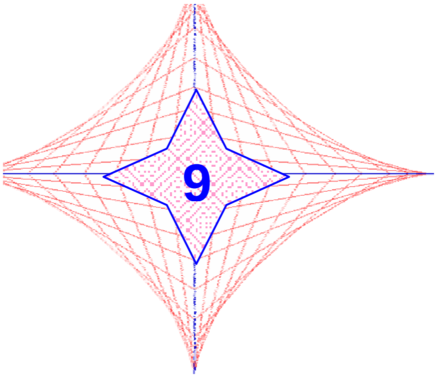
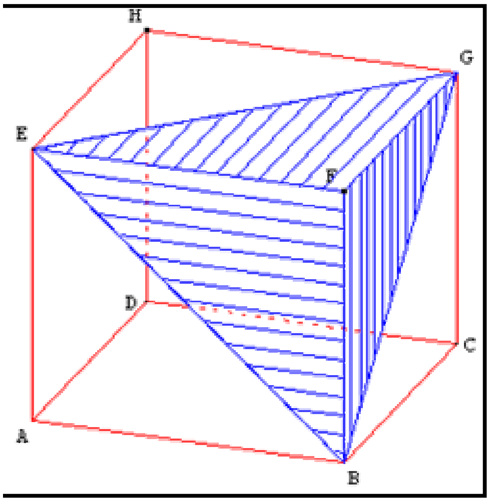
المقاطع المستوية
الأشعة في الفضاء



الكفاءات المستهدفة



- إنشاء مقطع مكعب و رباعي وجوه بمستو
. ممارسة الحساب الشعاعي في الفضاء .
- استعمال الأشعة لإثبات توازي شعاعين و استقامة ثلاث نقط
- البرهان على أن أشعة من نفس المستوي

- ينقسم هذا الفصل إلى جزأين يتضمن الأول تعيين المقاطع المستوية لمكعب و لرباعي وجوه في الفضاء و هو خاص بشعبتي الرياضيات و تقني رياضي بينما يعالج الجزء الثاني الحساب الشعاعي في الفضاء.
- يتم في هذا الفصل تمديد خواص الحساب الشعاعي من المستوي إلى الفضاء كما يتم تعريف مفهوم الأشعة من نفس المستوي.
- يسمح هذا الفصل كذلك بإعادة استثمار نتائج الهندسة الفضائية المدروسة في السنة الأولى من خلال تعيين المقاطع المستوية لمكعب أو لرباعي وجوه.
- تسمح المسائل المتنوعة المقترحة، والتي تتضمن التوازي، الارتباط الخطي و الاستقامة ...، فرصا سانحة لتوظيف البرهان الرياضي.

الأنشطة

النشاط 1 :

الهدف : تعيين مقطع مكعب بمستو.

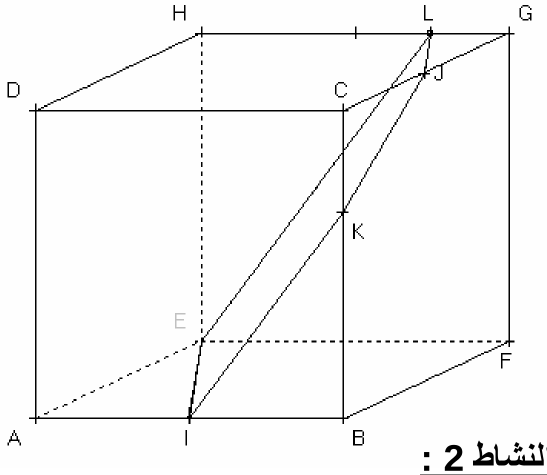
1) الوجهان $ABFE$ و $DCGH$ متوازيان

و بالتالي: $(LJ)//(EI)$

2) كذلك $(IK)//(EL)$

3) تقاطع المستوي مع الوجه $BCGF$ هي القطعة $[KJ]$

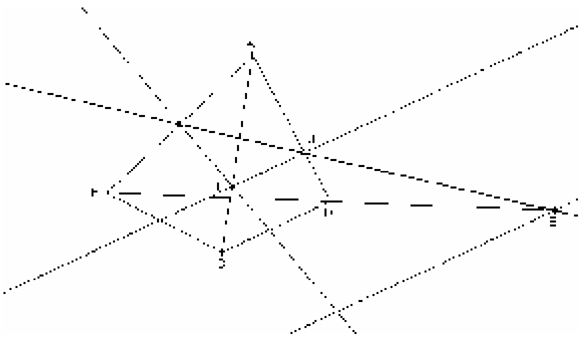
4) تقاطع المستوي مع المكعب هو الخماسي $IELJK$



النشاط 2 :

الهدف : تعيين مقطع رباعي وجوه بمستو.

تصحيح: E نظيرة B عوض النقطة F



1) تقاطع (P) مع المستوي (ABD) هو القطعة $[IJ]$.

2) (CD) يوازي كلا من (P) و المستوي (BCD) و بالتالي فهو يوازي تقاطعهما.و لدينا كذلك E نقطة مشتركة بين المستويين.

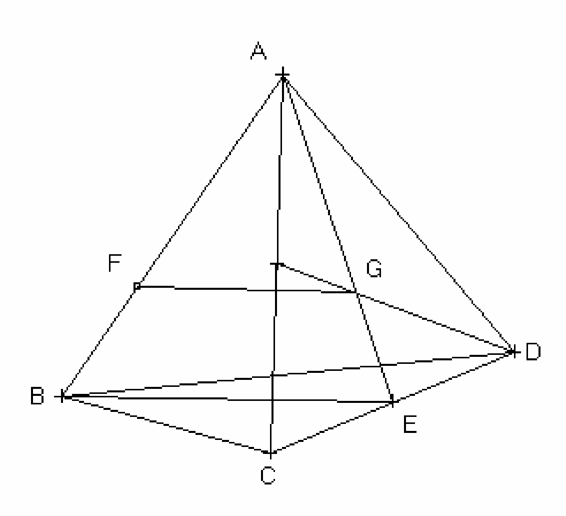
3) النقطة I مشتركة بين المستويين (P) و (ABC).

4) أنظر الشكل.

النشاط 3 :

الهدف : إثبات أن مستقيمين من الفضاء متوازيان.

(1



2) $\overrightarrow{FA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

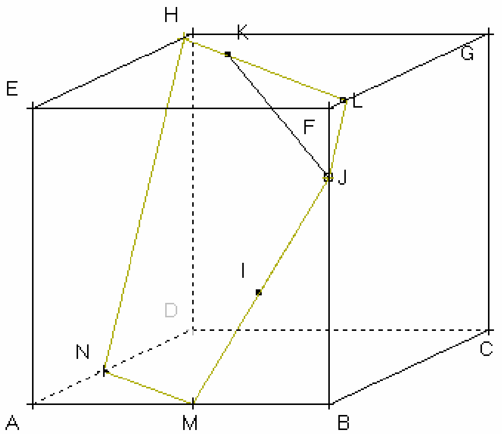
3) $x=\frac{3}{2}$

4) $(BE)//(FG)$

النشاط 4:

الهدف: إثبات أن ثلاث أشعة من نفس المستوي.

(1



2) $\overrightarrow{LJ}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$

النشاط 5:

الهدف: إنجاز برهان لخاصية.

1) لدينا: $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'I}$ و باستعمال علاقات مماثلة وعلما أن $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=\vec{0}$ و $\overrightarrow{G'I}+\overrightarrow{G'J}+\overrightarrow{G'K}+\overrightarrow{G'L}=\vec{0}$ و بعد الجمع نتحصل على المطلوب.

2) بديهي.

3) تبين أن: $\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{BG_2}+\overrightarrow{CG_3}+\overrightarrow{DG_4}=\vec{0}$

الأعمال الموجهة

مبرهنة منلاوس

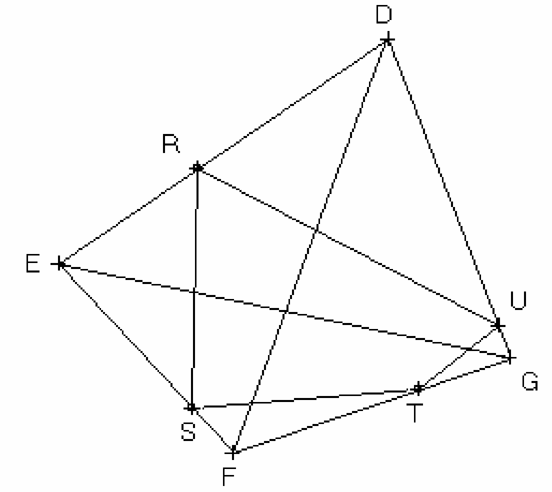
الهدف: إنجاز برهانا للمبرهنة

1) بتطبيق مبرهنة طالس في وضعيتين مختلفتين نتحصل على النتيجتين المطلوبتين.

لدينا $MA=\frac{NA}{NC}\times QC$ و $\frac{1}{MB}=\frac{PC}{PB}\times\frac{1}{QC}$

و منه النتيجة.

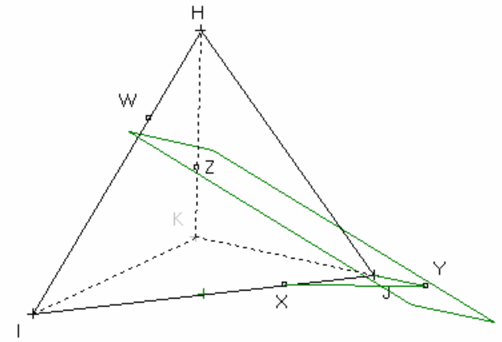
2)



المستقيمان (UT) و (DF) يتقاطعان في النقطة V.

بتطبيق النتيجة السابقة على المثلثين DEF و DGF نتحصل على المطلوب.

التطبيق:



لدينا $\frac{WH}{WI}\times\frac{XI}{XJ}\times\frac{YJ}{YK}\times\frac{ZK}{ZH}\neq 1$ و منه فالنقط لا تنتمي إلى نفس المستوي.

المرجح و الاستقامية

الهدف: إثبات استقامية ثلاث نقط باستعمال المرجح.

المثال: من $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ نجد مثلا:

$3\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GD}$ و $4\overrightarrow{GE}=3\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$

بالجمع و علما أن $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

نتحصل على العلاقة: $4\overrightarrow{GE}+3\overrightarrow{GF}=\vec{0}$.

الحالة الخاصة:

من العلاقة $\overrightarrow{BE}=k\overrightarrow{BC}$ نستنتج أن:

$(1-k)\overrightarrow{EB}+k\overrightarrow{EC}=\vec{0}$

و من العلاقة $\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AD}$ نستنتج أن:

$(1-k)\overrightarrow{FA}+k\overrightarrow{FD}=\vec{0}$

لدينا: $(1-k)\overrightarrow{HA}+k\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{HF}$

و $(1-k)\overrightarrow{HB}+k\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HE}$ و علما أن: $\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HF}=\vec{0}$ نجد المطلوب.

نثبت بكل سهولة أن: $(1-k)\overrightarrow{HI}+k\overrightarrow{HJ}=\vec{0}$ و بالتالي فالنقطة في استقامية.

تمارين

1 1) خاطئ . 2) صحيح . 3) خاطئ.

2 1) خاطئ . 2) خاطئ . 3) صحيح .

3 1) خاطئ . 2) صحيح . 3) خاطئ.

4 الإجابة 2 هي الصحيحة

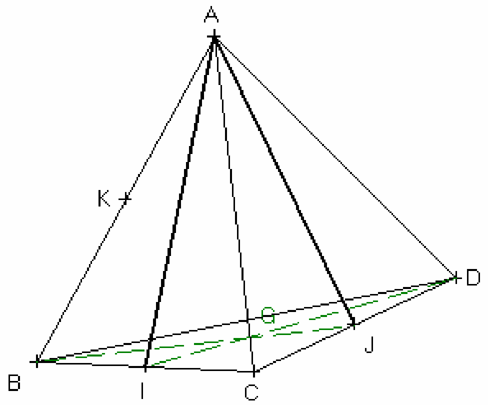
5 هذا التمرين خاص بالفصل العاشر(الإجابة الثالثة)

6 هذا التمرين خاص بالفصل العاشر(الإجابة الثانية)

7 تقاطع المستويين (AID) و (ABJ) هو المستقيم (AG) حيث G مركز ثقل المثلث BCD.

تقاطع المستويين (ADI) و (CDK) هو المستقيم (AG') حيث G' مركز ثقل ABC.

تقاطع المستويين (CDK) و (ABJ) هو المستقيم (KJ)



8 المستويان (SAB) و (SCD) يتقاطعان وفق المستقيم الذي يشمل النقطة S و يوازي (AB).

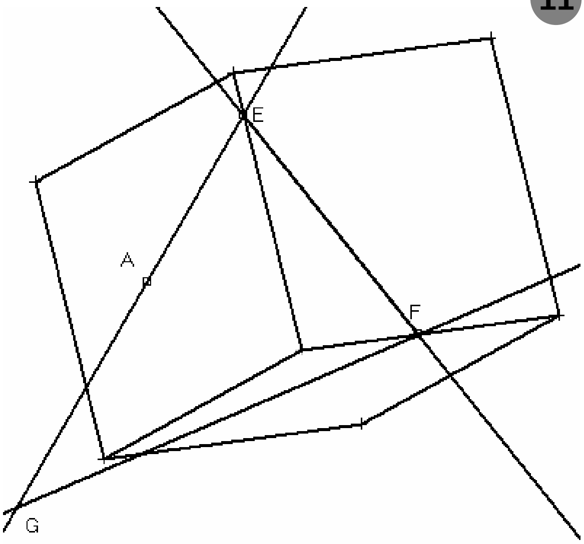
المستويان (SAC) و (SBD) يتقاطعان وفق المستقيم (SO) حيث O مركز $ABCD$. .

9 $(S,D)\cap(S,D')=(OS)$.

10 المستويان (SAD) و (SBC) يتقاطعان وفق المستقيم (SO) حيث: $(BC)\cap(AD)=\{O\}$.

المستويان (SAB) و (SCD) يتقاطعان وفق المستقيم الذي يشمل النقطة S و يوازي (AD).

11



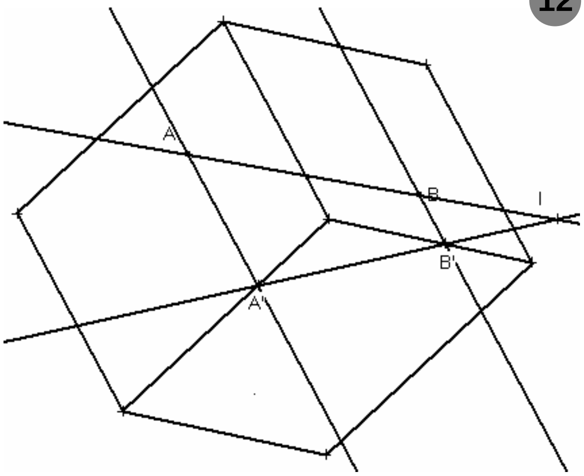
$(A,(D))\cap(P)=(AE)$،

$(A,(D))\cap(Q)=(EF)$

$(A,(D))\cap(R)=(FG)$.

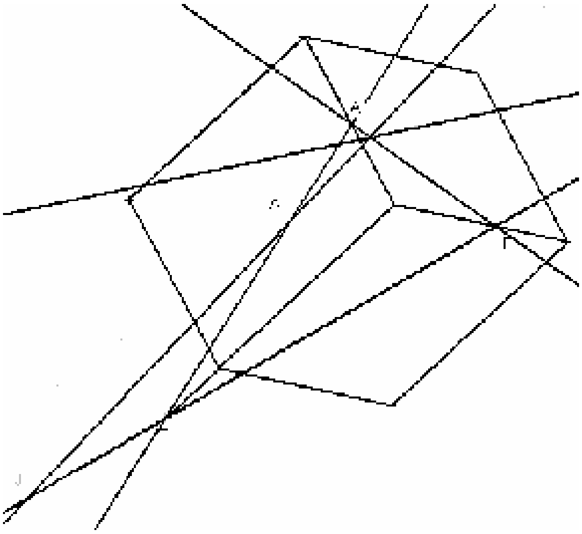
حيث $(AE)\cap(R)=\{G\}$

12



تقاطع المستوي (R) مع المستقيم (AB) هي النقطة I.

13

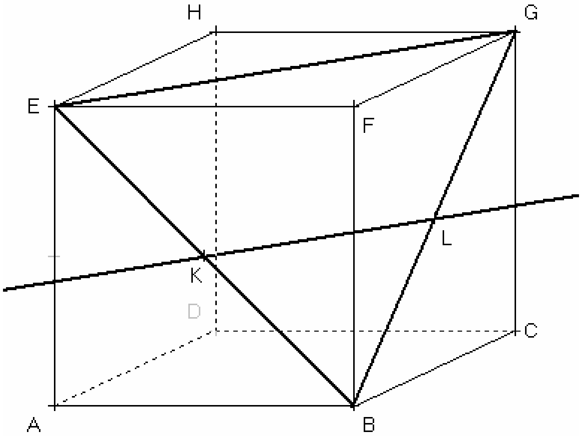


لتكن I و J نقطتي تقاطع (Δ) مع (D) و (D') على الترتيب.لتكن E و F نقطتي تقاطع (D') مع (P) و (Q) على الترتيب. المستوي $(A,(D'))$ يقطع (P) و (Q) في نقطة A' نقطة تقاطع المستقيم (EA) مع المستقيم تقاطع المستويين (P) و (Q). النقطة I هي إذن تقاطع المستقيمين (FA') مع (D).أما النقطة J فهي تقاطع المستقيمين (FE) و (AI).

عكسيا:.....

14 المستقيم الذي يشمل A و يوازي (D) يقطع (R) في نقطة A'. المستقيم الذي يشمل النقطة B و يوازي (D) يقطع (R) في نقطة B'. التقاطع المطلوب هو إذن المستقيم $(A'B')$. تقاطع (AB) مع المستوي (R) هي النقطة I تقاطع المستقيمين (AB) و $(A'B')$.

15

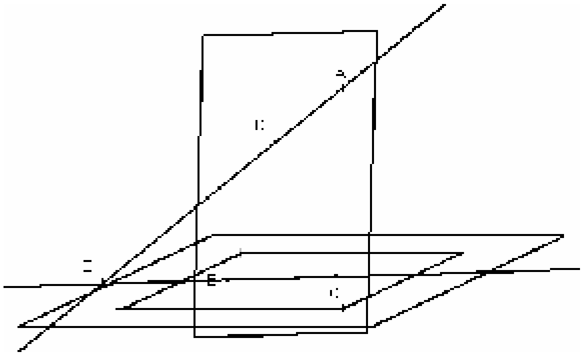


تقاطع المستوي (P) مع المستوي (EBG) هو المستقيم (KL).

16 في حالة عدم توازي (IJ) و (AB) فإن المستقيم الذي يشمل S و يوازي (AB) يقطع (IJ) في E .
المستويان (SAB) و (SDC) يتقاطعان وفق (SE).
(IJ) و (KE) يقطعان (SA)، (SB)، (SC) و (SD) في أربع نقط ثابتة F_1، F_2، F_3 و F_4 على الترتيب.تقاطع (IJK) مع المستويات (SAB)، (SBC)، (SAD) و (SDC) هي على الترتيب المستقيمات (F_1F_2)، (F_2F_3)، (F_3F_4) و (F_1F_4).
ملاحظة: يمكن دراسة حالة التوازي.

17 **تصحيح:** A و B من (D) . **:.** A' و B' من (D').
المستقيمان (D) و (D') يعينان مستويا فهو يحوي إذن المستقيمين (AA') و (BB') فهما إذن إما متقاطعان و إما متوازيان.

18 نستعمل البرهان بالخلف: المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P). إذن لو كانت A، B و C في استقامية لكانت A نقطة من (P) و هذا تناقض.
بما أنها ليست على استقامة واحدة فهي تعين مستويا.



19 (MN) محتوى في المستوي (ABC). المستويان (ABC) و (BCD) يتقاطعان وفق (BC) و بالتالي فالمستقيم (MN) يقطع (BCD) في نقطة P' من المستقيم (BC).
ننجز برهانا مماثلا بالنسبة لكل من M' و N'.

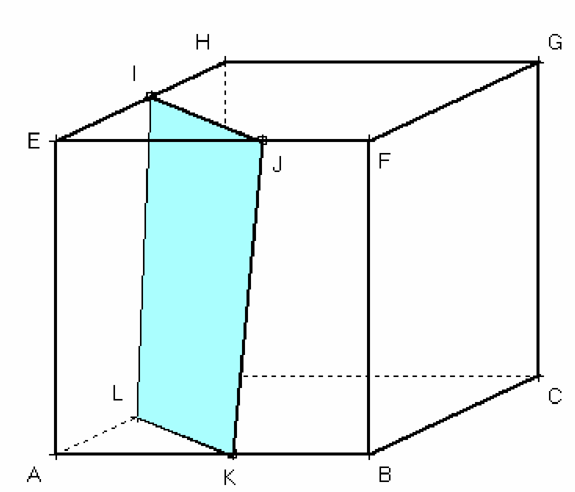
20 **الحالة1:** $(D)//(D')$
المستقيمات التي تقطع (D)، (D') و (Δ) معا هي المستقيمات من المستوي (P) التي تشمل I و تقطع (D).

الحالة2: (D) و (D') غير متوازيين
المستقيمات التي تقطع (D)، (D') و (Δ) معا هي المستقيمات من المستوي (P) و التي تشمل I.

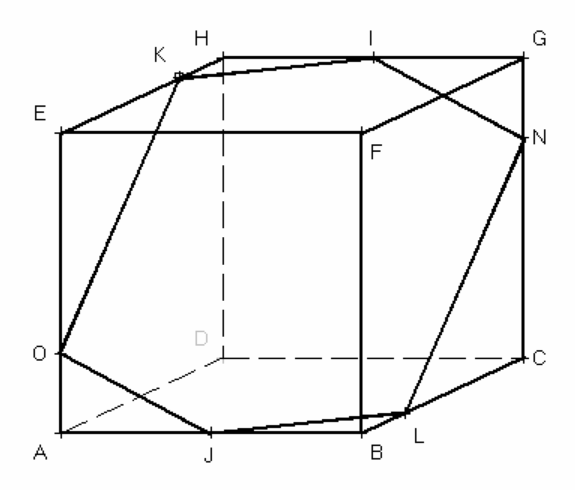
21 يكفي أن لا تنتمي النقطة A إلى المستوي المحدد بالمستقيمين (D) و (D') و في هذه الحالة تقاطع المستويين $(A,(D))$ و $(A,(D'))$ هو المستقيم (OA).

22 المستوي المعين بـ(D) و A هو المستوي (P).
إذا كان المستقيمان (D) و (AB) من نفس المستوي تنتمي عندئذ النقطة B إلى المستوي (P) و هذا تناقض.

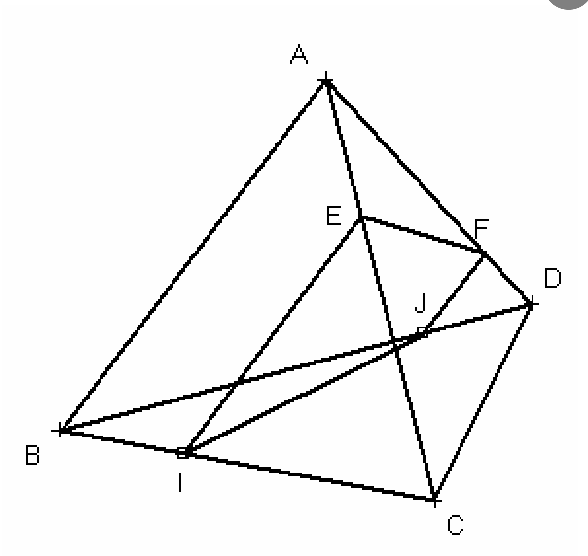
26 (IJ) يوازي (KL) و (JK) يوازي (IL)
المقطع هو المستطيل $IJKL$



27



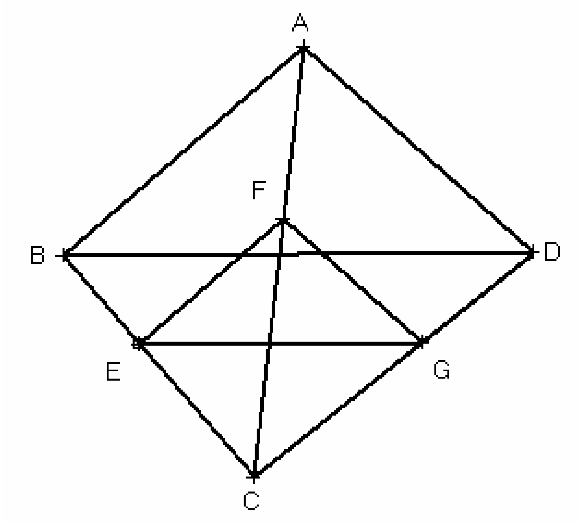
28



المستوي (P) يقطع الوجه ABC وفق قطعة توازي (AB) أي $[IE]$ و يقطع الوجه ABD وفق قطعة توازي (AB) أي $[JF]$

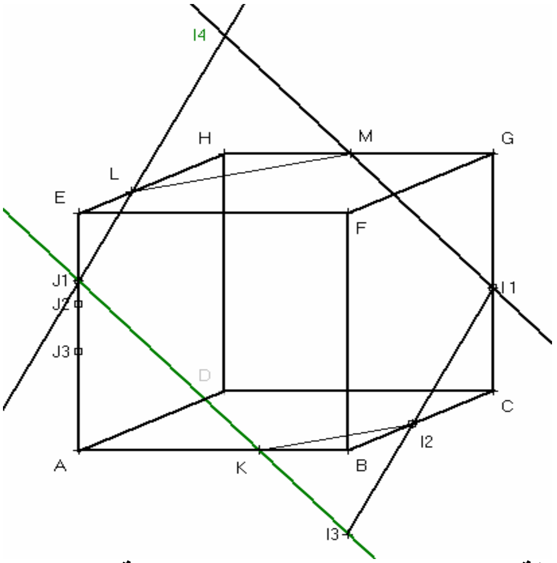
المقطع هو الرباعي $IJFE$.

29



المقطع هو الثلث EFG.

30 المستقيم (FB) هو تقاطع المستويين $(ABFE)$ و $(BCGF)$ الذي يشمل (I_1I_2) و بالتالي فإن تقاطع $(ABFE)$ مع (I_1I_2) هو تقاطع (FB) مع (I_1I_2). نسمي I_3 نقطة التقاطع. بما أن $(ABFE)//(DCGH)$ ننشئ من I_1 المستقيم الموازي لـِ (I_1I_3) و لتكن I_4 نقطة تقاطعه مع المستقيم (DH). المقطع هو إذن السداسي $J_1KI_2I_1ML$.



ملاحظة: التمارين من 31 إلى 50 خاصة بالفصل العاشر.

31 **تصحيح:** (D,A,C,H) عوض (A,C,F,G) و (D,A,B,H) عوض (E,F,C,K).

32 (A,C,F,G) معلم متعامد فقط.

(A,C,D,F) ليس معلما.

(E,F,C,K) معلم لا متعامد و لا متجانس.

33 $(AB)\perp(AD)$، $(AB)\perp(AE)$

و $(AE)\perp(AD)$ و $AB=AD=AE$.

$A(0,0,0)$، $B(1,0,0)$، $C(1,1,0)$، $G(1,1,1)$.

34 نفس اعتبارات التمرين السابق.

35 نفس اعتبارات التمرين السابق.

36 $AB=\sqrt{3}$

37 تطبيق مبرهنة فيتاغورث

38 $m\in\{-2,4\}$

39 $AB=\sqrt{14}$، $AC=\sqrt{14}$، $BC=3\sqrt{2}$

لدينا: $AB=AC$. المثلث ABC متساوي الساقين.

40 ندرس كل الحالات $AB=AC$، $AB=BC$، ...

ندرس الحالة: $\begin{cases} AB=AC \\ AB=BC \end{cases}$

41 تنتمي النقطة $A(1,1,2)$ إلى كل من المستويات التي معادلاتها $x=1$ ، $y=1$ و $z=2$.
تنتمي النقط إلى الدائرة التي مركزها النقطة $H(3,4,2)$ و نصف قطرها $\sqrt{13}$.

42 $MA^2=MB^2$.

43 نفس المنهجية السابقة

44 $OM^2=OA^2$ و منه: $x^2+y^2+z^2-38=0$

45 المسافة بين النقطة O و المستوي (P) هي 2 بينما نصف قطر سطح الكرة هو $OA=3$. إذن سطح الكرة يقطع المستوي وفق دائرة معادلتها $\begin{cases}x^2+y^2=5\\ z=-2\end{cases}$

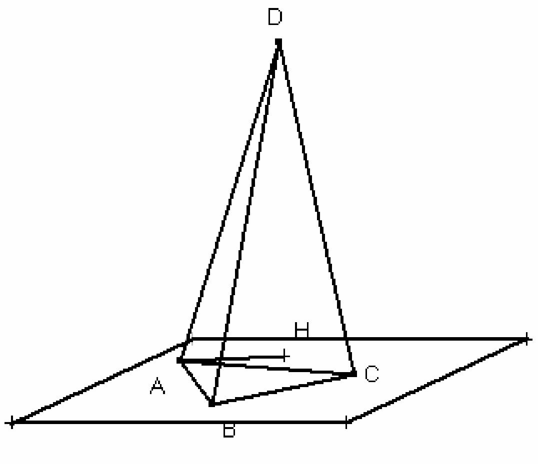
46 $x^2+y^2=9$

47 $y^2+z^2=5x^2$

48 نفس منهجية التمرين السابق.

49 $EB=EG=BG$ لأنها أقطار لوجوه نفس المكعب.
المثلث EBG متقايس الأضلاع.

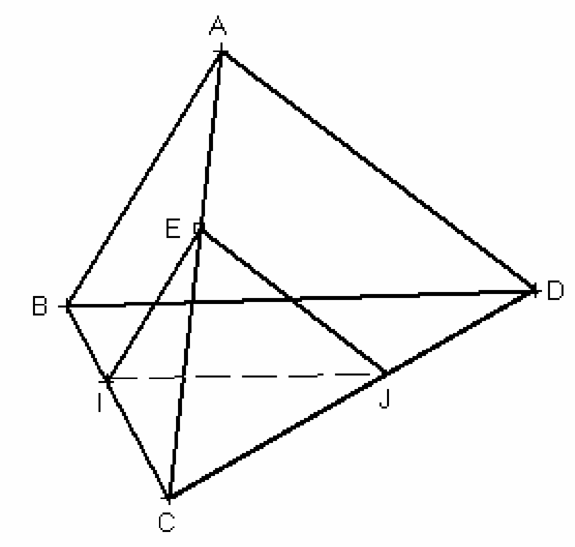
50



المستويات (ADH) ، (BAH) و (ACH) تتقاطع وفق (AH). و (AH) عمودي على المستوي (BCD) فهو إذن عمودي على (BC) و منه $(DH)\perp(BC)$. و بطريقة مماثلة نثبت أن: $(BH)\perp(DC)$ و $(CH)\perp(BD)$. نستنتج هكذا أن الارتفاعات (DH) ، (BH) و (CH) تتلاقى في النقطة H.

51

تصحيح: عوض $[CD]$ نأخذ $[AD]$.



مقطع رباعي الوجوه بالمستوي الذي يشمل النقطة E و يوازي (AB) و (AD) هو المثلث EIJ.

52
- المستوي (ABC) يقطع المستوي (P) وفق مستقيم و بالتالي فإن نقط تقاطع المستقيمات (AB) ، (AC) و (BC) مع المستوي (P) أي A' ، B' و C' تنتمي إلى مستقيم التقاطع فهي إذن في استقامية.
- النقط M ، A و B تعين مستويا يقطع المستوي (P) وفق مستقيم و بالتالي يقطع المستقيمان (MA) و (MB) المستوي (P) في نقطتين A_1 و B_1 على الترتيب.

كذلك المستوي (CAM) بقطع المستوي (P) وفق مستقيم فنحصل على نقطتين A_1 و C_1.
المستوي (AMB) يقطع (P) وفق مستقيم يشمل النقطة C' لأن (AB) محتوى في (AMB) فهو يقطع (P) في C'. إذن (A_1B_1) يمر من النقطة C'.
بطريقة مماثلة نثبت أن (B_1C_1) يمر من النقطة A' و (A_1C_1) يمر من النقطة B'.