

## النهايات والاتصال

فإن  $f$  تقبل تمديدا  $g$  بالاتصال في  $x_0$  معرف بما يلي:

$$\begin{cases} g(x) = f(x), & x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$$

### (7) النهايات والترتيب.

- (a) إذا كان  $|f(x) - l| \leq g(x)$  بجوار  $x_0$  فإن  $\lim_{x_0} f(x) = l$  و  $\lim_{x_0} g(x) = 0$
- (b) إذا كان  $f(x) \leq g(x)$  بجوار  $x_0$  فإن  $\lim_{x_0} g(x) = +\infty$  و  $\lim_{x_0} f(x) = +\infty$
- (c) إذا كان  $f(x) \leq g(x)$  بجوار  $x_0$  فإن  $\lim_{x_0} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x_0} g(x) = -\infty$
- (d) إذا كانت  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  بجوار  $x_0$  فإن  $\lim_{x_0} f(x) = l$  و  $\lim_{x_0} g(x) = \lim_{x_0} h(x) = l$

### (II) صورة مجال بدالة متصلة.

- (1) صورة مجال بدالة متصلة هي مجال.
- (b) صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة.
- (2) (a) إذا كانت  $f$  متصلة وتزايدية فإن:
- $$f([a, b]) = [\lim_{a^+} f, f(b)] \quad (*) \quad f([a, b]) = [f(a), f(b)] \quad (*)$$
- (b) إذا كانت  $f$  متصلة وتناقصية فإن:
- $$f([a, b]) = [\lim_{b^-} f, \lim_{a^+} f] \quad (*) \quad f([a, b]) = [f(b), f(a)] \quad (*)$$

### (3) مبرهنة القيم الوسيطة

- (a) إذا كانت  $f$  متصلة على  $[a, b]$  فإن  $\exists c \in [a, b]: f(c) = \lambda$  و  $\lambda$  عدد محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$

- (b) إذا كانت  $f$  متصلة على  $[a, b]$  فإن  $\exists c \in ]a, b[ : f(c) = 0$  و  $f(a) \cdot f(b) < 0$  يعني المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا في  $]a, b[$

**ملاحظة:** (\*) إذا كان  $f(a) \cdot f(b) \leq 0$  فإن  $c \in [a, b]$ .  
 (\*) إذا كانت  $f$  رتيبة قطعاً فإن العدد  $c$  وحيد.

### (III) الدالة العكسية

- (1) إذا كانت:
- (\*)  $f$  متصلة على مجال  $I$
  - (\*)  $f$  رتيبة قطعاً على  $I$
  - (\*)  $f(I) = J$
- وبالتالي  $f$  تقبل دالة عكسية  $f^{-1}: J \rightarrow I$  ولدنيا:
- $$(\forall x \in J)(\forall y \in I): f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$
- (2) (a) الدالة  $f^{-1}$  متصلة على  $J$
- (b) الدالة  $f^{-1}$  رتيبة قطعاً على  $J$  ولها نفس رتبة الدالة  $f$ .
- (c) في م.م المنحنيان  $C_f$  و  $C_{f^{-1}}$  متماثلان بالنسبة للمنفصل الأول  $(\Delta): y = x$ .

## I تذكير

(1) الأشكال الغير محددة:			
$+\infty - \infty$	$\infty \times 0$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$

### (2) العمليات على النهايات الغير منتهية:

$a \times \infty = \infty \quad (a \neq 0)$	$+\infty + a = +\infty$
$\infty \times \infty = \infty$	$-\infty + a = -\infty$
$0 \times \infty$ ش غ محدد	$+\infty + \infty = +\infty \quad (a \in \mathbb{R})$
	$-\infty - \infty = -\infty$
	$+\infty - \infty$ ش غ محدد

$\frac{\infty}{a} = \infty$	$\frac{a}{\infty} = 0$	$\frac{a \neq 0}{0} = \infty$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{\infty}$	ش غ محدد

### (3) بعض التقنيات لحساب نهاية دالة لا حذرية:

- (a)  $\lim_{x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$  ← التعميل.
- (b)  $\lim_{x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty - \infty$
- (\*) إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من  $f(x)$  و  $g(x)$  متقابلين ← المرافق.
- (\*) إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من  $f(x)$  و  $g(x)$  غير متقابلين ← التعميل.
- (c)  $\lim_{x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a-a}{0} = \frac{0}{0} \quad (a \neq 0)$  ← المرافق.
- (d)  $\lim_{x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0+0}{0} = \frac{0}{0} \quad (a \neq 0)$  ← التفكيك ثم ربما المرافق.

**(e) ملاحظة:**  $\sqrt{x^2} = |x|$  ؛  $\begin{cases} x = \sqrt{x^2}; & x \geq 0 \\ x = -\sqrt{x^2}; & x \leq 0 \end{cases}$

### (4) نهايات اعتيادية.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{ax} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$$

### (5) الاتصال.

- (a) لكي نبين أن  $f$  متصلة في  $x_0$  نقوم بحساب  $\lim_{x_0} f(x)$  إذا وجدنا أن  $\lim_{x_0} f(x) = f(x_0)$  فإن  $f$  متصلة في  $x_0$ .
- (b) إذا كانت  $f$  دالة لا تحتوي على الجزء الصحيح وغير معرفة بأجزاء فإنها متصلة على حيز تعريفها لأنها مركب دوال متصلة في غالب الأحيان.

### (6) التمديد بالاتصال

لنكن  $f$  دالة غير معرفت في  $x_0$  ، لكي نبين أن  $f$  تقبل تمديدا بالاتصال في  $x_0$  نقوم بحساب  $\lim_{x_0} f(x)$  إذا وجدنا  $\lim_{x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

(j) ليكن  $a$  و  $b$  من  $IR_+^*$  و  $r$  و  $r'$  من  $\mathbb{Q}$

$$a^r \cdot a^{r'} = a^{r+r'}$$

$$(a^r)^{r'} = a^{rr'}$$

$$\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$$

$$(ab)^r = a^r \cdot b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

$$\frac{1}{a^r} = a^{-r}$$

### (3) اشتقاق الدالة $f^{-1}$ .

إذا كانت  $f$  دالة قابلة للاشتقاق ورتبية قطعاً على مجال  $I$  و  $(\forall x \in I): f'(x) \neq 0$  فإن  $f^{-1}$  قابلة للاشتقاق على  $J = f(I)$  و

$$(\forall x \in J): (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

### (IV) دالة الجذر ن الرتبة $n$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

(1) تعريف: لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^+$  العدد  $\sqrt[n]{x}$  هو العدد  $y$  من  $IR^+$  الذي يحقق  $y^n = x$ .

مثال: (\*)  $\sqrt[4]{16} = 2$  لأن  $2^4 = 16$  و  $2 \geq 0$ .

(\*)  $\sqrt[4]{16} \neq -2$  لأن  $(-2)^4 = 16$  لكن  $-2 \notin \mathbb{R}^+$ .

### (2) خاصيات

(a) الدالة  $\sqrt[n]{\cdot}$  معرفة على  $\mathbb{R}^+$  (b)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+): \sqrt[n]{x} \geq 0$

(c)  $(\forall x, y \in \mathbb{R}^+): \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$  (\*)

(\*)  $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$

(d)  $(\forall x, y \in \mathbb{R}^+): x^n = y^n \Leftrightarrow x = y$  (\*)

(\*)  $x^n < y^n \Leftrightarrow x < y$

(e) إذا كان  $n$  فردي فإن:  $(\forall x, y \in \mathbb{R}): x^n = y^n \Leftrightarrow x = y$  (\*)

(\*)  $x^n < y^n \Leftrightarrow x < y$

(f) إذا كان  $n$  زوجي فإن:  $(\forall x, y \in \mathbb{R}): x^n = y^n \Leftrightarrow |x| = |y|$  (\*)

(\*)  $x^n < y^n \Leftrightarrow |x| < |y|$

(g) (\*)  $(\forall x \geq 0): \sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x$

(\*) إذا كان  $n$  زوجي  $(\forall x \in IR): \sqrt[n]{x^n} = |x|$

(h) ليكن  $n$  و  $p$  من  $IN^*$  و  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}^+$

(\*)  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

(\*)  $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a}^p$  ;  $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^p}$

(\*)  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$  ;  $(b > 0)$

(\*)  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^{n+p}}$

(i) (\*)  $(\forall x > 0): x^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{x^p}$  ( $n \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{Z}$ )

(\*) إذا كان  $p$  زوجي:  $(\forall x \in \mathbb{R}): \sqrt[n]{x^p} = |x|^{\frac{p}{n}}$ .

### ملاحظة:

(1) إذا كان  $xy > 0$  فإن  $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$  و  $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

(2) (\*)  $(\forall x \geq 0): \sqrt[3]{x^3} = x$  ;  $x \geq 0$   $x = \sqrt[3]{x^3} = (\sqrt[3]{x})^3$  ;  $x \geq 0$   $x = -\sqrt[3]{x^3} = (-\sqrt[3]{x})^3$  ;  $x \leq 0$

(\*)  $a + b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$  ;  $a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$

$a - b = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}$