. بعد الانتهاء من مراجعة المقال تأتي مرحلة تحضير المقال للتسليم للمجلة، في هذا الفصل سنناقش كيفية البحث عن المجلات العلمية ومعرفة أنواعها، و كيفية التعامل معها.

1.6 البحث عن مجلة

تقريباً كل المجلات العلمية لها مواقع على الانترنت حيث تجد كل المعلومات اللازمة عن كل مجلة في موقعها على الانترنت، وهذا المجلات غالباً ما تتبع أحد دور النشر، لذا فالبحث عن المجلات يتم من خلال البحث في مواقع الويب لدور النشر مثل Springer Elsevier Wiley، و Schaum ، و Mili Publications ... الخ، أو في الجمعيات العلمية مثل الجمعية الامريكية للرياضيات، الجمعية الأوروبية للرياضيات،... الخ، واسهل طريقة للبحث عن مجلات الرياضيات هي البحث في الروابط، والرابط هو عنوان موقع على النت يحتوي على قائمة متنوعة من مجلات الرياضيات، ويتم البحث عن الروابط من خلال محرك البحث الشهير جوجل، وذلك بكتابة الكمات الدليلية ’’ List of journals of mathematics ‘‘، حيث ستحصل على عدد من الروابط كل رابط يحتوي على عدد من المجلات.

كل ما عليك فعله بعد قراءة شروط النشر للمجلة المنوي النشر فيها، هو البحث عن البريد الالكتروني لرئيس تحرير المجلة وإرسال البحث عن طريق بريدك الالكتروني، مع ملاحظة أن اغلب المجلات العلمية تفضل تسليم البحوث على الخط مباشرة، وفي هذه الحالة اما أن تقوم بالتسجيل في موقع المجلة (مثلما تسجل في أي موقع وتختار اسم وكلمة سر) ثم تقوم بتسليم بحثك أونلاين، أو تقوم بتسليم بحثك مباشرة أونلاين بدون تسجيل، وذلك حسب النظام الاكتروني المتبع في المجلة المراد النشر فيها. وفي حالة التسليم أونلاين يتم منح الباحث صفحة

خاصة به، يستطيع من خلالها معرفة كل مايتعلق ببحثة من حيث القبول ،أو الرفض، أو المرجعة... الخ.

2.6 أنواع المجلات العلمية

نستطيع معرفة نوع المجلة العلمية من خلال تصفح موقع المجلة، فكل مجلة متخصصة تعرض في موقعها نوعية المواضيع المقبولة للنشر، وتعرض كذلك الشروط والمعايير الواجب إتباعها في كتابة البحث قبل تسليمه للمجلة، فكل مجلة لها قالبها الخاص بها من حيث حجم الهوامش و طريقة ترتيب المراجع،...، الخ، ويفضل هنا البحث عن ملف الايتك الخاص بالمجلة وذلك لمعرفة الأوامر اللازمة لطباعة المقال، فإذا لم تجد ملف الايتك، فإنه يفضل الاطلاع على المقالات المنشورة في المجلة للإطلاع على شكلها، بعد الاستقرار على المجلة و مراعاة ما تطلبه المجلة يجب أن تكون المجلة المنوي النشر بها مختصة في نفس موضوع البحث أو مجلة عامة وإلا سيكون المقال مصيره الرفض الفوري، فمن غير المعقول مثلاً أن أكتب مقالاً في الجبر وأسلمه لمجلة في الهندسة ! وعلى العموم يوجد ثلاثة انواع من المجلات في الرياضيات:

مجلات عامة: وهي المجلات التي تنشر أي بحث رياضي في أي فرع من فروع الرياضيات.

مثل، مجلة جامعة دمشق للعلوم الأساسية، مجلة جامعة الملك عبد العزيز العلوم، المجلة الأردنية للرياضيات والإحصاء، The Asian Journal of Mathematics ،...، الخ.

مجلات متخصصة: وهي المجلات المتخصصة في مجال معين في الرياضيات، فمثلاً يوجد مجلات متخصصة بنشر الأبحاث المتعلقة بالجبر وأخرى متخصصة بالهندسة، ...، الخ. فعلى سبيل المثال، نعرض أسماء بعض المجلات المتخصصة بنشر الأبحاث المتعلقة بنظرية العدد:

- Journal of Number Theory
- Acta Arithmetica
- International Journal of Number Theory
- Journal of Integer Sequences

• INTEGERS

مجلات متعددة التخصص: وهي المجلات المتخصصة في عدة مجالات معينة في الرياضيات. فعلى سبيل المثال، نعرض أسماء بعض المجلات المتخصصة بنشر الأبحاث المتعلقة بنظرية العدد أو الجبر:

• Algebra and Number Theory

• JP Journal of Algebra and Number Theory

• Journal of Algebra and Number Theory Academia

كذلك يمكن تصنيف المجلات من حيث القوة والضعف. فهناك مجلات ضعيفة تقبل بحوثاً ليست جيدة وهناك مجلات قوية ذات معايير عالية، بالمختصر إن كان البحث منشوراً في مجلة قوية فهذا يعني أن البحث ممتاز، فالمجلة التي تقبل نقود مقابل نشر البحث لك هي مجلة هدفها الأول هو التربح لذا فإنها غالباً تكون مجلات ضعيفة ولكن معترف بها، أما المجلات التي تعتمد فقط على المادة العلمية فهي مجلات محترمة، ولكن للأسف البحث الواحد هناك يظل لمدة تقارب الست أشهر.

3.6 التعامل مع المجلات

بعد أعداد البحث وفقاً للشكل المطلوب للمجلة المراد النشر بها، تبدأ أول خطوة في التعامل مع المجلة وهي إرسال البحث الخاص بك مع رسالة مهذبة إلى رئيس تحرير المجلة. وعند كتابة الرسالة في الانكليزية يجب مراعاة الآتي:

- ضع عنوانك في الجهة اليمنى من أعلى الورقة ثم اكتب تحته التاريخ.
- ضع عنوان المجلة في الجهة اليسرى بدون تاريخ.
- ابدأ الرسالة باسم المخاطب مسبوقاً باللقب الذي تختاره له، و اكتب ذلك في الجهة اليسرى من الورقة (لا تنسى وضع فاصلة بعد عزيزي فلان،).
- بعد ذلك انتقل إلى السطر الثاني تاركاً مسافة عشرة أحرف تقريباً من الهامش وابدأ في كتابة الرسالة.

- اختم الرسالة بعبارة yours sincerely إذا خاطبت المرسل باسمه عند مطلع الرسالة فقلت Dear Tom مثلاً، أما أن لم تذكر اسم الشخص بل قلت في البداية Dear Sir أو Dear Sirs اختم الرسالة بـ yours faithfully.

نقدم الآن مثال لتلك الرسالة:

Flat No. 13/5,
Main Street,
Building No. 5,
Lahej,
Yemen,
16th May 2013.

Mili Publications,
Journal for Algebra and Number Theory Academia,
Allahabad,
India.

Dear Managing Editor,

I would like to submit the enclosed manuscript "The Sequences of Divisors with Finite Differences" for publication in Journal for Algebra and Number Theory Academia.

Yours faithfully

Mohammed Abdullah Saeed

الخطوة الثانية هي انتظار رد من المجلة باستلام بحثك، وقد تصل هذه المدة إلى الشهر على الأكثر، فإذا لم تحصل على رد باستلام البحث عليك السؤال عن بحث، بإرسال رسالة ثانية إلى المجلة تسأل فيها عن البحث المرسل في تاريخ معين. فإن تحصل الباحث على إقرار باستلام البحث وتمت الموافقة على تحكيم البحث (هذا إذا لم يحصل رفض فوري) فيجب عليه الانتظار مرة أخرى.

نقطة أخرى هامة أود التركيز عليها وهي عامل الوقت، كل الباحثين والدارسين يريدون أن تنشر مقالاتهم بأسرع وقت، لأن بعض الأبحاث تصبح قديمة بعد عام أو عامين في انتظار النشر،

المشكلة في الوقت تعود لعدة أسباب منها أن المجلات نوعان من حيث نظام المراجعة:

النوع الأول هو المحدد الوقت بمعني أنه حال استلام مقال جديد يقوم رئيس تحرير المجلة بإرسال المقال للمراجعين ويطلب منهم مراجعة المقال في فترة محددة (من شهر إلى شهرين في الغالب) وهذا النوع من المجلات يتسم بسرعة النشر فيه نسبياً مقارنة مع المجلات الأخرى.

النوع الثاني هو الغير محدد الوقت بمعنى أن المجلة تستلم المقال المقدم ثم ترسله للمراجعين بدون تحديد سقف زمني لهم لإتمام المراجعة، وهذه المجلات تستغرق وقتاً طويلاً للنشر فيها، طبعاً المراجعين في الغالب هم أناس مختصين في مجال المقال وفي الغالب هم أساتذة جامعات حيث أن وقتهم ضيق جداً ولذا فإن معظمهم يستغرق وقتاً طويلاً لمراجعة المقال إن لم يكن لديه سقف زمني، يمكن التأكد من هذه النقطة بالرجوع للأعداد المنشورة للمجلة والإطلاع على الوقت ما بين استقبال المقال لأول مرة وما بين نشره وبالتالي يمكن أخذ فكرة عن الوقت اللازم للنشر. طبعاً ليس كل المجلات تكتب متى تم استلام المقال ولكن معظمها يكتب ذلك.

هنالك نقطة أخرى وهي عدد المراجعين، بعض المجلات تطلب ثلاثة مراجعين لمراجعة المقال وهذا يؤدي لزيادة الوقت اللازم لمراجعة المقال والرد على ملاحظات المراجعين، وهناك مجلات تطلب من شخص واحد المراجعة.

حال تسليم المقال لأحد المجلات لا يجوز قانونياً تسليم المقال لمجلة أخرى ما لم يتم رفض المقال في المجلة الأولى، إن تقديم نفس البحث لأكثر من مجلة للنشر له عواقب وخيمة على المؤلف حيث أن هذا الأمر مخالف لاتفاقية النشر العلمي التي يوقع عليها الباحث (الكترونياً) بموافقته على تقديم البحث للنشر، حيث من الشروط الواردة أن هذا البحث غير مقدم للنشر في مجلة أخرى، وإن تم قبول البحث ونشره في أكثر من مجلة يؤدي الأمر بعد ذلك لسحب هذا المقال وفضح المؤلف وربما طرده من وظيفته أو دراسته إن كان في الجامعة، كما يحرم من النشر لسنوات عديدة. ولذا لو قام البعض بتسليم المقال لأحد المجلات التي تستغرق وقتاً طويلاً فإنه قد ينتظر لمدة سنة في بعض الأحيان ليقولوا له الرد على المقال وإن كان الجواب رفض المقال فإن الأمر سيكون محبطاً جداً خصوصاً بعد أن يكون الكاتب قد انتظر سنة كاملة، لذا من الأفضل (كما قلت سابقاً) معرفة المدة الزمنية التي يستغرقها الرد على المقال في المجلة.

كيف ترد على تعليقات وملاحظات المراجعين ؟

بعد تسليم المقال ومراجعته من قبل المجلة يتم إرسال الملاحظات بخصوص المقال للمؤلف، الرد يحتمل إما رفض المقال أو قبوله أو قبوله مع ملاحظات، سأتكلم عن الحالة الأخيرة، في تلك الحالة قد تكون التصحيحات المطلوبة هامشية وغير جذرية وفي هذه الحالة لا مشكلة أما لو كانت التعديلات المطلوبة كبيرة وجذرية ففي تلك الحالة يجب ما يلي:

- اقرأ كل الملاحظات بتأني وروية.
- لا تتسرع في الرد وإياك أن ترد فوراً، يجب أن تنتظر بضعة أيام لتعاود قراءة الملاحظات والتفكير فيها، مع ملاحظة أن بعض المجلات تحدد فترة زمنية محددة للرد على الملاحظات.
- إذا كانت الملاحظات من قبل المراجعين قد تحسن من مستوى مقالك فمن المفضل الأخذ بها.
- بالامكان المناقشة أو الاعتراض على الملاحظات أو بعضها ولكن يجب مناقشة ذلك بالحجة والمنطق.
- ليس مطلوبا بالضرورة أن تقوم بكل التغييرات التي طلبها المراجع ولكن يجب الرد عليها جميعاً.
- في بعض الأحيان تجد ملاحظات متناقضة من المراجعين أن كانوا أكثر من واحد وفي تلك الحالة يجب إتباع الملاحظة التي تراها أقرب للصواب والرد للمحرر بأنك استلمت تعليقات متناقضة من قبل المراجعين.

إذا تم رفض مقالك أرسله فوراً لمجلة أخرى فقد يتم قبوله فيها، لأن قد لا يوجد عيب في المقال ولكن بعض المجلات ذات معايير عالية وبذات المجلات القوية.

المـــراجـــع

[1] فريدريك هـ. بل. **طرق تدريس الرياضيات**. ترجمة محمد أمين المفتي وممدوح محمد سليمان. القاهرة: الدار العربية، ط4 ، (2001).

[2] وليم عبيد، محمد أمين المفتي، سمير ايليا القمص. **تربويات الرياضيات**. القاهرة: مكتبة الأنجلو المصرية، ط 3 ، (1992).

[3] ج بوليا. **البحث عن الحل الأسلوب الرياضي من زاوية جديدة**. ترجمة أحمد سليم سعيدان. بيروت: منشورات دار مكتبة الحياة، (1960).

[4] سمور ليبشتز. **سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في نظرية الفئة**. ترجمة عمار صلاح الدين حامد. القاهرة: الدار الدولية للنشر والتوزيع، ط 2، (2001).

[5] السيد نصر. **موسوعة الخوارزمي في رياضيات الجامعات جبر الاستنتاج الرياضي**. القاهرة: مكتبة ابن سيناء للنشر والتوزيع والتصدير.

[6] ابو عمر. **كيف تكتب مقالاً علميا**،
http://faculty.mu.edu.sa/public/uploads/1353521507.5309%D9%83%D9%8A%D9%81%20%D8%AA%D9%83%D8%AA%D8%A8%20%D9%85%D9%82%D8%A7%D9%84%D8%A7%20%D8%B9%D9%84%D9%85%D9%8A%D8%A7%20%D8%9F.pdf

[7] Leonard Gillman, **Writing mathematics well A Manual for Authors** ,The Mathematical Association of America,Washington, D.C. (1987).

[8] Jerzy Trzeciak, **Writing Mathematical Papers in English a practical guide**, Printed in Germany by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe,(1995). from http://utvle.files.wordpress.com/2010/09/1995-ems-trzeciak-writing_mathematical_papers_in_english__a_practical_guide.pdf

[9] Franco Vivaldi, **Mathematical writing for undergraduate students**, The University of London, (2013). from http://qmplus.qmul.ac.uk/pluginfile.php/284822/mod_resource/content/6/Web-book.pdf

[10] Ted Sundstrom, **Mathematical Reasoning Writing and Proof**, Version 1.1, Pearson Education, Inc. (2014). from http://scholarworks.gvsu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1007&context=books

[11] Tobias Oetiker, Hubert Partl, Irene Hyna and Elisabeth Schlegl, **The Not So Short Introduction to LATEX**, Version 5.01, April 06, (2011). from http://www.cpt.univ-mrs.fr/~cosmo/HTGRG-2/DOCUMENTS/lshort.pdf

[12] André Heck, **Learning LATEX by Doing**, AMSTEL Institute , March(2005). from http://www.science.uva.nl/onderwijs/lesmateriaal/latex/latexcourse.pdf

إلى القراء الأعزاء

يسر الكاتب أن تكتبوا إليه عن رأيكم في هذا الكتاب، حول مضمونه، أسلوبه وشكل عرضه، ويكون شاكر لكم لو أبديتم له ملاحظاتكم وانطباعاتكم.

السيرة الذاتية

الاسم الرباعي: محمد عبدالله سعيد سالم **اللقب:** محمد ابو قيس

مكان الميلاد وتاريخه: م/لحج م/الملاح ، قرية لصيفر 1979/7/9م

رقم الهاتف النقال: 771307892 **صندوق بريد:** (201) الحوطة م/ لحج – اليمن

البريد الإلكتروني: alhoshiby@hotmail.com

الدرجة العلمية: ماجستير رياضيات (تربويات الرياضيات).

المعارف المعلوماتية: استخدام برامج word, spss, latex

الإنتاج العلمي للباحث:

أولاً: البحوث (اكتشاف علمي) المنشورة في مجال الجبر

[1] Mohammed Abdulla Saeed Salem, The Divisors Sequences with Finite Differences. *Journal for Algebra and Number Theory Academia*, Allahabad, Mili Publications, 4(2) (2014), 31--39.

[2] Mohammed Abdulla Saeed Salem, The General Case for the Divisors Sequences with Finite Differences. *Journal for Algebra and Number Theory Academia*, Allahabad, Mili Publications, 5 (2)(2015), 63--69.

ثانياً: الكتب

[1] محمد عبدالله سعيد سالم، **النمو المعرفي في الهندسة وعلاقته بالتحصيل في الرياضيات لطلبة الصف السابع بمحافظة لحج**، رسالة ماجستير غير منشورة، كلية التربية، جامعة عدن، 2009م.

[2] محمد عبدالله سعيد سالم، **الأسس في كتابة بحوث الرياضيات**،...

هل تريد أن تعرف:

- كيف تكتب بحث رياضيات وفقاً لمعايير دولية؟
- كيف تطبع مقال علمي في الرياضيات؟
- كيف تبحث عن مجلات الرياضيات وكيفية التعامل معها؟
- كل شي عن كتابة مقال علمي في الرياضيات من الكتابة إلى النشر؟

إلى كل محبي الرياضيات من باحثين ومهتمين وموهوبين انشر كتابي الموسوم بـ ''الأسس في كتابة بحوث الرياضيات''بطريقة الكترونية وبالمجان، ليستفيد منه كل من لديه افكار في الرياضيات، ويرغب في نشرها، خدمة للعلم والمتعلمين. وحسب علم الباحث فأن الكتاب هو الكتاب الأكاديمي الوحيد في هذا المجال على مستوى الوطن العربي، ولم يسبق لكاتب عربي أن تناول هذا الموضوع.

اسال الله أن ينتفع به طلاب العلم وأن يجعلة في ميزان حسناتي.

الكتاب يمكن تحميلة من الروابط التالية:

http://www.kuwaiti.co/0mtn9wkstgst

http://up4net.com/do.php?id=14115

http://gulf-up.com/do.php?id=48728

http://download.mrkzy.com/do.php?id=1090148

http://up.harajgulf.com/do.php?id=474046

http://www.m5zn.com/d/?16146033