I. الدوال الأسية النبيرية : Fonctions Exponentielles :

1. تعريف :

نعلم أن $\ln$ دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$. إذن $\ln$ تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو المجال $J = \left]\lim_{x\to 0^+}\ln x , \lim_{x\to +\infty}\ln x\right[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.

الدالة العكسية للدالة $\ln$ تسمى الدالة الأسية النبيرية ونرمز لها بالرمز $\exp$ ، ولدينا : $\exp = \ln^{-1}$ و

$$\begin{array}{rccl} \exp & : & \mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\\ & & x & \mapsto & \exp(x) = \ln^{-1}(x) \end{array}$$

2. ملاحظات :

✓ $\exp$ دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$. ($\exp = \ln^{-1}$)

✓ نعلم أن : $\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ و $\lim_{x\to +\infty}\ln x = +\infty$. إذن :

$\boxed{\lim_{x\to -\infty}\exp(x) = 0}$ و $\boxed{\lim_{x\to +\infty}\exp(x) = +\infty}$

✓ $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \exp(x) > 0}$.

✓ مجموعة تعريف الدالة $\exp$ هي $\mathbb{R}$.

3. قاعدة التحويل :

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[\ , \ \forall y \in \mathbb{R} \ : \ \ln x = y \Leftrightarrow x = \exp(y)}$$

مثال :

$$\ln(1) = 0 \Rightarrow \exp(0) = 1$$
$$\ln(e) = 1 \Rightarrow \exp(1) = e$$
$$\ln(e^2) = 2 \Rightarrow \exp(2) = e^2$$

4. خاصيات :

لكل $x \in \mathbb{R}$ ولكل $y \in \mathbb{R}$ ولكل $n \in \mathbb{N}$ ولكل $r \in \mathbb{Q}$ ، لدينا :

$$\exp(x+y) = \exp(x)\times\exp(y)$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \text{و} \quad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

$$\exp(nx) = (\exp(x))^n \quad \text{و} \quad \exp(rx) = (\exp(x))^r$$

برهان :

نضع : $a = \exp(x)$ و $b = \exp(y)$. إذن : $x = \ln(a)$ و $y = \ln(b)$ و $a > 0$ و $b > 0$.

ولدينا : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) = x + y$ و $ab > 0$. إذن : $ab = \exp(x+y)$. أي :

$$\exp(x+y) = \exp(x)\times\exp(y)$$

5. كتابة جديدة ل $\exp(x)$:

نعلم أن : $\forall r \in \mathbb{Q} \ : \ \ln(e^r) = r$. إذن : $\forall r \in \mathbb{Q} \ : \ \exp(r) = e^r$. ثم نمدد هذه العلاقة إلى $\mathbb{R}$:

نتيجة : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \exp(x) = e^x}$

6. نتائج :

(i $\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty}$; $\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0}$

(ii $\forall x \in \left]0,+\infty\right[\;;\; \forall y \in \mathbb{R} \;:\; \boxed{\ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^{y}}$

(iii $\forall x \in \mathbb{R} \;;\; \forall y \in \mathbb{R} \;;\; \forall r \in \mathbb{Q} \;:$

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{-x} = \dfrac{1}{e^{x}} \;;\; e^{x+y} = e^{x}e^{y} \\ e^{rx} = \left(e^{x}\right)^{r} \;;\; e^{x-y} = \dfrac{e^{x}}{e^{y}} \end{array}}$$

(iv لدينا :

$$\begin{array}{rcl} \exp : \mathbb{R} & \to & \left]0,+\infty\right[\\ x & \mapsto & \exp(x) = e^{x} \end{array}$$

7. نهايات هامة :

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty}$; $\boxed{\lim_{x\to-\infty} xe^{x} = 0}$ $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1}$

برهان :

نعتبر $t = e^{x}$. لدينا : $t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. إذن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\ln(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\frac{\ln(t)}{t}} = +\infty$.

ولدينا : $t \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0^{+}$. إذن : $\lim_{x\to-\infty} xe^{x} = \lim_{t\to 0^{+}} t\ln(t) = -\infty$.

ولدينا : $t \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. إذن : $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{\ln(t)} = \lim_{t\to 1} \frac{1}{\frac{\ln(t)}{t-1}} = 1$.

مثال : أحسب النهايات التالية :

$$A = \lim_{x\to-\infty} x^{2}e^{x} \;;\; B = \lim_{x\to-\infty} x^{3}e^{x} \;;\; C = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^{2}}$$

$$D = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,e^{-x} \;;\; E = \lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \;;\; F = \lim_{x\to-\infty} xe^{2x}$$

8. خاصيات :

خاصية 1 :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \forall x \in \mathbb{R} & : & \ln\left(e^{x}\right) = x \\ \forall x \in \left]0,+\infty\right[& : & e^{\ln(x)} = x \end{array}}$$

خاصية 2 :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \;:\; e^{x} > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \;;\; \forall y \in \mathbb{R} \;: \\ \quad e^{x} = e^{y} \Leftrightarrow x = y \\ \quad e^{x} < e^{y} \Leftrightarrow x < y \\ \quad e^{x} \le e^{y} \Leftrightarrow x \le y \end{array}}$$

مثال : 1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E):\ e^x-5+6e^{-x}=0$.

2. حل في $\mathbb{R}$ المراجحة : $(I):\ e^x-5+6e^{-x}>0$.

الجواب :

1. نضرب طرفي المتعادلة (E) في e^x فنجد :

$$(E) \Leftrightarrow (e^x)^2-5e^x+6=0$$
$$\Leftrightarrow t^2-5t+6=0 \quad / \quad t=e^x$$

ولدينا : $\Delta=1$. إذن : $t=2$ أو $t=3$. وبالتالي فإن :

$$(E) \Leftrightarrow e^x=2 \text{ أو } e^x=3$$
$$\Leftrightarrow x=\ln(2) \text{ أو } x=\ln(3)$$

وبالتالي فإن : $S=\{\ln(2)\ ,\ \ln(3)\}$.

2. بنفس الطريقة ، نجد :

$$(F) \Leftrightarrow (e^x)^2-5e^x+6<0$$
$$\Leftrightarrow t^2-5t+6<0 \quad / \quad t=e^x$$
$$\Leftrightarrow 2<t<3 \quad / \quad t=e^x$$
$$\Leftrightarrow 2<e^x<3$$
$$(F) \Leftrightarrow \ln(2)<x<\ln(3)$$

وبالتالي فإن : $S=]\ln(2),\ln(3)[$.

II. مشتقة الدالة الأسية : Dérivée de la fonction Exponentielle :

1. الدالة المشتقة للدالة exp :

لدينا : $]0,+\infty[\ \mapsto\ \mathbb{R}\ :\ \exp=\ln^{-1}$.

✓ ln دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

✓ $\forall x\in]0,+\infty[\ :\ ln'(x)=\dfrac{1}{x}\neq 0$.

إذن : $\exp=\ln^{-1}$ دالة قابلة للاشتقاق على المجال : $\ln(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$ ، ولدينا:

$$\forall x\in\mathbb{R}\ :\ exp'(x)=(\ln^{-1})'(x)=\frac{1}{ln'(\ln^{-1}(x))}=\frac{1}{\frac{1}{\ln^{-1}(x)}}=\ln^{-1}(x)=\exp(x).$$

وبالتالي فإن : $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ (e^x)'=e^x$.

خاصية :

exp دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\ :\ (e^x)'=e^x}$$

2. مشتقة مركبة exp ودالة قابلة للاشتقاق على مجال :

خاصية :

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I . إذن :

$x \mapsto e^{u(x)}$ دالة قابلة للاشتقاق على المجال I ، ولدينا :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$$

لأن : $\left(e^{u(x)}\right)' = (\exp \circ u)'(x) = u'(x) \times exp'(u(x)) = u'(x) \times \exp(u(x)) = u'(x) \times e^{u(x)}$.

مثال : $\forall x \in \mathbb{R} \ : \ (e^{-x})' = (x)' e^{-x} = -e^{-x}$.

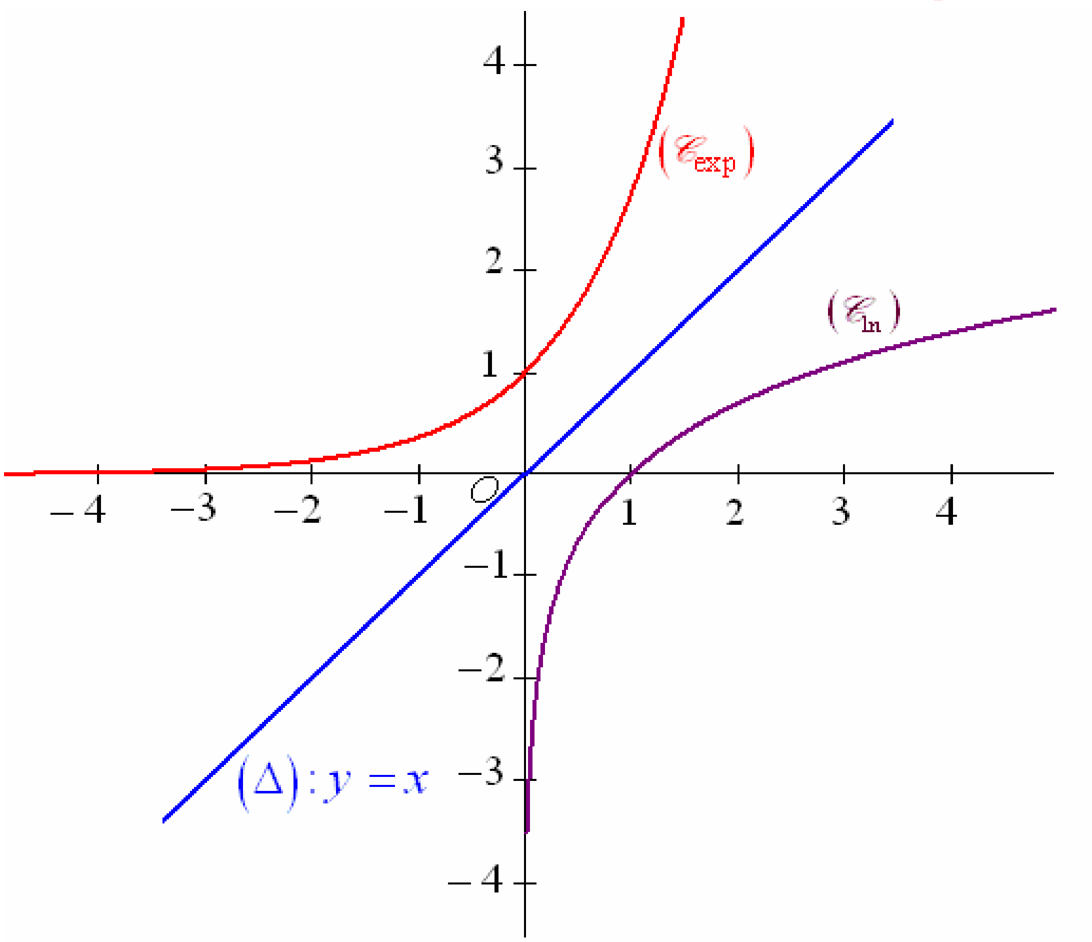
$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ (e^{2x})' = (2x)' e^{2x} = 2e^{2x}$.

3. منحنى الدالة exp :

جدول تغيرات الدالة exp :

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$exp'(x)$	$+$
$\exp(x)$	$0 \nearrow +\infty$

منحنى الدالة exp :



III. الدالة الأسية للأساس a : Fonction Exponentielle à base a :

1. تعريف :

ليكن $a>0$ و $a\neq 1$. نعلم أن $\log_a$ تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$.
التقابل العكسي للدالة $\log_a$ يسمى الدالة الأسية للأساس a ، ونرمز لها بالرمز $\exp_a$ ولدينا:

$$\begin{array}{rccl} \exp_a = \log_a^{-1} : & \mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\\ & x & \mapsto & \exp_a(x) = \log_a^{-1}(x) \end{array}$$

2. قاعدة التحويل :

$$\forall x \in]0,+\infty[\;\; ; \;\; \forall y \in \mathbb{R} \;\; : \qquad \log_a(x) = y \Leftrightarrow x = \exp_a(y)$$

مثال :

$$\log_a(1) = 0 \Rightarrow \exp_a(0) = 1$$
$$\log_a(a) = 1 \Rightarrow \exp_a(1) = a$$
$$\log_a(a^2) = 2 \Rightarrow \exp_a(2) = a^2$$

3. كتابة جديدة ل $\exp_a(x)$:

ليكن $a>0$ و $a\neq 1$. لدينا : $\forall r \in \mathbb{Q} \;:\; \log_a(a^r) = r$. إذن : $\forall r \in \mathbb{Q} \;:\; \exp_a(r) = a^r$.

يمكن أن نعمم هذه النتيجة كما يلي : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \;:\; \exp_a(x) = a^x}$. إذن :

$$\begin{array}{rccl} \exp_a : & \mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\\ & x & \mapsto & \exp_a(x) = a^x \end{array}$$

4. خاصيات :

ليكن $a>0$ و $a\neq 1$.

لكل $x\in\mathbb{R}$ ولكل $y\in\mathbb{R}$ ولكل $r\in\mathbb{Q}$ ، لدينا :

$$\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\times\exp_a(y)$$
$$\exp_a(x-y) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)} \quad ; \quad \exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}$$
$$\exp_a(rx) = \left(\exp_a(x)\right)^r$$

وبتعبير آخر ، لدينا :

لكل $a>0$ و لكل $x\in\mathbb{R}$ ولكل $y\in\mathbb{R}$ ولكل $r\in\mathbb{Q}$ ، لدينا :

$$a^{rx} = (a^x)^r \quad ; \quad 1^x = 1 \quad ; \quad a^{x+y} = a^x \times a^y$$
$$a^{xy} = (a^x)^y \quad ; \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad ; \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

برهان : نضع : $\alpha=\exp_a(x)$ و $\beta=\exp_a(y)$.

إذن : $x=\log_a(\alpha)$ و $y=\log_a(\beta)$ و $\alpha>0$ و $\beta>0$.

ومنه فإن : $\log_a(\alpha\beta)=\log_a(\alpha)+\log_a(\beta)=x+y$ و $\alpha\beta>0$.

إذن : $\exp_a(x+y)=\alpha\beta=\exp_a(x)\exp_a(y)$ ...

قاعدة التحويل تصير : $\boxed{\forall x\in]0,+\infty[\ ;\ \forall y\in\mathbb{R}\ :\ \log_a(x)=y\Leftrightarrow x=a^y}$

مثال : لدينا : $3^x=2\Leftrightarrow x=\log_3(2)=\frac{\ln 2}{\ln 3}$

لاحظ أن :

$$\begin{aligned}3^x=2\ &\Leftrightarrow\ \ln(3^x)=\ln(2)\\ &\Leftrightarrow\ x\ln(3)=\ln(2)\\ &\Leftrightarrow\ x=\frac{\ln 2}{\ln 3}\\ 3^x=2\ &\Leftrightarrow\ x=\log_3(2)\end{aligned}$$

5. كتابة جديدة ل $\exp_a(x)$:

أ- ليكن $a>0$ و $a\neq 1$. ليكن $x\in\mathbb{R}$. نضع : $y=\exp_a(x)$. إذن :

$$\begin{aligned}y=\exp_a(x)\ &\Leftrightarrow\ x=\log_a(y)\\ &\Leftrightarrow\ x=\frac{\ln y}{\ln a}\\ &\Leftrightarrow\ x\ln a=\ln y\\ y=\exp_a(x)\ &\Leftrightarrow\ y=e^{x\ln a}\end{aligned}$$

نتيجة 1 : لكل $a>0$ و $a\neq 1$ ، لدينا : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\ :\ \exp_a(x)=a^x=e^{x\ln a}}$

مثال : لدينا : $3^{\sqrt{5}}=e^{\sqrt{5}\ln 3}$.

ب- نتيجة 2 : لكل $a>0$ ، لدينا : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\ :\ a^x=e^{x\ln a}}$

لاحظ أنه تم تمديد النتيجة 1بإضافة الحالة $a=1$.

6. مشتقة الدالة $\exp_a(x)$ حيث $a>0$ و $a\neq 1$:

ليكن $x\in\mathbb{R}$ ، لدينا : $\exp_a'(x)=\left(e^{x\ln a}\right)'=(x\ln a)'e^{x\ln a}=(\ln a)e^{x\ln a}=(\ln a)\exp_a(x)$

نتيجة 1 : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\ :\ \exp_a'(x)=\ln(a)\exp_a(x)}$

نتيجة 2 : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\ :\ (a^x)'=\ln(a)\times a^x}$

مثال : لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ (2^x)'=(\ln 2)\times 2^x>0$.

IV. تمارين تطبيقية :

تمرين تطبيقي رقم 1 :

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x-1}} & ; \quad x<1 \\ f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x)}{x} & ; \quad x\geq 1 \end{cases}$$

1. أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بين أن f متصلة في 1 .

2. أ- أدرس قابلية اشتقاق f في 1 .

ب- بين أن $f'(x)=\dfrac{x-2}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} \quad : \quad \forall x\in\left]-\infty,1\right[$.

جـ- تحقق من أن f تزايدية قطعا على المجال $\left]1,+\infty\right[$.

د- أعط جدول تغيرات الدالة f .

3. أ- تحقق من أن المستقيم $(D):\ y=x-1$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$ ، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم (D) .

ب- بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x=0$.

4. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

الحل :

1. أ- لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}=\boxed{-\infty}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1-\dfrac{\ln x}{x}=\boxed{+\infty}$.

ب- دراسة اتصال الدالة f في 1 :

لدينا : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} x-1-\dfrac{\ln x}{x}=0=f(1)$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{1}{t}\times e^t=0=f(1)$ ، وذلك بوضع $t=\dfrac{1}{x-1}$.

إذن : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(1)$. ومنه فإن f متصلة في 1 .

2. أ- دراسة قابلية اشتقاق الدالة f في 1 :

لدينا : $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1-\dfrac{\ln x}{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+} 1-\dfrac{\ln x}{x-1}\times\dfrac{1}{x}=1-1=\boxed{0}$. إذن :

f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 و $\boxed{f'_d(1)=0}$. ومنه فإن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نصف مماس أفقي (T_d) على اليمين في النقطة ذات الأفصول 1 معادلته :

$$\begin{cases} y=f'_d(1)(x-1)+f(1) \\ x\geq 1 \end{cases} \text{ . أي : } (T_d):\ \boxed{\begin{cases} y=0 \\ x\geq 1 \end{cases}}$$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-} e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{t\to-\infty} e^t=\boxed{0}$ حيث $t=\dfrac{1}{x-1}$

إذن: f قابلة للاشتقاق على اليسار في 1 و $\boxed{f'_g(1)=0}$. ومنه فإن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نصف

مماس أفقي (T_g) على اليسار في النقطة ذات الأفصول 1 معادلته :

$$\begin{cases} y = f_g'(1)(x-1)+f(1) \\ x \leq 1 \end{cases} \text{ . أي : } (T_g) : \boxed{\begin{cases} y = 0 \\ x \leq 1 \end{cases}}$$

وبما أن $f_g'(1) = f_d'(1) = 0$ ، فإن f قابلة للاشتقاق في 1 و $\boxed{f'(1)=0}$.

ومنه نستنتج أن للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مماس أفقي (T) في النقطة ذات الأفصول 1 معادلته :

$$y = f'(1)(x-1)+f(1) \text{ . أي : } (T) : \boxed{y=0}$$

ب- ليكن $x \in]-\infty,1[$ ، لدينا :

$$f'(x) = \left((x-1)e^{\frac{1}{x-1}}\right)' = (x-1)'e^{\frac{1}{x-1}} + (x-1)\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)' = e^{\frac{1}{x-1}} + (x-1)\left(\frac{1}{x-1}\right)'e^{\frac{1}{x-1}}$$

$$= e^{\frac{1}{x-1}}\left[1+(x-1)\left(-\frac{(x-1)'}{(x-1)^2}\right)\right]$$

$$= e^{\frac{1}{x-1}}\left[1-\frac{1}{x-1}\right]$$

$$\boxed{f'(x) = \left(\frac{x-2}{x-1}\right)e^{\frac{1}{x-1}}}$$

جـ- ليكن $x \in]1,+\infty[$ ، لدينا :

$$f'(x) = \left(x-1-\frac{\ln x}{x}\right)' = 1-0-\frac{(\ln x)'x-(\ln x)x'}{x^2}$$

$$= 1-\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2} = 1-\frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2-1+\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \boxed{\frac{(x-1)(x+1)+\ln x}{x^2}}$$

لدينا $x>1$. إذن : $\ln x > 0$ و $x+1>0$ و $x-1>0$ و $x^2>0$. إذن : $f'(x)>0$.

وبالتالي فإن : f تزايدية قطعا على المجال $]1,+\infty[$.

د- ليكن $x \in]-\infty,1[$. لدينا : $f'(x) = \left(\frac{x-2}{x-1}\right)e^{\frac{1}{x-1}}$ ،

و بما أن $x<1 \Rightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x-2<-1<0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{x-1}>0$ و $e^{\frac{1}{x-1}}>0$ ،

فإن : $f'(x)>0 \quad : \quad \forall x \in]-\infty,1[$. ومنه نستنتج أن f تزايدية قطعا على المجال $]-\infty,1[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. أ- لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x}=0$. إذن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقاربا مائلا (D) بجوار $+\infty$ معادلته $\boxed{y=x-1}$.

دراسة الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم (D):

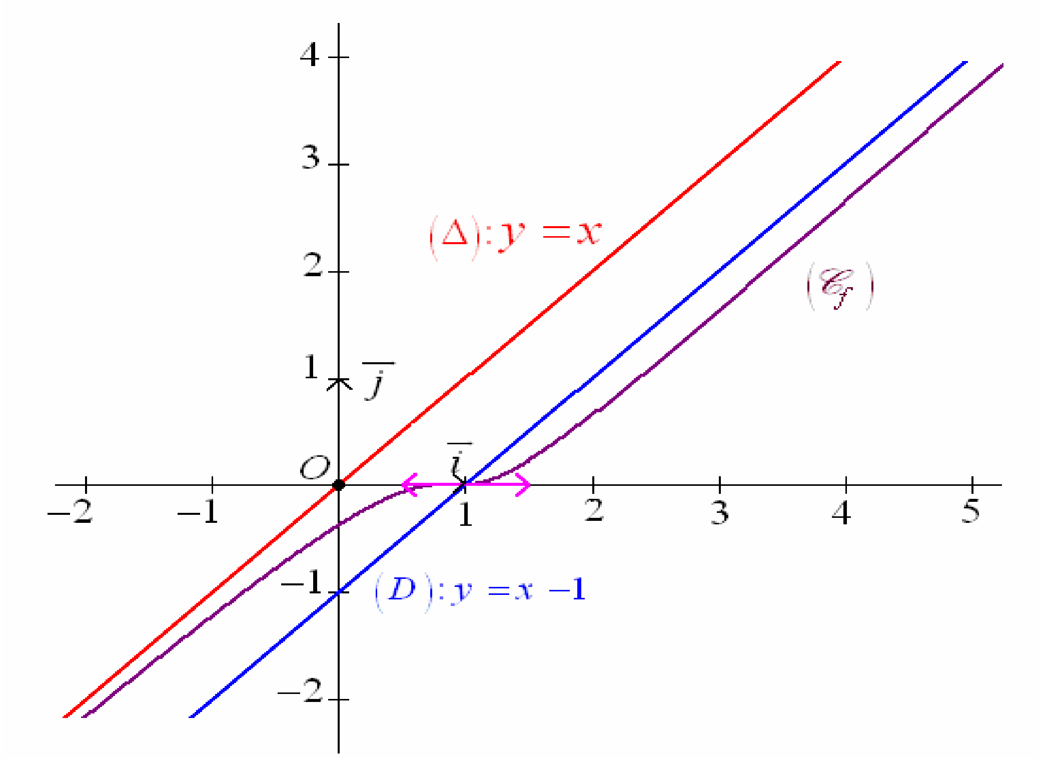
ليكن $x\in]1,+\infty[$. لدينا : $f(x)-(x-1)=-\frac{\ln x}{x}<0$. إذن $(\mathscr{C}_f)$ يوجد تحت (D) على المجال $]1,+\infty[$.

ب- لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}-x=\lim_{t\to0}\frac{e^t}{t}-\left(\frac{1}{t}+1\right)$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}-1=1-1=\boxed{0}$$

وذلك بوضع $t=\frac{1}{x-1}$ حيث $\underset{x\to+\infty}{t\to0}$.

ومنه نستنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $\boxed{y=x}$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$.

4. إنشاء المنحنى $(\mathscr{C}_f)$:



تمرين تطبيقي رقم 2 :

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} & ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=1 & \end{cases}$$

الجزء الأول : لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$$

1. حدد $\mathscr{D}_g$ حيز تعريف الدالة g .
2. أحسب نهايات g عند محدات $\mathscr{D}_g$.
3. حدد $g'(x)$ لكل x من $\mathscr{D}_g$ ، ثم أعط جدول تغيرات الدالة g .
4. استنتج أن : $g(x)>0 \quad : \quad \forall x\in\mathscr{D}_g$.

الجزء الثاني :

1. حدد $\mathscr{D}_f$ حيز تعريف الدالة f .
2. أحسب نهايات f عند محدات $\mathscr{D}_f$ ، وأول النتائج المحصلة هندسيا .
3. أدرس اتصال الدالة f على اليمين في 0.
4. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 ، وأول النتائج المحصلة هندسيا 0.
5. حدد $f'(x)$ لكل x من $\mathscr{D}_f-\{0\}$ ، ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .
6. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

الحل :

الجزء الأول :

1. حيز تعريف الدالة g : $\mathscr{D}_g=\left\{x\in\mathbb{R} \;/\; 1+\frac{1}{x}>0 \text{ و } x\neq 0\right\}$

x	$-\infty$	-1		0		$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$	
x	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x}$	$+$		$-$	‖	$+$	

وبالتالي فإن : $\mathscr{D}_g=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]0,+\infty\right[$.

2. نهايات الدالة g عند محدات $\mathscr{D}_g$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}=\ln 1-0=\boxed{0}$.

و لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}=+\infty-1=\boxed{+\infty}$. لأن : $\lim\limits_{x\to 0^+}1+\frac{1}{x}=+\infty$.

نضع $t=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$. إذن : $t \underset{x\to(1)^-}{\longrightarrow} 0^+$ و $x=\frac{1}{t-1}$. ومنه فإن : $x+1=\frac{1}{t-1}+1=\frac{t}{t-1}$ و :

$$\lim_{x\to(-1)^-} g(x)=\lim_{x\to(-1)^-} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}=\lim_{t\to0^+} \ln t-\frac{t-1}{t}=\lim_{t\to0^+} \frac{t\ln t-t+1}{t}=\boxed{+\infty}$$

3. ليكن x من $\mathscr{D}_g$ ، لدينا :

$$g'(x)=\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right)'=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{1+\frac{1}{x}}-\left(-\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}\right)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$=-\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-(x+1)+x}{x(x+1)^2}$$

$$g'(x)=\boxed{\frac{-1}{x(x+1)^2}}$$

إشارة $g'(x)$ على $\mathscr{D}_g$ هي إشارة $(-x)$ ، ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	||	||	$-$
$g(x)$	$0 \nearrow +\infty$	||	||	$+\infty \searrow 0$

4. لدينا : g متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]-\infty,-1[$. إذن :

$$g\left(]-\infty,-1[\right)=\left]\lim_{x\to-\infty} g(x), \lim_{x\to(-1)^-} g(x)\right[=]0,+\infty[.$$

ولدينا : g متصلة وتناقصية قطعا على المجال $]0,+\infty[$. إذن :

$$g\left(]0,+\infty1[\right)=\left]\lim_{x\to+\infty} g(x), \lim_{x\to0^+} g(x)\right[=]0,+\infty[$$

وبالتالي فإن : $g(x)>0 \quad : \quad \forall x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.

الجزء الثاني :

1. حيز تعريف الدالة f :

$$\mathscr{D}_f=\left\{x\in\mathbb{R} \ / \ 1+\frac{1}{x}>0 \text{ و } x\neq0\right\}\cup\{0\}$$

$$=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[\cup\{0\}$$

$$\mathscr{D}_f=]-\infty,-1[\cup[0,+\infty[$$

2.حساب نهايات f عند محدات $\mathcal{D}_f$:

لدينا : $\boxed{e} = \lim_{t\to 0} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\pm\infty} g(x)$ وذلك بوضع

$t=\frac{1}{x}$ ، حيث $t \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$. إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربا أفقيا بجوار $\pm\infty$ معادلته $\boxed{y=e}$.

وبوضع $t = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ، نجد $t \underset{x\to(-1)^-}{\to} +\infty$ لأن : $\lim_{x\to(-1)^-} 1+\frac{1}{x} = 0^+$ و $\lim_{t\to 0^+}\ln t = -\infty$.

إذن : $\boxed{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} e^t = \lim_{x\to(-1)^-} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to(-1)^-}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to(-1)^-} g(x)$.

ومنه فإن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربا عموديا معادلته $\boxed{x=-1}$.

3. دراسة اتصال الدالة f على اليمين في 0 .

نضع : $t=\frac{1}{x}$. إذن : $t \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$ ، ومنه فإن :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \lim_{t\to+\infty} e^{\frac{\ln\left(t\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)}{t}}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{\frac{\ln t+\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{t}} = \lim_{t\to+\infty} e^{\frac{\ln t}{t}+\frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)} = e^0 = \boxed{1}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$$

وبالتالي فإن الدالة f متصلة على اليمين في 0.

4. دارسة قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 :

لدينا : $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1}{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\times\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

نضع : $t = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. نعلم أن : $t \underset{x\to 0^+}{\to} 0$:

(بوضع $u=\frac{1}{x}$، $\lim_{x\to 0^+} t = \lim_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{u\to+\infty}\frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u}+\frac{1}{u}\ln\left(\frac{1}{u}+1\right) = 0$)

إذن : $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1}{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = 1$ ، ولدينا : $\lim_{x\to 0^+}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$.

ومنه نستنتج أن : $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1\times+\infty = \boxed{+\infty}$.

وبالتالي فإن f غي رقابلة للاشتقاق على اليمين في 0 .

تأويل هندسي : $\left(\mathscr{C}_f\right)$ يقبل نصف مماس رأسي على يمين النقطة ذات الأفصول 0 موجه نحو الأعلى .

5. ليكن x عنصرا من $\mathscr{D}_f-\{0\}$ ، لدينا :

$$f'(x)=\left(e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)'$$

$$=\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\left[x'\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'\right]e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{1+\frac{1}{x}}\right]e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}\right]e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$f'(x)=\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

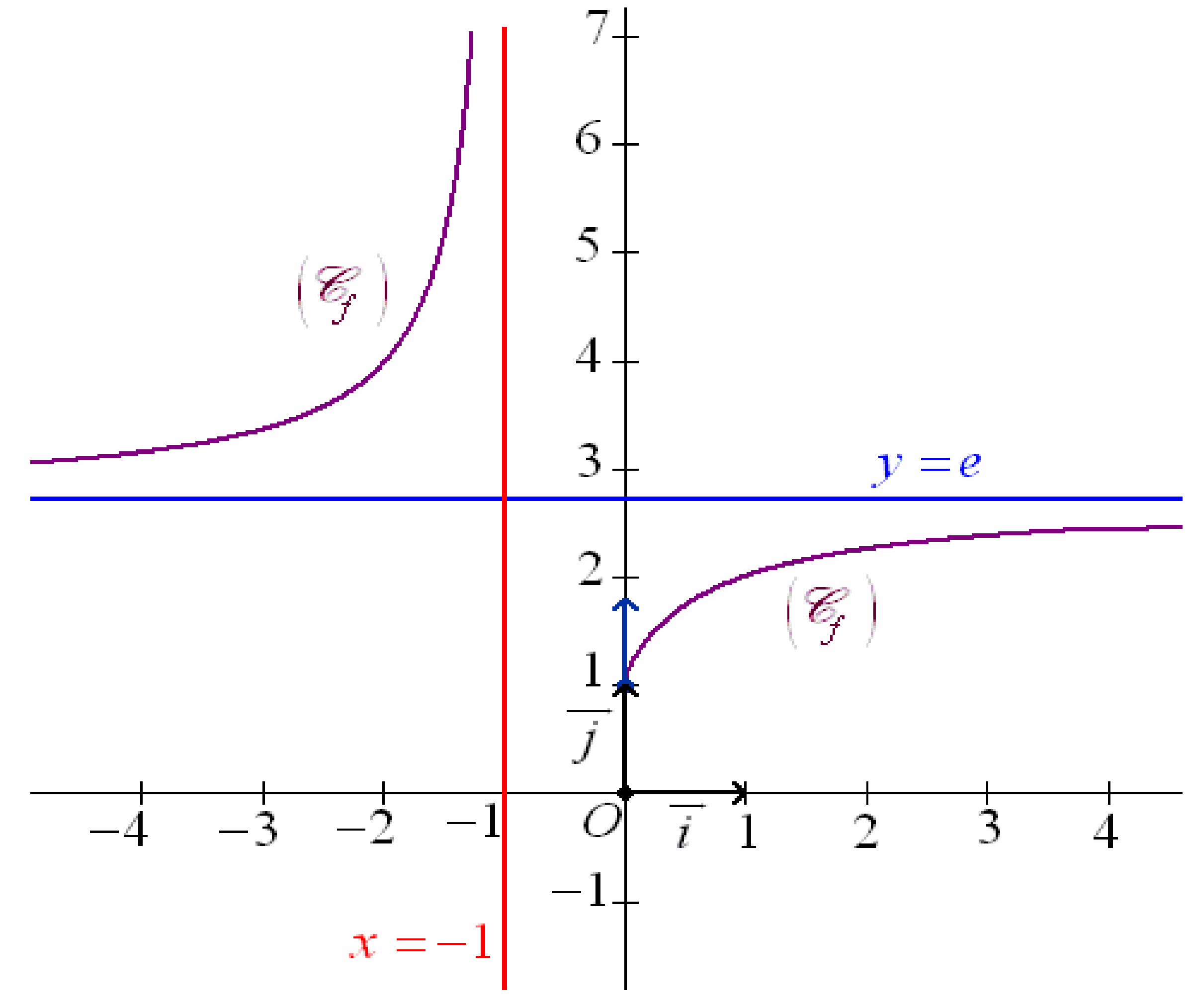
$$\boxed{f'(x)=g(x)e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}$$

وحسب السؤال 4 من الجزء الأول ، لدينا : $f'(x)>0$: $\forall x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]0,+\infty\right[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\quad$ -1	0 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+\infty$ $\quad$ $+$
$f(x)$	e $\nearrow$ $+\infty$	1 $\nearrow$ e

6. إنشاء المنحنى $\left(\mathscr{C}_f\right)$:



بالتوفيق إنشاء الله