"ملخص حول الهندسة الفضائية":

في كل ما يأتي نفترض أن الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس: $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{K})$

مركبتا الشعاع $\vec{AB}$: $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

طويلة الشعاع $\vec{AB}$:

$$\|\vec{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

وهي نفسها المسافة بين النقطتين A و B.

منتصف $[AB]$: $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_B - z_A}{2}\right)$.

* **الجداء السلمي**:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان: $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})$$

$\vec{AB}.\vec{AC} = \vec{AB}.\vec{AH}$. حيث H المسقط العمودي للنقطة C على (AB).

* **التعامد**: $\vec{u} \perp \vec{v}$ إذا كان: $\vec{u}.\vec{v} = 0$

* **الارتباط الخطي**: (التوازي والاستقامية)

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا إذا كان: $\vec{u} = \lambda \vec{v}$

حيث λ عدد حقيقي.

أو: $\left(\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}\right)$.

* لإثبات أن النقط A ، B ، C تعين مستوي نتأكد أن $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا.

* **تعيين معادلة لمستو**:

① إذا كنا نعرف شعاع ناظمي: $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ونقطة A من المستوي (P) فإن المعادلة الديكارتية تكون من الشكل:

$$ax + by + cz + d = 0$$

حيث: d نعين من النقطة A .

طع: $M(x,y,z) \in (P) \Rightarrow \vec{AM} \perp \vec{n}$

$\vec{AM}.\vec{n} = 0$ ونستنتج المعادلة.

② إذا كنا نعرف ثلاث نقط A ، B ، C .

أ- نتحقق أن النقط الثلاث ليست في استقامية

ب- نعين شعاع ناظمي $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ للمستوي (ABC) وهو الشعاع العمودي على $\vec{AB}$ وعلى $\vec{AC}$.

أي نحل الجملة: $\begin{cases} \vec{n}.\vec{AB} = 0 \\ \vec{n}.\vec{AC} = 0 \end{cases}$ فنجد a b c

ثم نستخرج معادلة المستوي كما في ① .

* **المسافة بين نقطة و مستو**:

المسافة بين النقطة: $A(x_A, y_A, z_A)$ والمستوي (P) ذو المعادلة: $ax+by+cz+d=0$ هي:

$$d(A,(P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

* **المستوي المحوري**:

المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ هو المستوي العمودي على $[AB]$ في منتصفها.

أي: $\vec{AB}$ ناظمي للمستوي.

* **مستويات خاصة**:

$z=0$ معادلة للمستوي $(O,\vec{i},\vec{j})$ و $\vec{K}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ناظم له.

$x=0$ " " $(O,\vec{j},\vec{K})$ و $\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ناظم له.

$y=0$ " " $(O,\vec{i},\vec{K})$ و $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ناظم له.

* **تعيين تمثيل وسيطي لمستقيم**:

(D) مستقيم يشمل النقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ و $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ شعاع توجيه له.

لدينا: $M \in (D) \Rightarrow \vec{AM} = t.\vec{u}$

وعند التمثيل الوسيطي يكون من الشكل:

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

⇐ يعرف المستقيم في الفضاء بجملة معادلتين لمستويين. (التمثيل الديكارتي)

* بعد نقطة عن مستقيم :

لحساب بعد نقطة A عن مستقيم (D)، نعين مسقطها العمودي H على هذا المستقيم، ويكون بعد A عن (D) هو الطول : AH .

طريقة : للبحث عن المسافة بين A والمستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي :

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

نكتب معادلة المستوي (P) الذي (D) عمودي عليه ويشمل A . فشعاعه الناظمي هو شعاع توجيه المستقيم أي : $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ، يبقى d نعوض بـ A ثم نبحث عن نقطة تقاطع (P) و (D) ولتكن H المسافة إذن هي : AH .

* للانتقال من التمثيل الديكارتي لمستقيم بمعادلتي مستويين إلى التمثيل الوسيطي نسمي أحد المجاهيل بـ t ونحل الجملة للمجهولين المتبقيين بدلالة t .

وللانتقال من التمثيل الوسيطي إلى الديكارتي نعين t من المعادلات الثلاث بدلالة أحد المجاهيل x أو y أو z ونعوض في المعادلتين المتبقيتين .

* لتعيين المسقط العمودي لنقطة على مستوي نكتب معادلة المستقيم الذي يشمل النقطة ، وعمودي على المستوي . أي الشعاع الناظمي للمستوي شعاع توجيه للمستقيم ، ثم نعين نقطة التقاطع .

* لتعيين نقطة من مستقيم معرف وسيطيا ، نعطي أي قيمة لـ t . نجد نقطة من المستقيم .

* التمثيل الوسيطي لمستوي :

(P) مستوي يشمل $A(x_A, y_A, z_A)$ ومعرف بالشعاعين $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$

ومنه : $\vec{AM} = t\vec{u} + s\vec{v}$

إذن التمثيل الوسيطي للمستوي هو :

$$\begin{cases} x = t\alpha + s\alpha' + x_A \\ y = t\beta + s\beta' + y_A \\ z = t\gamma + s\gamma' + z_A \end{cases} \quad / (t,s) \in \mathbb{R}^2$$

* للانتقال من المعادلة الديكارتية لمستوي إلى التمثيل الوسيطي له ، نسمي أحد المجاهيل t وآخر s ، ونعوض في المعادلة لنجد المجهول الثالث بدلالة s و t .

* وللانتقال من التمثيل الوسيطي إلى الديكارتي ، نأخذ معادلتان من الثلاث ، ونحل الجملة ذات المجهولين s و t بدلالة x و y مثلا حسب الاختيار ، ثم نعوض في المعادلة الأخرى .

* تعامد مستقيم ومستوي :

(D) مستقيم موجه بالشعاع $\vec{u}$ ، و (P) مستوي معرف بالشعاعين $\vec{v}$ و $\vec{w}$.

$(D) \perp (P) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ \vec{u} \perp \vec{w} \end{cases}$ أي : $\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \\ \vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \end{cases}$

$\Leftarrow$ $\vec{u}$ شعاع توجيه لـ (D) و $\vec{n}$ ناظمي لـ (P) .

$(D) \perp (P)$ معناه : $\vec{u} \parallel \vec{n} \Leftarrow \vec{u} = \lambda\vec{n}$

* سطح الكرة في الفضاء :

معادلة سطح الكرة (S) : ذات المركز $\omega(x_0, y_0, z_0)$ ونصف القطر R نكتب كما يلي :

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

$\Leftarrow$ مجموعة النقط :

$$(E): x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

لمعرفة طبيعة المجموعة (E) نتبع ما يلي :

نحسب العدد : $L = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4} - d$

- إذا كان : $L < 0$ فإن : $(E) = \emptyset$
- إذا كان : $L = 0$ فإن : $(E) = \left\{\omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)\right\}$
- إذا كان : $L > 0$ فإن : (E) سطح كرة ذات المركز $\omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ ونصف القطر $R = \sqrt{L}$

طريقة : لإتمام المربع : المتطابقات الشهيرة .

مثلا : $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

* توازي الشعاعان الناظميان يعني توازي المستويين ، وتعامدهما يعني تعامد المستويين .

تكون H مسقط عمودي لـ A على (P) إذا كانت : $H \in (P)$ و $\vec{AH} = \lambda\vec{n}$ (الارتباط الخطي) .

* الوضع النسبي لسطح كرة مع مستوى :

(S) كرة مركزها ω و نصف قطرها R .
و (P) مستوى معادلته : $ax+by+cz+d=0$
لتكن $d(\omega,(P))$ بعد النقطة ω عن المستوي (P)

① $d(\omega,(P))>R \Leftarrow (S)\cap(P)=\emptyset$

② $d(\omega,(P))=R \Leftarrow$ المستوي يمس سطح الكرة في نقطة. $(S)\cap(P)=\{H\}$

$\Leftarrow$ نعين H على أنها نقطة تقاطع المستوي (P) مع المستقيم (ωH) .

③ $d(\omega,(P))<R$. المستوي يقطع سطح الكرة في دائرة مركزها I و نصف قطرها r

$\Leftarrow$ نعين I مركز الدائرة على أنها نقطة تقاطع المستوي (P) مع المستقيم (ωI) .

$\Leftarrow$ نعين r نصف قطر الدائرة بالعلاقة.

$$r=\sqrt{R^2-d^2}$$

حيث : R . نصف قطر سطح الكرة.
و d هو $d(\omega,(P))$ أي بعد مركز سطح الكرة عن المستوي (P) .

ملاحظة : نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (ωH) أو (ωI) بناء على أن هذا المستقيم يشمل النقطة ω و يوازي الشعاع الناظمي $\vec{n}$ للمستوي (P) .

* الوضع النسبي لسطح كرة مع مستقيم :

لدراسة وضعية سطح الكرة (S) مع مستقيم (d) ، نعوض x ، y ، z من التمثيل الوسيطي لـ (d) في معادلة سطح الكرة (S) .
فنحصل على معادلة من د II مجهولها الوسيط و لتكن (t مثلا) .

① إذا كان : $\Delta<0$: $(S)\cap(d)=\emptyset$

② إذا كان : $\Delta=0$. حل مضاعف t_0 . نعوضه في التمثيل الوسيطي لـ (d) نجد نقطة التماس.

③ إذا كان : $\Delta>0$: حلين متمايزين ، t_1 ، t_2 بالتعويض في التمثيل الوسيطي نحصل على نقطتي التقاطع

* الوضع النسبي لمستقيمين :

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ شعاعا توجيه المستقيمين (D) و (D') .

① - إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ مرتبطين خطيا فإن : (D) و (D') متوازيان

أ - نعين النقطة A من (D) ، إذا كانت $A\in(D')$ فإن (D) و (D') منطبقان .

ب - إذا كانت : $A\notin(D')$ فإن (D) و (D') متوازيان تماما .

② - إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطيا فإن (D) و (D') متقاطعان في نقطة أو لا ينتميان إلى نفس المستوي .

* الوضع النسبي لمستويين :

ليكن $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ شعاعان ناظميان لـ (P) و (P') .

① - إذا كان $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ مرتبطان خطيا فإن : (P) و (P') متوازيان .

أ - نعين النقطة A من المستوي (P). إذا كانت : $A\in(P')$ فإن (P) و (P') منطبقان .

ب - إذا كانت : $A\notin(P')$ فإن (P) و (P') متوازيان تماما .

② - إذا كان : $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطين خطيا . فإن : (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم .

$\Leftarrow$ نحل جملة معادلتي المستويين (P) و (P') ، ونعين تمثيلا وسيطيا للمستقيم التقاطع .

ملاحظة : ليكن (P) و (P') مستويان حيث :

$$(P):\ ax+by+cz+d=0$$
$$(P'):\ a'x+b'y+c'z+d'=0$$

إذا كان : $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$ فإن (P) و (P') منطبقان .

إذا كان : $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'}$ فإن (P) و (P') متوازيان تماما

إذا كان : $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ فإن (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم .

* **الوضع النسبي لمستقيم ومستو :**

$\vec{u}$ شعاع توجيه لـ (D) و $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (P)

① إذا كان : $\vec{u}.\vec{n}=0$ فإن (D) و (P) متوازيان .

(أ) - نعين النقطة A من (D) . إذا كانت $A\in(P)$ فإن : (D) محتوى في (P) .

(ب) - إذا كانت $A\notin(P)$ فإن (D) و (P) متوازيان تماما .

② إذا كان : $\vec{u}.\vec{n}\neq 0$ فإن (D) و (P) متقاطعان في نقطة. نعوض بالإحداثيات الوسيطية للمستقيم (D) في معادلة المستوي (P) فنحصل على قيمة للوسيط t تسمح لنا بتعيين نقطة التقاطع .

* **تقاطع ثلاث مستويات :**

لدراسة تقاطع 3 مستويات ، يمكن أن ندرس تقاطع اثنين منها مثلا (P_1) و (P_2) . ثم ندرس نتيجة التقاطع مع (P_3) .

① - تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) خال ⇐ تقاطع المستويات الثلاث خال .

② تقاطع المستويين مستقيم ⇐ تؤول الدراسة إلى دراسة الوضع النسبي لمستقيم ومستو .

③ تقاطع المستويين مستو ⇐ تؤول الدراسة إلى دراسة الوضع النسبي لمستويين :

* **كيفية إثبات أن 4 نقط تنتمي إلى نفس المستوي**

لإثبات أن النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس المستوي . نبين أن ثلاثة منها تعين مستويا ، وأن الرابعة تنتمي إليه .

طرق : نبين مثلا أنه يوجد عددان حقيقيان α ، β حيث : $\alpha\vec{AB}+\beta\vec{AC}=\vec{AD}$

* **حجم رباعي الوجوه :** $V=\frac{1}{3}S.h$

S : مساحة القاعدة .

h : الارتفاع .

المرجح : ندرس 3 نقط ونعممها مهما كان عدد النقط

نسمي : G مرجح الجملة : $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$

إذا كان : $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

و : $\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}+\gamma\vec{GC}=\vec{0}$

⇐ **مركز ثقل مثلث :** $\alpha=\beta=\gamma=1$

إحداثيات المرجح :

$$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma},\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma},\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

⇐ إذا كان : $\alpha+\beta+\gamma=0$ فلا يوجد مرجح للنقط . ويكون الشعاع $\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}+\gamma\vec{MC}$ شعاعا ثابتا . (مستقل عن M) .

نتيجة مهمة 01 :

إذا كانت G مرجح : $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ فإنه من أجل كل نقطة M من الفضاء :

$$\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}+\gamma\vec{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\vec{MG}$$

نتيجة مهمة 02 :

$$\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2=(\alpha+\beta+\gamma)MG^2+\alpha GA^2+\beta GB^2+\gamma GC^2$$

مجموعات النقط :

مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :	هي :
$AM=K$ A نقطة ، K عدد حقيقي موجب تماما	سطح كرة ذات المركز A ونصف القطر K .
$\vec{MA}.\vec{MB}=0$	سطح الكرة ذات القطر [AB]
$MA=MB$	المستوي المحوري للقطعة [AB]
$\vec{MA}.\vec{u}=0$ $\vec{u}$ شعاع ثابت .	المستوي الذي يشمل A ، و $\vec{u}$ ناظمي له .