1 – النهايات و الاستمرارية

الكفاءات المستهدفة

1– حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة لمجالات مجموعة تعريفها .

2– حساب نهاية باستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات أو المقارنة و تركيب دالتين.

3– دراسة السلوك التقاربي لدالة .

4– استعمال مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات وجود حلول للمعادلة : $f(x) = \mathbf{k}$ ؛ $\mathbf{k}$ عدد حقيقي معطى .

أنشطة

النشاط1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كمايلي :

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x} .$$

1) أكمل الجدول الآتي :

x	10^2	10^4	10^8	10^{10}
$f(x)$				

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم فإن :

$$f(x) = 2 + \frac{3}{x} .$$

3) بين أنه إذا كان $x \geq 10^9$ فإن : $2 < f(x) < 2 + 10^{-9}$

4) ما هو تخمينك حول $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

5) أكمل الجدول الآتي :

x	0,0000001	0,00000001	0,000000001
$f(x)$			

6) بين أنه إذا كان $x \leq 10^{-9}$ فإن : $f(x) \geq 2 + 3 . 10^9$

7) أكمل الجدول الآتي :

x	-0,9997	-0,9998	-0,9999
$f(x)$			

8- بين أنه إذا كان : $x \geq -10^{-9}$ فإن : $f(x) \leq 2 - 3 . 10^{9}$

9- ما هو تخمينك حول : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$

الحل :

1- إكمال الجدول :

x	10^{2}	10^{4}	10^{8}	10^{10}
$f(x)$	2,03	2,0003	2,00000003	2,000000003

2- نبين أن : $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x}$

لدينا : $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x}$ وعليه : $f(x) = \dfrac{2x}{x} + \dfrac{3}{x}$

وبالتالي : $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x}$

3- نبين أنه إذا كان : $x \geq 10^{9}$ فإن : $2 \leq f(x) \leq 2 + 10^{-9}$

لدينا $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x}$ و $\dfrac{3}{x} \geq 0$ ومنه $f(x) \geq 2$

ولدينا $x \geq 10^{9}$ ومنه $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{10^{9}}$

وعليه : $2 + \dfrac{1}{x} \leq 2 + 10^{-9}$ ومنه : $f(x) \leq 2 + 10^{-9}$

إذن : $2 \leq f(x) \leq 2 + 10^{-9}$.

4- لدينا المخمنة التالية : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

5- إكمال الجدول :

x	0,0000001	0,00000001	0,000000001
$f(x)$	30000002	300000002	3000000002

6– نبين أنه إذا كان: $x \leq 10^{-9}$ فإن: $f(x) \geq 2 + 3 . 10^{9}$.

إذا كان: $x \leq 10^{-9}$ فإن : $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{10^{-9}}$ ومنه : $\frac{3}{x} \geq 3 . 10^{9}$

وعليه: $2 + \frac{3}{x} \geq 2 + 3 . 10^{9}$ وبالتالي: $f(x) \geq 2 + 3 . 10^{9}$.

7– إكمال الجدول :

x	-0,9997	-0,9998	-0,9999
$f(x)$	-1,00090027	-1,00060012	-1,00030003

8– نبين أنه إذا كان: $x \geq -10^{-9}$ فإن: $f(x) \leq 2 - 3 . 10^{9}$.

إذا كان: $x \geq -10^{-9}$ فإن : $\frac{1}{x} \leq \frac{-1}{10^{-9}}$ ومنه : $\frac{3}{x} \leq -3 . 10^{9}$

وعليه: $2 + \frac{3}{x} \leq 2 - 3 . 10^{9}$ وبالتالي : $f(x) \leq 2 - 3 . 10^{9}$

9– التخمين :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

النشاط 2 :

تعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

من أجل $x < 1$: $f(x) = -x + 1$

و من أجل $x \geq 1$: $f(x) = x + 1$

1– عين مجموعة تعريف الدالة f

2– أحسب $f(1)$.

3– أنشئ التمثيل البياني (C) للدالة بآلة بيانية.

4– ماذا تلاحظ على المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 ؟

5− ماذا تلاحظ على المنحنى (C) على كل من المجالين :

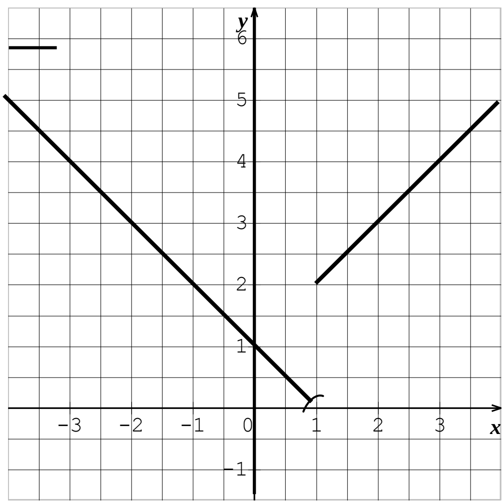
$]-\infty ; 1[$ و $]1 ; +\infty[$

الحل :

1− مجموعة تعريف الدالة f هي . ℝ

2− حساب $f(1)$: $f(1) = 1 + 1 = 2$

3− إنشاء (C) :



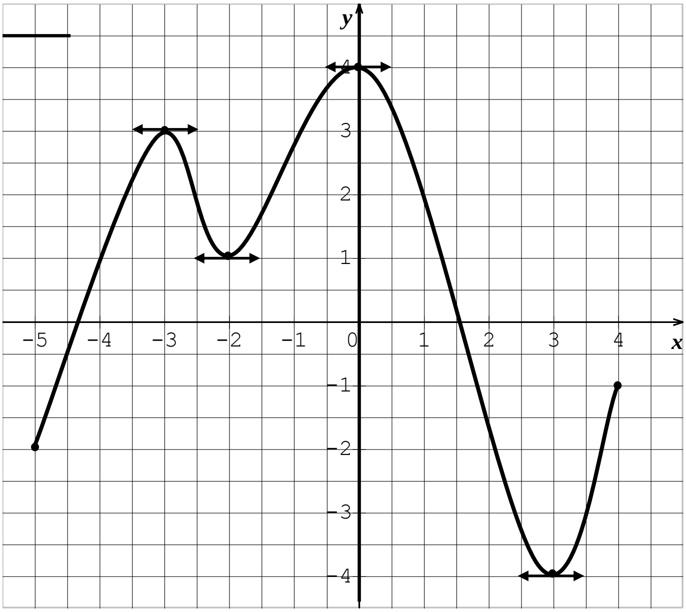
4− نلاحظ أن المنحنى (C) متقطع عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

5− نلاحظ أن (C) خط غير متقطع على المجال $]1 ; +\infty[$ وكذلك خط غير متقطع على المجال $]-\infty ; 1[$.

ونقول أن الدالة f مستمرة على كل من المجالين $]-\infty ; 1[$ و $]1 ; +\infty[$.

النشاط 3 :

إليك التمثيل البياني لدالة f .



1− ما هي مجموعة تعريف الدالة f .

2− ما هو عدد حلول المعادلة $f\left(x\right)=0$ مع حصر كل حل في مجال من الشكل $]a\,;b[$. ما هي إشارة كل من $f\left(a\right)$ و $f\left(b\right)$.

3− ما هو عدد حلول المعادلة $f\left(x\right)=2$

ماهي المخمنات التي تستنتجها ؟

الحل :

1) الدالة f معرفة على المجال $[-5\ ؛\ 4]$

2) عدد حلول المعادلة $f\left(x\right)=0$:

للمعادلة $f\left(x\right)=0$ حلين $x_1\,,x_2$.

حيث $x_1\in\ ]1\,;2[$ و $x_2\in\ ]-5\,;-4[$

ولدينا : $f\left(1\right)>0$ و $f\left(2\right)<0$

وكذلك : $f(-5) > 0$ و $f(-4) > 0$

3) عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$

للمعادلة : $f(x) = 2$ ، 4 حلول.

المخمنات :

1) إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a ; b]$ وكان $f(a) . f(b) < 0$ فإنه يوجد عدد وحيد x_0 بحيث $f(x_0) = 0$ و $x_0 \in]a ; b[$

2) إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a ; b]$ فإنه من أجل كل عدد c محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عدد x_0 بحيث $x_0 \in]a ; b[$ و $f(x_0) = c$.

الدرس

I– النهايات

1– نهاية دالة عند $+\infty$ أو $-\infty$:

تعريف 1 :

القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث : إذا كان : $x > B$ يكون $f(x) > A$

ونكتب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ أو $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

تعريف 2 :

القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $-\infty$ يعني أن

$\lim\limits_{x \to +\infty} [-f(x)] = +\infty$ ونكتب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

تعريف 3 :

القول أن نهاية الدالة f عند $-\infty$ هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث إذا كان $x < -B$ يكون $f(x) > A$

ونكتب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

تعريف 4 :

نقول عن دالة f أنها تتناهى نحو $-\infty$ عندما يتناهى x نحو $-\infty$

إذا كانت : $\lim\limits_{x \to -\infty} [-f(x)] = +\infty$

ونكتب : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

تعريف 5 :

القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي ℓ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث : إذا كان $x > B$ يكون $0 \leq |f(x) - \ell| < e$

ونكتب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

تعريف 6 :

القول أن نهاية الدالة f عند $-\infty$ هي ℓ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث : إذا كان $x < -B$ يكون $0 \leq |f(x) - \ell| < e$

ونكتب : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

ملاحظات :

- **يمكن الحصول على بقية التعاريف بنفس الطريقة**

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = -\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$$

- $|x - x_0| < \alpha$ **تعني :** $x \in]x_0 - \alpha ; x_0[\cup]x_0 ; \alpha + x_0[$
- $0 \leq |f(x) - \ell| < \alpha$ **تعني :** $f(x) \in]\ell - e ; \ell + e[$
- **إذا قبلت دالة عددية نهاية عند x_0 أو عند $(+\infty)$ أو عند $(-\infty)$ فإن هذه النهاية وحيدة.**

2– نهاية دالة عند عدد حقيقي x_0 :

تعرف 1 :

القول أن نهاية الدالة f عند x_0 هي ℓ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي

موجب تماما e ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث :

إذا كان $\alpha > |x - x_0| > 0$ يكون : $e > |f(x) - \ell| \geq 0$.

تعريف 2 :

القول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أكبر هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث : إذا كان $\alpha > x - x_0 > 0$ يكون $f(x) > A$

ونكتب : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$

تعريف 3 :

القول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أصغر هي $-\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث : إذا كان $\alpha > x_0 - x > 0$ يكون $f(x) < -A$

ونكتب : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = -\infty$

3– مبرهنات أولية على النهايات :

f و g دالتان عدديتان . x_0 , ℓ , ℓ' أعداد حقيقية.

نقبل دون برهان ، النتائج التالية المعطاة على شكل جدول.

أ– نهاية المجموع :

إذا كانت : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	وكانت : $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	فإن : $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$

ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	حالة عدم التعيين

ب- نهاية الجداء :

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	وكانت : $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	فإن : $\lim\limits_{x\to x_0}(f\times g)(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell \times \ell'$
$\ell\ (\ell>0)$	$+\infty$	$+\infty$
$\ell\ (\ell<0)$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$ أو $-\infty$	حالة عدم التعيين

جـ- نهاية المقلوب :

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	فإن $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f}\right)(x)$
ℓ	$\frac{1}{\ell}$
$+\infty$	0
$-\infty$	0
$0\ ;\ (f(x)>0)$	$+\infty$
$0\ ;\ (f(x)<0)$	$-\infty$
0	حالة عدم التعيين

د- نهاية حاصل القسمة :

لحساب : $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ نكتب :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}f(x)\times\frac{1}{g(x)}$$

ثم نستعمل المبرهنات المتعلقة بالضرب و بالمقلوب

هـ- نهاية الدالة الجذر التربيعي :

f دالة عددية موجبة و ℓ عدد حقيقي موجب

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$	فإن $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}$
ℓ	$\sqrt{\ell}$
$+\infty$	$+\infty$

د - نهاية مركب دالتان عدديتان :

c , b , a أعداد حقيقية . إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$

وكانت $\lim\limits_{x\to b}g(x)=c$ فإن : $\lim\limits_{x\to a}(gof)(x)=c$

ملاحظة:

تبقى المبرهنات السابقة صحيحة من أجل

$x\longrightarrow+\infty$ أو $x\longrightarrow-\infty$.

4- النهايات بالمقارنة :

f, g, h دوال عددية لمتغير حقيقي x معرفة على مجموعة I .

مبرهنة 1: (الحد من الأسفل)

إذا كان من أجل كل عنصر x من I : $g(x)\le f(x)$

وكانت $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

مبرهنة 2: (الحد من الأعلى)

إذا كان من أجل كل عنصر x من I : $f(x) \le g(x)$

وكانت $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

مبرهنة 3 : (الحصر)

إذا كان من أجل كل عنصر x من I : $g(x) \le f(x) \le h(x)$

وكانت $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell$ فإن : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$

ملاحظة :

تبقى المبرهنات السابقة صحيحة من أجل $x \to +\infty$ أو $x \to -\infty$.

5- نهاية بعض الدوال المألوفة :

أ- الدالة كثيرة الحدود :

نهاية كثيرة حدود عند $(+\infty)$ أو عند $(-\infty)$ هي نهاية حده الأعلى درجة عند $(+\infty)$ أو عند $(-\infty)$.

ب- الدالة الناطقة :

نهاية دالة ناطقة عند $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ هي نهاية حاصل قسمة الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام .

6- النهايات و السلوك التقاربي :

أ- الفرع اللانهائي :

(C) التمثيل البياني لدالة f في مستو مزود بمعلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. $M(x ; y)$ نقطة متغيرة من (C).

عندما يمكننا جعل $|x|$ أو $|y|$ كبير جدا بالقدر الذي نريده نقول إن للمنحنى (C)فرعا لانهائيا .

ب- المستقيمات المقاربة و الفروع المكافئة :

α) إذا كانت : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ أو $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ فإن :

التمثيل البياني(C) للدالة f يقبل مستقيما مقاربا معادلته: $x = x_0$.

β) إذا كانت : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ أو $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$

فإن التمثيل البياني (C) للدالة f يقبل مستقيما مقاربا معادلته :

$y = y_0$.

γ) إذا كانت $\left|\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right| = +\infty$ أو $\left|\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\right| = +\infty$

نحسب : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

- إذا كانت $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$: (C) يقبل فرعا مكافئا باتجاه محور الفواصل.
- إذا كانت $\left|\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}\right| = +\infty$: (C)يقبل فرعا مكافئا باتجاه محور التراتيب .
- إذا كانت $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ و $\left|\lim\limits_{|x| \to +\infty} [f(x) - ax]\right| = +\infty$ حيث a عدد حقيقي ثابت فإن :

(C) يقبل فرعا مكافئا باتجاه المستقيم الذي معادلته : $y = ax$.

- إذا كانت $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ و $\left|\lim\limits_{|x| \to +\infty} [f(x) - ax]\right| = b$

حيث a و b عددان حقيقيان فإن :

(C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته : $y = ax + b$.

ملاحظة :

f دالة عددية (C) تمثيلها البياني في معلم $(O ; \vec{i} , \vec{j})$.

(Δ) مستقيم معادلته : $y = ax + b$ يكون (Δ) مستقيما مائلا للمنحنى (C) إذا وفقط إذا كان : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

II– الاستمرارية :

1– استمرارية دالة عند قيمة x_0 .

f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I يشمل x_0 وغير خال. تكون الدالة f مستمرة عند x_0 إذا وفقط إذا كانت : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

أمثلة :

- الدالة f : $x \mapsto x - 4$ مستمرة عند 4 .

لأن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ ولدينا : $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 0 = f(4)$

- الدالة : $x \mapsto \sqrt{x}$ غير مستمرة عند 0 لأنها غير معرفة على مجال مفتوح يشمل 0 . حيث أنها معرفة على $[0 ; +\infty[$.

- دالة الجزء الصحيح : $x \mapsto [x]$

وهي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي جزءه الصحيح

فمثلا : $[0,5] = 0$, $[1,78] = 1$, $[-3,5] = -4$

أي أن: $[x]$ يرمز إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x .

هذه الدالة غير مستمرة عند العدد 4 مثلا .

إذن إن من أجل : $x \in [3\,;4[$ فإن : $[x] = 3$

من أجل : $x \in [4\,;5[$ فإن : $[x] = 4$

وعليه : $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}}[x] = 3$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}}[x] = 4$

ومنه نهاية الدالة $x \mapsto [x]$ عندما يتناهى x نحو 4 غير موجودة لأنها غير وحيدة .

2- استمرارية دالة عند عدد x_0 من اليمين

f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل $[x_0\,;x_0+\mathrm{a}[$ حيث a عدد حقيقي موجب تماما.

تكون الدالة f مستمرة عند x_0 من اليمين إذا وفقط إذا كانت :

$$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$$

3- استمرارية دالة عند عدد x_0 من اليسار :

f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل : $]x_0 - \mathrm{a}\,;x_0]$

حيث a عدد حقيقي موجب تماما.

تكون الدالة f مستمرة عند x_0 من اليسار إذا وفقط إذا كانت :

$$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = f(x_0)$$

أمثلة :

- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة عند 0 من اليمين لأنها معرفة على $[0\,;+\infty[$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0 = f(0)$

- الدالة $x \mapsto \sqrt{5 - x}$ مستمرة عند 5 من اليسار لأنـها معرفة على $]-\infty ; 5]$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} f(x) = 0 = f(5)$
- دالة الجزء الصحيح : $x \mapsto [x]$ مستمرة عند 4 من اليمين لأنـها معرفة على المجال $[4 ; 5[$ مثلا و $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x>4}} [x] = [4] = 4$
- الدالة $f : x \mapsto [x]$ مستمرة عند العدد 0 من اليمين وعند العدد 0 من اليسار لأن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = 0 = |0| = f(0)$

و كذلك : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (-x) = 0 = |0| = f(0)$

ملاحظات :

- إذا كانت f مستمرة عند x_0 فإن : $x_0 \in D_f$
- تكون الدالة f مستمرة عند عدد x_0 إذا وفقط إذا كانت مستمرة عند x_0 على اليمين و على اليسار.

4− استمرارية دالة على مجال :

I مجال مفتوح من الشكل : $]a ; b[$ أو $]-\infty ; b[$ أو $]a ; +\infty[$.

f دالة عددية معرفة على I .

- تكون الدالة f مستمرة على I إذا وفقط إذا كانت مستمرة عند كل قيمة x_0 من I .
- تكون الدالة f مستمرة على المجال المغلق $[a ; b]$ إذا وفقط إذا كانت : − مستمرة على المجال المفتوح $]a ; b[$
  − مستمرة عند a على اليمين
  − مستمرة عند b على اليسار

- تكون الدالة f مستمرة على المجال $[a ; b[$ إذا وفقط إذا كانت مستمرة على $]a ; b[$ و كانت مستمرة عند a على اليمين .
- تكون الدالة f مستمرة على المجال $]a ; b]$ إذا وفقط إذا كانت مستمرة على $]a ; b[$ و كانت مستمرة عند b على اليسار .

أمثلة :

1) الدالة : $x \mapsto x - 1$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

2) الدالتان $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \sin x$ مستمرتان على $\mathbb{R}$.

3) الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة على $[0 ; +\infty[$

4) الدالة $x \mapsto |x|$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

ملاحظات :

1) إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن : $I \subset D_f$.

2) إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a ; b]$ فإن تمثيلها البياني هو خط غير منقطع ، بدايته النقطة ذات الفاصلة a و نهايته النقطة ذات الفاصلة b.

5− تمديد دالة بالاستمرار :

x_0 عدد حقيقي. I مجال من $\mathbb{R}$ يشمل x_0 .

f دالة عددية معرفة عند x_0 و مستمرة عند كل قيمة من $I - \{x_0\}$.

إذا قبلت الدالة f نهاية ℓ عند x_0 فإن الدالة g المعرفة كما يلي :

من أجل $x \in I - \{x_0\}$: $g(x) = f(x)$ و $g(x_0) = \ell$

تسمى امتداد الدالة f بالاستمرار عند x_0 .

مثال :

الدالة g المعرفة بالعبارة :

من أجل $x \neq 0$: $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ؛ $g(0) = 1$

هي امتداد للدالة f حيث : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ بالاستمرار عند 0 .

6− مبرهنات على الدوال المستمرة :

- f و g دالتان عدديتان ، ℓ عدد حقيقي.

  إذا كانت $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ وكانت g مستمرة عند ℓ فإن :

  $\lim\limits_{x \to x_0} g[f(x)] = g(\ell)$.

- f و g دالتان . إذا كانت f مستمرة عند عدد x_0 و كانت g مستمرة عند $f(x_0)$ فإن الدالة المركبة gof تكون مستمرة عند x_0 .

- f و g دالتان مستمرتان عند x_0 و λ عدد حقيقي .

  الدوال التالية : $f + g$; $f \times g$; λf مستمرة عند x_0 وإذا كانت $g(x_0) \neq 0$ فإن الدالتين $\dfrac{1}{g}$ و $\dfrac{f}{g}$ مستمرتان عند x_0 .

نتائج :

- الدوال كثيرات الحدود مستمرة على $\mathbb{R}$.
- كل دالة ناطقة مستمرة عند كل قيمة من مجموعة تعريفها.
- الدلتان : $x \mapsto \cos(ax + b)$ و $x \mapsto \sin(ax + b)$

  حيث a و b عددان حقيقيان ، مستمرتان على $\mathbb{R}$.
- الدالة $x \mapsto \tan x$ مستمرة عند كل قيمة x_0 تختلف عن :

$\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$.

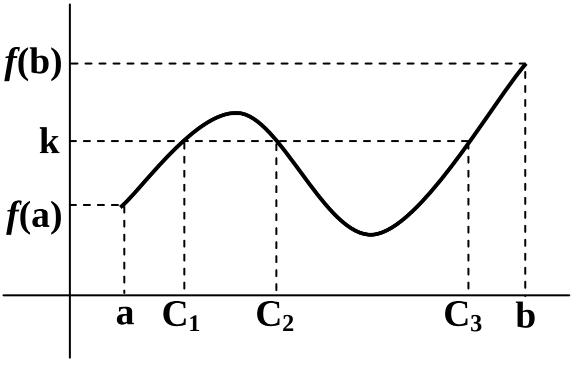
7- مبرهنة القيم المتوسطة :

• **مبرهنة 1 :**

نقبل بدون برهان المبرهنة التالية :

إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال $[a\,;b]$ فإنه من أجل كل عدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد عدد c محصور بين a و b بحيث : $f(c)=\text{k}$.

في الشكل أدناه توجد ثلاثة أعداد $C_1\,,C_2\,,C_3$ محصورة بين a و b بحيث : $f(C_1)=f(C_2)=f(C_3)=\text{k}$



مبرهنة 2 :

إذا كانت الدالة f في المبرهنة (1) رتيبة تماما فإن العدد C وحيد.

البرهان :

بما أن f رتيبة تماما على المجال $[a\,;b]$ فإنه من أجل كل عددان x_1 و x_2 من $[a\,;b]$ بحيث إذا كان $x_1<x_2$ فإن $f(x_1)<f(x_2)$

فإذا كان C_2 , C_1 عددان حيث $C_2 < C_1$ فإن: $f(C_2) < f(C_1)$

أي أن $f(C_2) \neq f(C_1)$ وعليه يوجد عدد وحيد c بحيث :

$f(C) = k$.

مبرهنة 3 :

إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $]a ; b]$ أو $[a ; +\infty[$ فإنه من أجل كل عدد k محصور بين $f(a)$ و $\lim_{x \to b} f(x)$ و $\left(\lim_{x \to +\infty} f(x)\right)$ فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا C في المجال $]a ; +\infty[$.

مبرهنة 4 :

إذا كانت الدالة f مستمرة على $[a ; b]$ و كانت $f(a) . f(b) < 0$ فإنه يوجد على الأقل ، عدد حقيقي C من المجال $]a ; b[$ بحيث $f(C) = 0$. و إذا كانت f رتيبة تماما أيضا فإن العدد C وحيد.

مثال :

أثبت أن المعادلة : $x^3 + x - 1 = 0$ تقبل حلا في المجال $\left]\frac{1}{2} ; 1\right[$.

الحل :

نعرف دالة f كما يلي : $f(x) = x^3 + x - 1$.

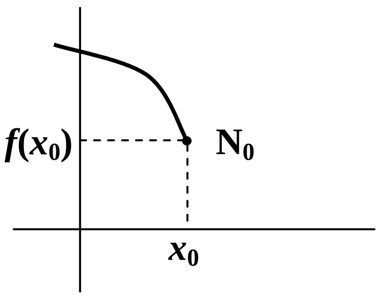
الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرة حدود وعليه فهي مستمرة على $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

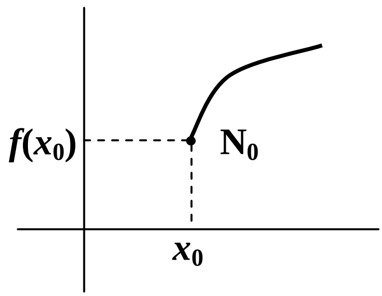
$f(1) = 1$ و $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$ وعليه : $f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) < 0$

وبالتالي حسب المبرهنة (4) يوجد على الأقل عدد c في المجال $\left]\frac{1}{2} ; 1\right[$ بحيث : $f\left(c\right) = 0$ ومنه للمعادلة $x^3 + x - 1 = 0$ حل على الأقل في المجال $\left]\frac{1}{2} ; 1\right[$.

نقطة التوقف :

إذا كانت الدالة f مستمرة في x_0 على اليمين فقط (أو على اليسار فقط) نقول إن النقطة N_0 ذات الفاصلة x_0 نقطة توقف.





تكنولوجيا الإعلام و الاتصال

التطبيق1:

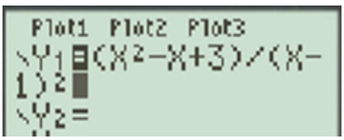
نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=\dfrac{x^2-x+3}{(x-1)^2}$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$

كيف يمكن تخمين هذه النتيجة باستعمال آلة بيانية

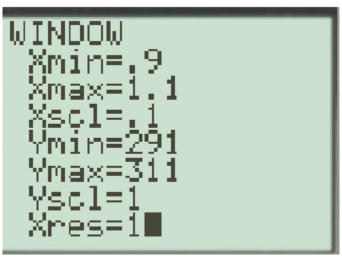
الحل :

1) ننقر على الزر :  **ونكتب عبارة الدالة كما يظهر على الصورة:**

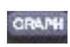


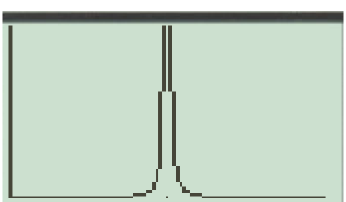
2) ننقر على الزر  **وندخل الأرقام كما يظهر على الصورة :**

لأن x يتناهى نحو 1 أما قيم $f(x)$ فهي محصورة بين $f(0,9)$ و $f(1,1)$ أي بين 291 و 311 .



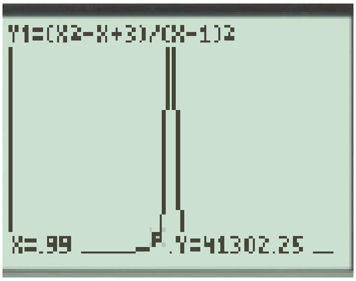
3) ننقر على الزر  **ثم نختار ZoomFit كما يظهر على الصورة .**

4) ننقر على  **فنحصل على التمثيل البياني المقابل :**



5)ننقرعلى 

نقوم بتحريك نقطة من البيان باستعمال الزالقة حتى نحصل على النقطة ذات الفاصلة 0,99 ونجد:



$$f(0,99)=41302,25$$

وهذا يدل على أن المخمنة التالية صحيحة

$$\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$$

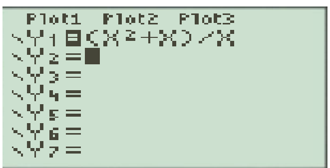
التطبيق 2:

باستعمال آلة بيانية ماهو تخمينك حول : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x}{x} = +\infty$

الحل :

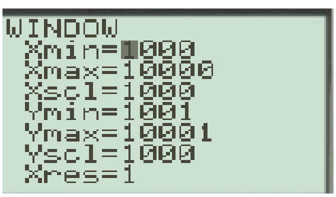
1) ننقر على الزر: 

ونكتب عبارة الدالة كما يلي:



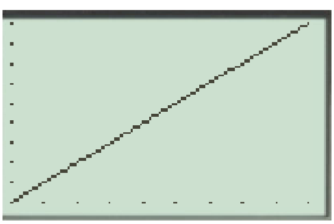
2) ننقر على الزر: 

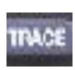
وندخل القيم التالية كما يظهر على الشاشة :



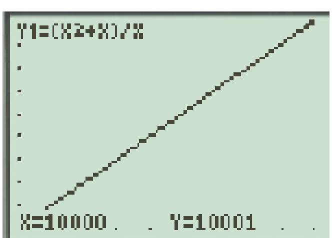
3) ننقر على الزر: 

فيظهر التمثيل البياني التالي :



4)ننقر على الزر 

ثم نحرك نقطة من البيان باستعمال الزالقة فنجد :

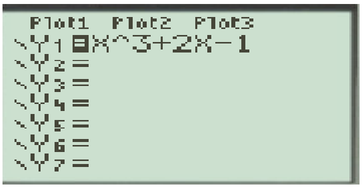


$$f(10000)=10001$$

وبالتالي المخمنة التالية صحيحة : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x}{x} = +\infty$.

التطبيق 3 :

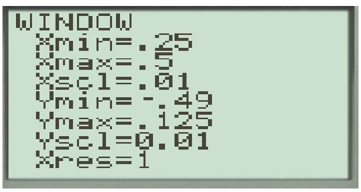
بين أن المعادلة : $x^3+2x-1=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left]\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right[$.



الحل :

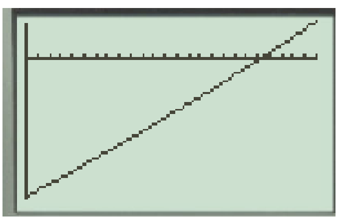
1) ننقر على الزر:  ونكتب عبارة الدالة f المعرفة كما يلي :

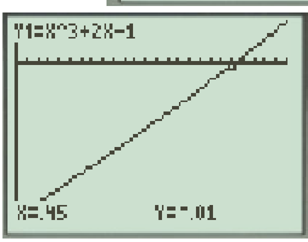
$f(x)=x^3+2x-1$.



2) ننقر على الزر  وندخل الأرقام كما يلي :

3) ننقر على الزر  فيظهر التمثيل البياني الآتي :

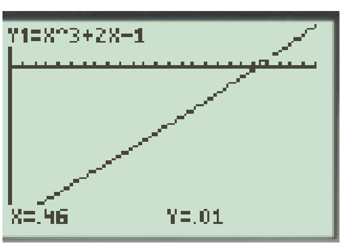




4) نقوم بتحريك نقطة من البيان باستعمال الزر  إلى أن تتغير إشارة $f(x)$

فمن أن أجل : $0,45$ نجد: $f(x)=-0,01$

ومن أجل $0,46$ نجد $f(x)=0,01$



ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد x_0 يحقق : $0,45 < x_0 < 0,46$

تمارين و مشكلات

التمرين 1

أذكر صحة أم خطأ الجمل الآتية مع التعليل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-x} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 3} = 2$

3) إذا كانت $f(x) = ax + b + g(x)$ فإن : $y = ax + b$ معادلة مستقيم مقارب مائل لبيان الدالة f.

4) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^3 + 4x - 1}{x^2 + 3} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} x = 0$

5) إذا كانت : $-\dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x}$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

6) إذا كانت : $f(x) \geq x^2$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

7) إذا كانت : $f(x) \leq x - 1$ فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

8) الدالة $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

9) الدالة $f : x \mapsto x + \sqrt{x}$ مستمرة على $[0 ; +\infty[$

10) الدالة $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \sqrt{x}$ مستمرة على $[0 ; +\infty[$

11) الدالة $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4}$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

12) إذا كانت الدالة f مستمرة على مجال $[a ; b]$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]a ; b[$.

13) إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[1\ ;\ 5]$ فإن الدالة f مستمرة عند 3 .

14) إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن الدالة $\frac{1}{f}$ مستمرة على المجال I .

15) إذا كانت الدالة f سالبة تماما على مجال I فإن الدالة f متناقصة تماما على I .

16) إذا كانت الدالة f غير مستمرة عند عدد x_0 فإنها غير معرفة عند x_0 .

17) إذا كانت الدالة f معرفة عند عدد x_0 فإنها غير مستمرة عند x_0 .

18) إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن الدالة $\sqrt{f}$ مستمرة على المجال I .

19) الدالة $\sqrt{f}$ مستمرة على I .

20) الدالة : $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ مستمرة على □ لأن :
الدالة $x \mapsto x^2 - 1$ مستمرة على □
و الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة على □.

19) الدالة : $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ مستمرة على □
لأن الدالة $x \mapsto x^2 - 1$ مستمرة على □
و الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة على □ .

20) المعادلة $x \sin x = 1$ تقبل على الأقل حلا في المجال $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

التمرين 2

عين مجموعة تعريف كل دالة فيما يلي ثم احسب النهايات عند أطرافها.

1) $f(x)=\dfrac{3x^3+x-4}{x-1}$ 2) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

3) $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+4x+3}$ 4) $f(x)=\dfrac{4x^4+2x^3+2x+1}{4x^2-4x-3}$

التمرين 3

احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{2x-4}}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{x-2}}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}}{x-1}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

التمرين 4

احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{4x^2+x}}$ 2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x+\sqrt{4x^2+x+1}}{-4x-\sqrt{x^2+1}}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]$ 4) $\lim\limits_{x\to +\infty}-x+\sqrt{x}$

5) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}$ 6) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5}{-x-\sqrt{x^2+4}}$

التمرين 5

احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 3x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1 - \cos x}$

التمرين 6

احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$ 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \cos 4x}$

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x - \cos x}{1 - \sin x + \cos x}$

التمرين 7

تعتبر الدالة f : $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 4}{x + 1}$

(C) تمثيلها البياني .

1- عين مجموعة تعريف الدالة ثم أحسب النهايات عند أطرافها.

2- بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

حيث a و b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها

3- عين معادلات المستقيمات المقاربة.

4- نفرض (Δ) المستقيم المقارب المائل.

ادرس الوضع النسبي للمنحني (C) و المستقيم (Δ).

التمرين 8

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 1}$

1- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2− احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-3x\right]$ ثم $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]$

3− عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

التمرين 9

نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=\dfrac{4+\sin x}{x^2}$

1− عين عددان حقيقيان a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x :

$$a \le 4+\sin x \le b$$

2− بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x يكون :

$v(x) \le f(x) \le u(x)$ حيث u و v دالتان يطلب تعيينهما.

3− استنتج النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

4− أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

التمرين 10

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x)=\dfrac{(\alpha-1)x+1}{(\alpha^2-1)x-3}$

حيث α عدد حقيقي .

احسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

التمرين 11

f دالة عددية معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-1} \; ; \; x\neq 1 \; , \; x\neq -1 \\ f(-1)=3 \end{cases}$$

1− عين مجموعة تعريف الدالة f

2− ادرس استمرارية f عند -1 .

التمرين 12

f دالة معرفة كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1} & , \ x \geq 1 \\ f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 1 & , \ x < 1 \end{cases}$$

أدرس استمرارية الدالة f على $\mathbb{R}$.

التمرين 13

f دالة معرفة كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+4} & , \ x > 0 \\ f(x) = \sqrt{2x^2+1} & , \ x \leq 0 \end{cases}$$

عين العدد الحقيقي b بحيث تكون الدالة f مستمرة عند 0

التمرين 14

f دالة معرفة بجدول تغيراتها كما يلي :

x	$-\infty$		-3		-2		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+4$	$\searrow$	3

ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ في $\mathbb{R}$.

التمرين 15

f دالة معرفة بالعبارة :

$$\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{|x-1|}{x-1} \quad ; \quad x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

1- عين مجموعة التعريف

2- أدرس استمرارية الدالة f على مجموعة تعريفها

التمرين 16

إليك جدول التغيرات لدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	-4 ↗	4	↘ -2

ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$ في $\mathbb{R}$.

التمرين 17

f دالة معرفة على المجال $]1 ; +\infty[$ بالعبارة :

$$f(x) = -x + \sqrt{x-1} + 0,9$$

أنشئ التمثيل البياني للدالة f باستعمال آلة بيانية .ثم استنتج عدد حلول المعادلة : $f(x) = 0$ مع إعطاء حصرا لكل منها بتقريب 10^{-2}

التمرين 18

أثبت أن المعادلة : $2x - cosx = 0$

تقبل على الأقل حلا في المجال : $\left]0 ; \frac{\pi}{6}\right[$

التمرين 19

f دالة معرفة على المجال $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x} , x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

1− ادرس استمرارية الدالة f عند 0

2− ادرس استمرارية f على مجموعة التعريف .

التمرين 20

f دالة معرفة و مستمرة على المجال $[0 ; 1]$ ز تأخذ قيمها في المجال $[0 ; 1]$.

1− برهن على وجود عدد α من المجال $[0 ; 1]$ بحيث :

$f(\alpha) = \alpha$.

2− فسر هندسيا هذه النتيجة .

3− هل تبقى النتائج السابقة صحيحة على مجال $[a ; b]$ حيث $a < b$.

التمرين 21

1− حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2 - 13x + 36 = 0$

2− حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^6 - 13x^3 + 36 = 0$

3− حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^{2n} - 13x^4 + 36 = 0$

التمرين 22

برهن أن كل كثير حدود درجته فردية ينعدم على الأقل مرة في $\mathbb{R}$.

الحلــــول

التمرين 1

1) صحيحة لأن $+\infty \longrightarrow -x$ لما $-\infty \longrightarrow x$ وعليه :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-x} = +\infty$$

2) صحيحة لأن :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} = 2$$

3) خاطئة لأننا لا نعلم $\lim_{|x|\to+\infty} g(x)$ التي يجب أن تكون معدومة لكي تكون الجملة صحيحة .

4) خاطئة لأن x يؤول إلى 0 و ليس إلى ∞، $+$ $-\infty$

5) صحيحة لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$

6) صحيحة لأن : $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ و لدينا : $f(x) \geq x^2$

7) صحيحة لأن : $\lim_{x\to-\infty}(x - 3) = -\infty$ و $f(x) \leq x - 3$

8) خاطئة لأن الدالة f غير معرفة عند 0 وعليه فهي غير معرفة على $\mathbb{R}$ ومن ثم غير مستمرة على $\mathbb{R}$.

9) صحيحة لأن الدالة هي مجموع دالتين مستمرتان على $]0; +\infty[$

هما : $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto x$

10) خاطئة لأن الدالة غير معرفة عند 0 .

11) صحيحة لأن الدالة هي مركب دالتين مستمرتان

الأولى : $x \mapsto x^2 + 4$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و موجبة

الثانية : $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة على $\mathbb{R}_+$.

12) خاطئة فمثلا الدالة $f : x \mapsto x^2 - 1$ مستمرة على المجال

$[4 ؛ 2]$ لكن المعادلة $x^2 - 1 = 0$ ليس لها حل في المجال

$]2 ; 4[$ و حتى تقبل حل أكيد يجب أن يكون $f(\mathrm{a}).f(\mathrm{b}) < 0$.

13) صحيحة لأن الدالة f مستمرة عند كل قيمة من المجال $]1 ; 5[$.

14) خاطئة إلا إذا كانت f غير معدومة على I .

15) خاطئة . فمثلا الدالة $f : x \mapsto -x^2 - 1$ سالبة تماما على $\mathbb{R}$

لكن غير متناقصة تماما لأن : $f'(x) = -2x$ وعليه فهي

متناقصة تماما من أجل $x > 0$ و متزايدة تماما من أجل $x < 0$.

16) خاطئة . فمثلا الدالة f حيث :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \quad ; \quad x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

معرفة عند 1 $\left(f(1) = 3\right)$ لكنها غير مستمرة عند 1 لكون :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2$$

17) صحيحة . لأنه حتى تكون دالة مستمرة عند x_0 يجب أن تكون :

معرفة عند x_0 وتحقق $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

18) خاطئة لأنه قد تكون f سالبة و عليه فالدالة $\sqrt{f}$ غير معرفة.

19) خاطئة إلا إذا كانت $x^2 - 1 > 0$ وهذا غير محقق في $\mathbb{R}$.

20) صحيحة لأن الدالة f حيث : $f(x) = x\sin x$ مستمرة على $\left[0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right]$ و $1 \in \left[0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right]$.

التمرين 2

1) لدينا : $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 4}{x - 1}$

- $D_f =]-\infty \,;\, 1[\;\cup\;]1 \,;\, +\infty[$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{3x^2 + x - 4}{x - 1}$

$$= \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{(x - 1)(3x + 4)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (3x + 4) = 7$$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (3x + 4) = 7$

2) لدينا : $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

- $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \;:\; x^2 - 5x + 6 \neq 0 \right\}$

نحل المعادلة : $x^2 - 5x + 6 = 0$ فنجد : $x = 2$ أو $x = 3$

ومنه : $D_f = \mathbb{R} - \{2 ; 3\}$

أي : $D_f =]-\infty ; 2[\cup]2 ; 3[\cup]3 ; +\infty[$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

لحساب بقية النهايات : نكتب جدول إشارة المقام

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		+	0	−	0	+	

- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 3)}$

$$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \dfrac{x + 2}{x - 3} = -4$$

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \dfrac{x + 2}{x - 3} = -4$
- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = -\infty$

لأن : $\begin{cases} x^2 - 4 \longrightarrow 5 \\ x^2 - 5x + 6 \xrightarrow{<} 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = +\infty$

لأن : $\begin{cases} x^2 - 4 \longrightarrow 5 \\ x^2 - 5x + 6 \xrightarrow{>} 0 \end{cases}$

3) لدينا : $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3}$

$\bullet D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4x + 3 \neq 0\}$

نحل المعادلة $x^2 + 4x + 3 = 0$ فنجد $x = -1$ أو $x = -3$

إذن : $D_f = \mathbb{R} - \{-3 ; -1\}$

وعليه : $D_f =]-\infty ; -3[\cup]-3 ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \underset{>}{\overset{<}{\to}} -3} f(x) = \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3}$

$$= \lim_{x\to-3} \frac{(x + 3)(x^2 - 4)}{(x + 3)(x + 1)}$$

$$= \lim_{x\to-3} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \frac{-5}{2}$$

إشارة المقام لحساب النهايات :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$3x^2+4x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3} = +\infty$

لأن : $\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \longrightarrow -6 \\ x^2 + 4x + 3 \overset{<}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3} = -\infty$

لأن :
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \longrightarrow -6 \\ x^2 + 4x + 3 \xrightarrow{>} 0 \end{cases}$$

4) لدينا :
$$f(x) = \frac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3}$$

• $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4x^2 - 4x - 3 \neq 0\}$

نحل المعادلة : $4x^2 - 4x - 3 = 0$ نجد : $x = -\frac{1}{2}$ أو $x = \frac{3}{2}$

و منه :
$$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right\}$$

أي :
$$D_f = \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x^4}{4x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^4}{4x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{(2x+1)(2x^3+1)}{(2x+1)(2x-3)}$

$$= \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{2x^3 + 1}{2x - 3} = \frac{\frac{3}{4}}{-4} = \frac{-3}{16}$$

• $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{3}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{3}{2}} \frac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3} = -\infty$

لأن :
$$\begin{cases} 4x^4 + 2x^3 + 2x + 1 \longrightarrow 41 \\ 4x^2 - 4x - 3 \xrightarrow{<} 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2-4x-3$		+	0	−	0	+	

- $$\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} \frac{3}{2}} \frac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3} = +\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} 4x^4 + 2x^3 + 2x + 1 \longrightarrow 41 \\ 4x^2 - 4x - 3 \xrightarrow{>} 0 \end{cases}$$

التمرين 3

حساب النهايات :

$$1)\ \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{2x-4}}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt{x+5} - 3\right)\left(\sqrt{x+5} + 3\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2x-4}\right)}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{2x-4}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2x-4}\right)\left(\sqrt{x+5} + 3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x + 5 - 9)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2x-4}\right)}{[x - (2x-4)]\left(\sqrt{x+5} + 3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x - 4)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2x-4}\right)}{-(x - 4)\left(\sqrt{x+5} + 3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2x-4}}{-\left(\sqrt{x+5} + 3\right)} = \frac{2 + 2}{-(3 + 3)} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$2)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2+x-6)\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}\,.\,\sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)\sqrt{x-2}}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} (x+3)\sqrt{x-2} = 0$$

$$3)\ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}}{x-1} = \lim_{x\to} \frac{\left[\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}\right]\left[\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right]}{(x-1)\left[\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-(2x-1)}{(x-1)\left[\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)\left[\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}} = -\frac{1}{2}$$

$$4)\ \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left[\sqrt{x+1}+1\right]}{\left[\sqrt{x+1}-1\right]\left[\sqrt{x+1}+1\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left[\sqrt{x+1}+1\right]}{(x+1)-1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left[\sqrt{x+1}+1\right]}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \sqrt{x+1}+1 = 2$$

التمرين 4

حساب النهايات :

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2+1}}{x - \sqrt{4x^2+x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x - \sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x - \sqrt{x^2}\sqrt{4+\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x - x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x - x\sqrt{4+\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[2 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]}{x\left[1 - \sqrt{4+\frac{1}{x}}\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1 - \sqrt{4+\frac{1}{x}}} = \frac{2-1}{1-2} = -1$$

$$2)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+\sqrt{4x^2+x+1}}{-4x-\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{-4x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+\sqrt{x^2}\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-4x-\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-4x-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-4x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left[-1-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]}{x\left[-4+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-4+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-1-2}{-4+1} = 1$$

$$3)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2+1} - x\right]\left[\sqrt{x^2+1} + x\right]}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty} \left[-x+\sqrt{x}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[-\sqrt{x}\,.\,\sqrt{x}+\sqrt{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(-\sqrt{x}+1\right) = -\infty$$

$$5)\ \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2}\right]\left[\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2}\right]}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2+1)-(x^2+2)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}} = 0$$

$$6)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{-x-\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5\left(-x+\sqrt{x^2+4}\right)}{\left[-x-\sqrt{x^2+4}\right]\left[-x+\sqrt{x^2+4}\right]}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{5\left(-x+\sqrt{x^2+4}\right)}{x^2-(x^2+4)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-5}{4}\left[-x+\sqrt{x^2+4}\right] = -\infty$$

التمرين 5

حساب النهايات :

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{1}{3}$$

$$2)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} 2 \times \frac{\sin 2x}{2x} = 2$$

$$3)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} \times \cos x$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2.\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin x}{x}} \times \cos x = 2$$

$$4)\ \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{\left(2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos \frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,.\,2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1-\left(1-2\sin\frac{x}{2}^{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^{2}\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\,.\,\frac{x}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}=2$$

التمرين 6

حساب النهايات :

$$1)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}$$

بوضع : $x-\frac{\pi}{2}=z$ أي $x=\frac{\pi}{2}+z$

لما $x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$ فإن : $z\longrightarrow 0$ وعليه :

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos3x}{cosx}=\lim_{x\to 0}\frac{cos3\left(\frac{\pi}{2}+z\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2}+z\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{cos\left(\frac{3\pi}{2}+3z\right)}{-\sin z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{cos\frac{3\pi}{2}\,cos3z-\sin\frac{3\pi}{2}\,\sin 3z}{-\sin z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin 3z}{-\sin z}=\lim_{z\to 0}\frac{3.\frac{\sin 3z}{3z}}{\frac{-\sin z}{z}}=-3$$

2) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+cos4x}$$

بوضع $x-\frac{\pi}{4}=z$ أي $x=\frac{\pi}{4}+z$

لما $x\longrightarrow\frac{\pi}{4}$: فإن $z\longrightarrow 0$ وعليه

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+cos4x}=\lim_{z\to 0}\frac{1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+z\right)}{1+cos4\left(\frac{\pi}{4}+z\right)}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{1-2\left[\sin\frac{\pi}{4}\,cosz+cos\frac{\pi}{4}\,\sin z\right]^2}{1+cos\left(\pi+4z\right)}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{1-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,cosz+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\sin z\right)^2}{1-cos4z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1 - 2 \times \frac{1}{2}\left(\cos z + \sin z\right)^2}{1 - \cos 4z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1 - \left(\cos^2 z + \sin^2 z + 2\sin z\ \cos z\right)}{1 - \cos 4z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1 - \left(1 + 2\sin z\ \cos z\right)}{1 - \cos 4z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-2\sin z \cdot \cos z}{1 - \cos 4z} = \lim_{z\to 0} \frac{-2\sin z \cdot \cos z}{1 - \left(1 - 2\sin^2 2z\right)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-2\sin z \cdot \cos z}{2\sin^2 2z} = \lim_{z\to 0} \frac{-\sin z \cdot \cos z}{\left(2\sin z \cdot \cos z\right)^2}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-\sin z \cdot \cos z}{4\sin^2 z \cdot \cos^2 z} = \lim_{z\to 0} \frac{-1}{4\sin z \cdot \cos z}$$

وعليه :

- $$\lim_{x \overset{>}{\to} \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \cos 4x} = \lim_{z \overset{>}{\to} 0} \frac{-1}{4\sin z \cdot \cos z} = -\infty$$
- $$\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \cos 4x} = \lim_{z \overset{<}{\to} 0} \frac{-1}{4\sin z \cdot \cos z} = +\infty$$

3) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 - \sin x + \cos x}$$

بوضع $x - \frac{\pi}{2} = z$ نجد : $x = \frac{\pi}{2} + z$

وعليه : لما $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ فإن : $z \longrightarrow 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x-\cos x}{1-\sin x+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+z\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+z\right)}{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+z\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+z\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos z+\sin z}{1-\cos z-\sin z} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sin\left(1-2\sin^2\frac{z}{2}\right)+2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{1-\left(1-2\sin^2\frac{z}{2}\right)-2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{2\sin^2\frac{z}{2}+2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{2\sin^2\frac{z}{2}-2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{2\sin\frac{z}{2}\left[\sin\frac{z}{2}+\cos\frac{z}{2}\right]}{2\sin\frac{z}{2}\left[\sin\frac{z}{2}-\cos\frac{z}{2}\right]}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\sin\frac{z}{2}+\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}-\cos\frac{z}{2}} = \frac{1}{-1} = -1$$

التمرين 7

1− مجموعة التعريف :

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} \quad ؛ \quad D_f =]-\infty\,;-1[\ \cup\ ]-1\,;+\infty[$$

− النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} \frac{x^2 + x - 4}{x+1} = +\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} x^2 + x - 4 \longrightarrow -4 \\ x + 1 \xrightarrow{<} 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} \frac{x^2 + x - 4}{x+1} = -\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} x^2 + x - 4 \longrightarrow -4 \\ x + 1 \xrightarrow{>} 0 \end{cases}$$

2) تبيان أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

إذن :
$$f(x) = \frac{(ax + b)(x + 1) + c}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + (a + b)x + b + c}{x+1}$$

ومنه :
$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 1 \\ b + c = -4 \end{cases}$$
أي :
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases}$$

إذن :
$$f(x) = x - \frac{4}{x+1}$$

3− تعيين معادلات المستقيمات المقاربة :

بما أن : $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -1}} f(x) = +\infty$

فإن : $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب.

و بما أن : $f(x) = x - \dfrac{4}{x+1}$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4}{x+1} = 0$

فإن : $y = x$ معادلة المستقيم المقارب المائل عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

4− دراسة الوضع النسبي لـ (Δ) و (C) :

$$f(x) - y = \frac{-4}{x+1}$$

ومنه :

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ $+\infty$	
$x+1$	$-$	$+$
$f(x)-y$	$+$	$-$

إذن (Δ) لا يقطع (C) .

لما $x \in \,]-\infty ; -1[$: (C) يقع فوق (Δ)

لما $x \in \,]1 ; +\infty[$: (C) يقع تحت (Δ)

التمرين 8

حساب النهايات :

$D_f = \,]-\infty ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x + \sqrt{x^2+1} = \lim_{x \to -\infty} 2x + \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2x + \sqrt{x^2}\ \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2x + |x| \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2x - x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} x\left[2 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x + \sqrt{x^2+1} = +\infty$$

2− حساب:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 3x = \lim_{x\to+\infty} 2x + \sqrt{x^2+1} - 3x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -x + \sqrt{x^2+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x-\sqrt{x^2+1}\right)}{-x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-(x^2+1)}{-x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{-x-\sqrt{x^2+1}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} 2x + \sqrt{x^2+1} - x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x + \sqrt{x^2+1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-x-\sqrt{x^2+1}} = 0$$

3− تعيين معادلات المستقيمات المقاربة :

بما أن : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - 3x\right] = 0$

فإن : $y = 3x$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$.

بما أن : $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - x\right] = 0$

فإن : $y = x$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$.

التمرين 9

1− تعيين a و b :

لدينا : $-1 \le \sin x \le 1$ ومنه : $3 \le 4 + \sin x \le 5$

2− تبيان أن : $v(x) \le f(x) \le u(x)$

لدينا : $3 \le 4 + \sin x \le 5$

وعليه : $\frac{3}{x^2} \le \frac{4 + \sin x}{x^2} \le \frac{5}{x^2}$

ومنه : $\frac{3}{x^2} \le f(x) \le \frac{5}{x^2}$

3− استنتاج النهايات :

• بما أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2} = 0$

فإن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

• بما أن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x^2} = 0$

فإن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

−4 $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\frac{4 + \sin x}{x^2} = +\infty$

التمرين 10

حساب النـهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

• إذا كان $\alpha - 1 = 0$ أي $\alpha = 1$: $f(x) = -\frac{1}{3}$

وعليه : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$

• إذا كان : $\alpha^2 - 1 = 0$ و $\alpha - 1 \neq 0$ أي $\alpha + 1 = 0$

ومنه : $\alpha = -1$.

$$f(x) = \frac{-2x + 1}{-3} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{3}x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3}x = +\infty$$

• إذا كان $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\alpha - 1)x}{(\alpha^2 - 1)x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - 1} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\alpha - 1)x}{(\alpha^2 - 1)x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - 1} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

التمرين 11

1− تعيين مجموعة التعريف :

$D_f = \left]-\infty\,;1\right[\cup \left]1\,;+\infty\right[$: أي $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2− دراسة الاستمرارية عند 1− :

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = 3$$

وعليه : $\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$ ومنه f مستمرة عند 1− .

التمرين 12

− دراسة الاستمرارية على $\mathbb{R}$ للدالة f :

- من أجل $x \in \left]1\,;+\infty\right[$: الدالة f مستمرة لأنها دالة ناطقة .
- من أجل $x \in \left]-\infty\,;1\right[$: الدالة f مستمرة لأنها دالة كثيرة حدود .
- $f(1) = \frac{(1)^2}{(1)^2+1}$ ومنه : $f(1) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{\substack{>\\x\to 1}} f(x) = \lim_{\substack{>\\x\to 1}} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{<\\x\to 1}} f(x) = \lim_{\substack{<\\x\to 1}} \frac{-1}{x^2} + 1 = 0$$

إذن f غير مستمرة عند 1 لأنها لا تقبل نهاية عند 1.

التمرين 13

تعيين b بحيث تكون f مستمرة عند 0 :

لدينا : $f(0) = \sqrt{2(0)^2+1}$ ومنه : $f(0) = 1$

$$\lim_{\substack{>\\x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{>\\x\to 0}} \frac{ax+b}{x^2+4} = \frac{b}{4}$$

$$\lim_{\substack{<\\x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{<\\x\to 0}} \sqrt{2x^2+1} = 1$$

حتى تكون f مستمرة عند 0 يجب أن يكون :

$\frac{b}{4} = 1$ ومنه $b = 4$

التمرين 14

تعيين عدد حلول المعادلة : $f(x) = 0$

1) في المجال : $]-\infty ; -3]$ لدينا : f مستمرة و متزايدة تماما

و لدينا : $f(-3) = 1$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-\infty ; -3]$.

2) في المجال $[-3 ; -2]$: الدالة f مستمرة و متناقصة تماما

ولدينا $f(-3) = 1$ و $f(-2) = -3$ ومنه حسب نظرية القيم

المتوسطة للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-3 ; -2[$.

3) في المجال $[-2 ; 3]$: الدالة f مستمرة و متزايدة تماما

ولدينا : $f(-2) = -3$ و $f(3) = 4$ ومنه حسب نظرية القيم

المتوسطة للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-2 ; 3[$.

وبالتالي : عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ على $\mathbb{R}$ هي ثلاث حلول.

التمرين 15

1) مجموعة التعريف : $D_f = \mathbb{R}$

2) دراسة الاستمرارية على D_f :

لدينا :
$$\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{x-1}{x-1} \; ; x > 1 \\ f(x) = x - \dfrac{x-1}{x-1} \; ; x < 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

ومنه :
$$\begin{cases} f(x) = x + 1 \; ; x > 1 \\ f(x) = x - 1 \; ; x < 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

- الدالة f مستمرة على المجال $]1 \; ; +\infty[$ لأنها دالة كثيرة الحدود
- الدالة f مستمرة على $]-\infty \; ; 1[$ لأنها دالة كثيرة حدود .
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x-1) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} x + 1 = 2$

ومنه f غير مستمرة عند 1 وبالتالي f غير مستمرة على D_f .

التمرين 16

تعيين عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$

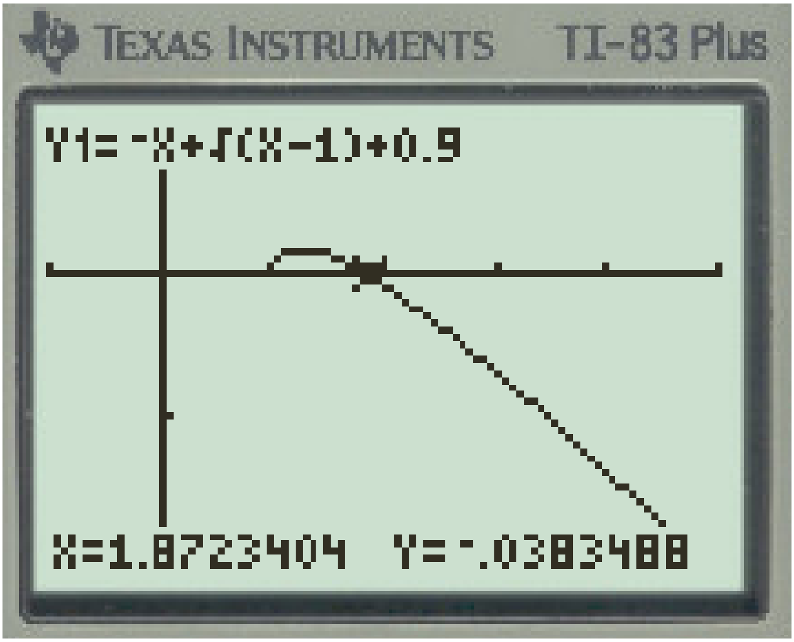
1) في المجال $]-\infty \; ; 0]$: الدالة f مستمرة و متزايدة تماما و تأخذ قيمها في المجال $]-4 \; ; 4]$ و بما أن $2 \in]-4 \; ; 4]$ فإن للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد حسب نظرية القيم المتوسطة .

2) في المجال $[0 \; ; +\infty[$: الدالة f مستمرة و متناقصة تماما و تأخذ قيمها في المجال $]-2 \; ; 4]$ و بما أن $2 \in]-2 \; ; 4]$ فإن للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد حسب نظرية القيم المتوسطة.

إذن للمعادلة $f(x) = 2$ حلين في $\mathbb{R}$.

التمرين 17

إنشاء بيان الدالة f بآلة بيانية



المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا محصور في $]1,78 ; 1,79[$.

التمرين 18

إثبات أن المعادلة : $2x - cosx = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $\left[0 ; \frac{\pi}{6}\right]$

- الدالة f هي مجموع دالتين و منه فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ لأن الدالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$.
- $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{6} - cos\frac{\pi}{6}$ و عليه : $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن : $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6}$ وعليه : $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$

• $f(0) = 2(0) - cos0$ وعليه : $f(0) = -1$

إذن : $f\left(\frac{\pi}{6}\right), f(0) < 0$

وحسب نظرية القيم المتوسطة للمعادلة $f(x) = 0$ حل على الأقل في المجال $\left]0 ; \frac{\pi}{6}\right[$.

التمرين 19

1− دراسة الاستمرارية عند 0 :

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{x \sin x}{1 - cosx} = \lim_{x\to0} \frac{2x \sin\frac{x}{2} \, cos\frac{x}{2}}{1 - \left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{2x \sin\frac{x}{2} \, cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to0} \frac{x \, cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}} = \lim_{x\to0} \frac{cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2}}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} = 2$$

إذن $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ وعليه f مستمرة عند 0 .

2− دراسة الاستمرارية على D_f :

لدينا : $f(x) = \dfrac{x \sin x}{1 - cosx}$

ولدينا: $x \mapsto x \sin x$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$.

ولدينا : $x \mapsto 1 - cosx$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$.

إذن الدالة f هي حاصل قسمة دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right[$ ومنه الدالة f مستمرة على D_f .

التمرين 20

1− البرهان على وجود α :

نعرف الدالة g كمايلي : $g(x) = f(x) - x$ على المجال $[0 ; 1]$

- الدال g مستمرة على $[0 ; 1]$ لأنها مجموع دالتان مستمرتان على $[0 ; 1]$.
- ولدينا $g(0) = f(0)$ و $g(1) = f(1) - 1$

بما أن $f(x)$ تنتمي إلى المجال $[0 ; 1]$ فإن : $0 \le f(x) \le 1$

أي أن : $1 \leq f(0) \leq 0$ و عليه $1 \leq g(0) \leq 0$

إذن $0 \geq g(0)$.

وكذالك $1 \leq f(1) \leq 0$ وعليه $0 \leq 1 - f(1) \leq 1-$

إذن $0 \leq g(1)$ ومنه : $0 \leq g(0) . g(1)$

وحسب نظرية القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد α من المجال

$[0 ; 1]$ بحيث $g(\alpha) = 0$

أي $0 = \alpha - f(\alpha)$ و عليه : $f(\alpha) = \alpha$

2− التفسير الهندسي للنتيجة :

العدد α هو حل للمعادلة $f(x) = x$ ومنه التمثيل البياني للدالة f يتقاطع مع المنصف الأول : $y = x$ في نقطة فاصلتها α .

3− لندرس صحة النتائج السابقة في المجال $[a ; b]$.

لتكن الدالة g حيث : $g(x) = f(x) - x$.

- الدالة g مستمرة على $[a ; b]$ لأنها مجموع دالتان مستمرتان على $[a ; b]$
- $g(a) = f(a) - a$ و $g(b) = f(b) - b$

لدينا : $a \leq f(x) \leq b$ وعليه : $a \leq f(a) \leq b$

ومنه : $0 \leq f(a) - a \leq b-a$ وبالتالي : $f(a) - a \geq 0$

أي أن : $g(a) \geq 0$

وكذلك : $a \leq f(b) \leq b$ وعليه : $g(b) \leq 0$

إذن : $g(a) . g(b) \leq 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد α من المجال
$[a ; b]$

بحيث $f(\alpha) - \alpha = 0$ وعليه $f(\alpha) = \alpha$

وعليه (C_f) يتقاطع مع المنصف الأول في نقطة فاصلتها α .

إذن تبقى النتائج السابقة صحيحة

التمرين 21

1) حل المعادلة : $x^2 - 13x + 36 = 0$

$\Delta = 25$ و منه للمعادلة حلين :

$x_1 = \dfrac{13 - 5}{2} = 4$ و $x_2 = \dfrac{13 + 5}{2} = 9$

2) حل المعادلة : $x^6 - 13x^3 + 36 = 0$

بوضع $x^3 = z$ نجد : $z^2 - 13z + 36 = 0$

الحلين $z_1 = 4$ $z_2 = 9$ ومنه : $x^3 = 4$ و $x^3 = 9$

وعليه : $x = \sqrt[3]{4}$ أو $x = \sqrt[3]{9}$

3) حل المعادلة : $x^{2n} - 13x^n + 36 = 0$

بوضع $x^n = y$ نجد : $y^2 - 13y + 36 = 0$

الحلين : $y_1 = 4$ و $y_2 = 9$

وعليه : $x^n = 4$ أو $x^n = 9$

ومنه : $x = \sqrt[n]{4}$ أو $x = \sqrt[n]{9}$

التمرين 22

نعتبر دالة كثيرة حدود من الدرجة n ودرجته فردية

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

حيث $a_n \neq 0$ و n عدد فردي نفرض $a_n > 0$

- الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n = +\infty$ و

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n = -\infty$

وعليه حسب نظرية القيم المتوسطة للمعادلة $f(x) = 0$ حل على الأقل في $\mathbb{R}$.

أي أن $f(x)$ ينعدم مرة واحدة على الأقل.