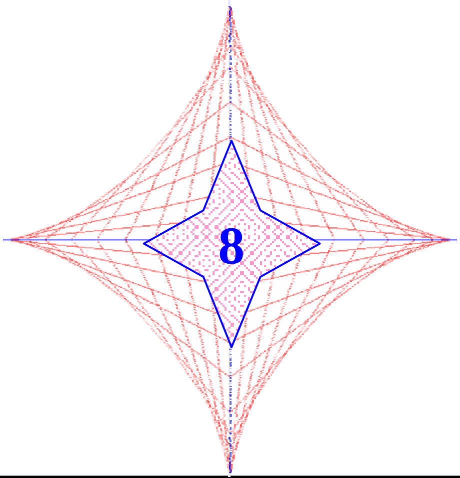


الزوايا الموجهة
حساب المثلثات

الكفاءات المستهدفة

- استعمال خواص الزوايا الموجهة لإثبات تقايس الزوايا.
- تعيين أقياس زاوية موجهة لشعاعين.
- توظيف دساتير التحويل المتعلقة بجيب التمام و بالجيب في حل مسائل مثلثية.
- حل معادلات و متراجحات مثلثية.

مقدمة

يعتمد هذا الفصل على المعارف السابقة (الدائرة المثلثية ، لف المجموعة R على الدائرة المثلثية ، الراديان ، الدالتين sin و cos .

أهم النقط التي تعالج خلال هذا الفصل هي :

- **تعليم نقطة على الدائرة المثلثية بعدد معرف بتقريب مضاعف للعدد 2π**
- **مفهوم الزاوية الموجهة (نعرف القياس انطلاقا من التعليم على الدائرة دون اللجوء الى الأقواس الموجهة)**
- **التعليم القطبي لنقطة M ، $\overrightarrow{OM} = r(\cos\vec{i} + \sin\vec{j})$**
(الإنتقال من الإحداثيات القطبية الى الديكارتية و العكس ، حل معادلات مثلثية بسيطة)
- **دساتير الجمع باستعمال التعليم القطبي**
- **المتراجحات المثلثية البسيطة (استعمال الآلة الحاسبة)**

الأنشطة

<u>النشاط الأول :</u>

- **الهدف : تحويل الدرجات الى راديان و العكس**

النتائج هي : $\frac{\pi}{12}:\frac{\pi}{8}:\frac{\pi}{5}:\frac{7\pi}{12}:\frac{2\pi}{3}:67,5:75:52,5:10,5:142,5$

<u>النشاط الثاني :</u>

- **تعيين صور أعداد حقيقية على الدائرة المثلثية**

1) C نظيرة A بالنسبة للنقطة O
2) B نظيرة A بالنسبة للمستقيم (OJ)
3) D نظيرة A بالنسبة للمستقيم (OI)
4) E نظيرة A بالنسبة للمنصف الاول
5) F نظيرة E بالنسبة للمستقيم (OJ)
6) G نظيرة E بالنسبة للنقطة O
7) H نظيرة E بالنسبة للمستقيم (OI)
8) النقط المرفقة هي على الترتيب : H ; E ; C ; G ; D ; F ; B
9) M هي نقطة تقاطع (C) مع منصف الزاوية $F\hat{O}J$

<u>النشاط الثالث :</u>

- **الهدف : تعيين الصور بمعرفة أطوال الأقواس**

1) تعيين النقطة C (باستعمال المدور) تنصيف القوس $\overset{\frown}{AA'}$ مرتين حيث $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'})=\pi$ و A' نظيرة A بالنسبة لــ O

تعيين النقطة D بتنصيف القوس $\overset{\frown}{CC'}$ حيث OCC' مثلث متقايس الأضلاع (C' على يسار C)

تعيين النقطة E بتنصيف القوس $\overset{\frown}{DD'}$ حيث D' نظيرة D بالنسبة للنقطة O

تعيين النقطة F بأخذ 5 مرات القوس $\overset{\frown}{CD}$ انطلاقا من E (نحو الإتجاه الموجب)

2) **تصحيح** : تكتب مرة أخرى $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=\frac{\pi}{4}$

تعيين D بأخذ القوس $\overset{\frown}{AC}$ ثلاث مرات انطلاقا من C (نحو الإتجاه الموجب)

تعيين E بتنصيف القوس $\overset{\frown}{DD'}$ حيث D' نظيرة D بالنسبة للنقطة O

تعيين F بأخذ القوس $\overset{\frown}{EF'}$ مرتين انطلاقا من E نحو الإتجاه الموجب حيث EOF' مثلث متقايس الأضلاع (F' على يسار E)

تصحيح : في الفرعين 3) و 4) نأخذ كذلك $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=\frac{\pi}{4}$

نتبع نفس الطريقة لتحديد النقط D ; E ; F مع أخذ القيس الرئيسي $\frac{41\pi}{6}=6\pi+\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{17\pi}{4}=4\pi+\frac{\pi}{4}$

<u>النشاط الرابع :</u>

الهدف : تعيين الصور بمعرفة أطوال الأقواس مع مراعاة الإتجاه

1) - تعيين النقطة c باعتبار أن المثلث OAC متقايس الأضلاع (C على يمين A)
- تعيين النقطة D بتنصيف القوس $\overset{\frown}{DD'}$ حيث D' نظيرة D بالنسبة للنقطة O مرتين (مع مراعاة الإتجاه)
- تعيين النقطة E بأخذ القوس $\overset{\frown}{DE'}$ مرتين في الإتجاه السالب انطلاقا من D حيث ODE' مثلث متقايس الأضلاع و E' على يمين D
- تعيين النقطة F بتنصيف القوس $\overset{\frown}{EF'}$ باعتبار أن المثلث OEF' متقايس الأضلاع (F' على يمين E)
الفروع 2 – 3 – 4 بنفس الطريقة و أخذ الأقياس الرئيسية .

الأعمال الموجهة

أعمال موجهة (1) :

-1- المتراجحات المثلثية من الشكل $Cosx < a$

الهدف : حل متراجحات مثلثية

1) $a \le -1$ المتراجحة لا تقبل حلا و $a \ge -1$ المتراجحة محققة دوما لأن $-1 \le Cosx \le 1$ من أجل كل عدد حقيقي x

2) $-1 < a < 1$ يوجد عددان a و $(-a)$ حيث $Cos\,a = Cos(-a) = a$

$b = -a$ و بالتالي M نظيرة M' بالنسبة لمحور الفواصل

مجموعة النقط من الدائرة المثلثية و التي فواصلها أصغر من a هي نقط القوس $\overset{\frown}{MM'}$ (نحو الإتجاه الموجب)

حلول المتراجحة (1) هي $]a, 2\pi - a[$

تطبيق : $S_1 = \left]\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[$ ، $S_3 = \left[0, \frac{\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{\pi}{12}, \pi\right[$ ، $S_4 = \left[0, \frac{\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right[$

-2- $S_1 = \left]\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right[$ ، $S_2 = \left[0, \frac{\pi}{16}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{16}, \frac{\pi}{2}\right[$ ، $S_3 = \left]0, \frac{4\pi}{15}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right[$ ، $S_4 = \left]\frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{16}\right[$

أعمال موجهة (2) :

-1- معادلات من الشكل $Cosu = Sinv$

الهدف : حل المعادلات من الشكل $Cosu = Sinv$

* $S = \left\{\frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}, \frac{-\pi}{24} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

* تمثيل الصور $\frac{23\pi}{24}, -\frac{\pi}{24}, \frac{77\pi}{48}, \frac{53\pi}{48}, \frac{29\pi}{48}, \frac{5\pi}{48}$

-2- معدلات من الشكل : $aCosx + bSinx = c$

الهدف : حل معادلات من الشكل $aCosx + bSinx = c$

تطبيق : $S_1 = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ ، $S_2 = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ ،

$S_3 = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

-4 * $m < -2$ أو $m > 2$ ، S مجموعة خالية

* $-2 < m < 2$ نضع $\frac{m}{2} = Cos\,a$

التمارين

أصحيح أم خاطئ : من 1 إلى 8

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8
الحكم	خاطئ	خاطئ	صحيح	صحيح	صحيح	خاطئ	خاطئ	صحيح

أسئلة متعددة الاختيارات : من 9 إلى 16

رقم السؤال	9	10	11	12	13	14	15	16
الإجابة الصحيحة1	2	2	3	1	3	3	1	1

17

القيس x	القيس الرئيسي	أصغر قيس موجب	$A\hat{O}B$
$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$

$\frac{3p}{4}$	$\frac{5p}{4}$	$-\frac{3p}{4}$	$\frac{53p}{3}$
p	p	p	$\frac{2007p}{3}$
p	p	p	$493p$

18 $-\frac{p}{6}, -\frac{p}{2}, -\frac{2p}{3}, -\frac{p}{3}$

19 المثلث ABC قائم في C

20 $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{7p}{12}$

22 $M\left(\frac{p}{3}\right), N\left(\frac{3p}{4}\right), P\left(\frac{5p}{3}\right)$

24

25 نحسب y-x و يكون مضاعف $2p$

26

27

1. $a = \frac{14p}{3} \leftarrow \frac{2p}{3}$
2. $a = -\frac{35p}{2} \leftarrow \frac{p}{2}$
3. $a = \frac{721p}{5} \leftarrow \frac{p}{5}$
4. $a = \frac{2007p}{3} \leftarrow p$

28

1. القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right)$ هو $\left(\frac{5p}{6}\right)$
2. القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}\right)$ هو $\left(-\frac{2p}{3}\right)$
3. القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CB}\right)$ هو $\left(-\frac{p}{3}\right)$
4. القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{DO}\right)$ هو $\left(-\frac{p}{6}\right)$
5. القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}\right)$ هو $\left(-\frac{7p}{12}\right)$
6. القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}\right)$ هو $\left(\frac{7p}{12}\right)$

29

1. القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$ هو $\left(-\frac{3p}{8}\right)$
2. القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\right)$ هو $\left(-\frac{p}{4}\right)$
3. القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA}\right)$ هو (p)

4. القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD}\right)$ هو $\left(-\frac{p}{2}\right)$

30

5	4	3	2	1
$\frac{p}{2}$	$\frac{p}{2}$	$-\frac{p}{2}$	$\frac{p}{2}$	$-\frac{p}{2}$

31 1. $\left(\frac{p}{3}\right)$ 2. $\left(-\frac{p}{3}\right)$ 3. $\left(\frac{4p}{3}\right)$ يشطب التكرار 4. $\left(\frac{2p}{3}\right)$.

36 $A = \sin x - 2\cos x$

37 $A = 2\sin x$

38 $A = -\cos x$

39 $A = -2\cos x$

40 $A = -2\sin x$

41 $A = \tan x$

42
1. $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$
2. $\cos x - \sin x$
3. $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$
4. $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

43 2). $\cos\frac{5p}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 3). $\sin\frac{5p}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ بوضع : $\frac{7p}{12} = \frac{p}{4} + \frac{p}{3}$

45 3). باستعمال دساتير التحويل من النصف إلى الضعف.

50 2). $\sin x = -\frac{4}{5}$ ، $\sin(\frac{p}{2} - x) = \frac{3}{5}$ ، $\cos(\frac{p}{2} - x) = -\frac{4}{5}$ ، $\cos(p - x) = -\frac{3}{5}$ ، $\sin(p - x) = -\frac{4}{5}$

3). $\tan x = -\frac{4}{3}$ ، $\tan(\frac{p}{2} - x) = -\frac{3}{4}$ ، $\tan(p - x) = \frac{4}{3}$

54 1). قيم x المرفقة للنقطة M هي: $x = \frac{p}{3} + 2kp$ ، قيم x المرفقة للنقطة N هي: $x = -\frac{p}{3} + 2kp$

2). إضافة العبارة : $\cos x = \frac{1}{2}$ الاستنتاج : $-\frac{p}{3} + 2kp$ أو $x = \frac{p}{3} + 2kp$

56 1). $x = \frac{p}{6}$ أو $x = \frac{11p}{6}$ ، 2). $x = \frac{3p}{4}$ أو $x = \frac{5p}{4}$ ، 3). $x = \frac{p}{4}$ أو $x = \frac{3p}{4}$ ، 4). $x = \frac{3p}{2}$

57 1). $x = \frac{p}{3}$ أو $x = -\frac{p}{3}$ ، 2). $x = \frac{5p}{6}$ أو $x = -\frac{5p}{6}$ ، 3). $x = -\frac{p}{6}$ أو $x = -\frac{5p}{6}$ ، 4). $x = -\frac{p}{4}$ أو $x = -\frac{3p}{4}$

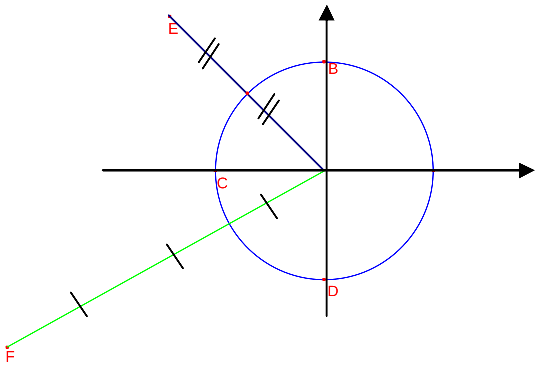
61 بوضع: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ و sinx = y .

62 بوضع: $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$

63 بملاحظة أن: $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

64

الإحداثيات القطبية



65 تصحيح: عوض $B\left(2;\frac{p}{2}\right)$ نكتب $B\left(2;\frac{p}{6}\right)$

66 ملاحظة: الدائرة الوسطى غير مضبوطة على الرسم.

$A\left(2;\frac{p}{3}\right)$ ، $B\left(3;\frac{p}{4}\right)$ ، $C\left(4;\frac{5p}{6}\right)$ ، $D\left(4;-\frac{p}{3}\right)$ ، $A'\left(2;\frac{2p}{3}\right)$ ، $B'\left(4;\frac{4p}{3}\right)$ ، $D'\left(2;-\frac{p}{6}\right)$

67

.1 $OM = 1$ ، $ON = 2\sqrt{2}$

.2 القيس الرئيسي لـ $(\vec{I};\overrightarrow{OM})$ هو $-\frac{p}{3}$ ، القيس الرئيسي لـ $(\vec{I};\overrightarrow{ON})$ هو $\frac{p}{4}$

.3 القيس الرئيسي لـ $(\vec{J};\overrightarrow{OM})$ هو $-\frac{5p}{6}$ ، القيس الرئيسي لـ $(\vec{J};\overrightarrow{ON})$ هو $-\frac{p}{4}$

.4 $M\left(1;-\frac{p}{3}\right)$ ، $N\left(2\sqrt{2};\frac{p}{4}\right)$

69

8	7	6	5	4	3	2	1
$H\left(\frac{1}{4};0\right)$	$G\left(-\frac{7}{4};0\right)$	$F\left(-2\sqrt{3};2\right)$	$E(-2;-2)$	$D\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$	$C\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$	$B(0;2)$	$A(1;0)$

70 $C\left(2\sqrt{2};\frac{7p}{12}\right)$

71 باستعمال العلاقة: 1). $2\cos^2 x = 1+\cos 2x$ 2). $\cos\frac{p}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{p}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

73 بملاحظة أن: $\frac{7p}{8} = p - \frac{p}{8}$ و $\frac{5p}{8} = p - \frac{3p}{8}$

74 1). $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، 2). $x = \frac{p}{12}$

75 1). $\cos 2x = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ، $\sin 2x = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ ، 3). بوضع : $\sin x = \cos(\frac{p}{2} - x)$ ، $x = \frac{p}{10}$

78 1). وضع $\sin x = y$ ، 2). وضع $\cos x = y$ ، 3). وضع $\cos x = y$ $\Delta = \left(1+\sqrt{3}\right)^2$

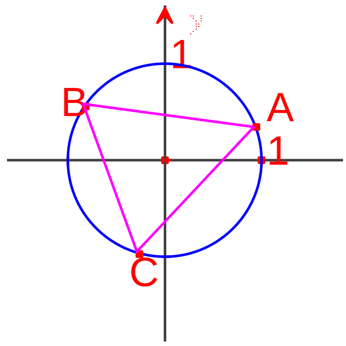
78 1). باستعمال دساتير الجمع ، 2). $f'(x)=\sin x+\sin(x+\frac{2p}{3})+\sin(x+\frac{4p}{3})$

3). بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=0$ (الدالة المعدومة) فإنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=0$

أي: $\sin x+\sin(x+\frac{2p}{3})+\sin(x+\frac{4p}{3})=0$

80 عوض لتكن النقطة $A(1;a)$ ذات الإحداثيات القطبية نكتب لتكن النقطة A ذات الإحداثيات القطبية $(1;a)$

1).



2). صورة C هي A

5). نستنتج أن: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ ، $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\cos(a+\frac{2p}{3})\\ \sin(a+\frac{2p}{3})\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}\cos(a+\frac{4p}{3})\\ \sin(a+\frac{4p}{3})\end{pmatrix}$

و باستعمال العلاقة الشعاعية السابقة نستنتج أن: $\cos a+\cos(a+\frac{2p}{3})+\cos(a+\frac{4p}{3})=0$

و $\sin a+\sin(a+\frac{2p}{3})+\sin(a+\frac{4p}{3})=0$

81 1). $E(x)=\cos^2 x.\sin^2 x$ ، 2). $x=\frac{p}{2}+kp$ أو $x=kp$ ،

3). $D_f=R-\left\{\frac{p}{2}+kp;kp;k\in Z\right\}$ ، $f(x)=1$

82 1). $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ ، $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

2). $D_A=D_B=R-\left\{\frac{p}{2}+kp;kp;k\in Z\right\}$ ، $A=4\cos 2x$ ، $B=2$

ملاحظة : ترقيم الفرع الثاني ، 2. بسط العبارتين التاليتين.

83 .1 $A(x)=\cos x(2\cos x+1)$ .2 $B(x)=\sin x(2\sin x+1)$

.3 $C(x)=\cos\frac{x}{2}(2\cos\frac{x}{2}+1)$ .4 وضع $D(x)$ بدل $B(x)$ $D(x)=\sin\frac{x}{2}(2\sin\frac{x}{2}+1)$

85 بضرب طرفي الكسر بالعدد : $(\cos\frac{p}{8}+\sin\frac{p}{8})$

86 2). $\frac{3}{2}$

87 باستعمال العلاقتين: $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ و $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

88 1). $(\vec{i};\overrightarrow{oc})=-\frac{p}{6}$ ملاحظة ترميز قيس الزاوية الموجهة $(\vec{i};\overrightarrow{oc})$ بدل $(\vec{i};\overrightarrow{oc})$.

2). $c\left(2;-\frac{p}{6}\right)\leftarrow c(\sqrt{3};-1)$ ، 3). $A(1;\sqrt{3})$ ، 4). $B(\sqrt{3}+1;\sqrt{3}-1)$

5). $OB = 2\sqrt{2}$ ، $(\vec{i};\vec{oB}) = \frac{3p}{12}$ ، $B\left(2\sqrt{2};\frac{p}{12}\right)$ ، 6). $\cos\frac{p}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ، $\sin\frac{p}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

89

1). $x = \frac{p}{3}$ أو $x = \frac{2p}{3}$ ، $x \in \left[0;\frac{p}{3}\right[\cup \left]\frac{2p}{3};2p\right[$ ، 2). $S = \{\ \}$

3). $x = -\frac{p}{4}$ أو $x = -\frac{3p}{4}$ ، $x \in \left[-\frac{3p}{4};-\frac{p}{4}\right]$ ، 4). $x = \frac{p}{4}$ $x \in \left]\frac{p}{4};\frac{p}{2}\right[$

5). $x = \frac{p}{12}$ أو $x = \frac{7p}{12}$ ، $x \in \left[\frac{p}{12};\frac{7p}{12}\right]$ ، 6). $x = \frac{13p}{24}$ أو $x = \frac{5p}{24}$ ، $x \in \left[0;\frac{5p}{24}\right[\cup \left]\frac{13p}{24};p\right]$

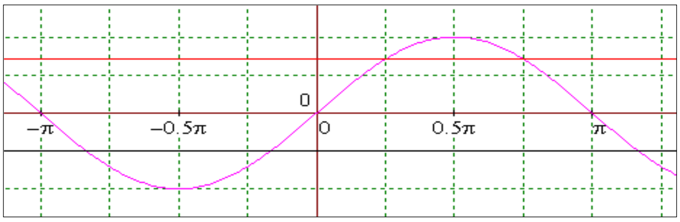
7). $x = \frac{13p}{30}$ أو $x = \frac{17p}{30}$ ، $x \in \left[0;\frac{13p}{30}\right] \cup \left[\frac{17p}{30};p\right]$

90

2). $x_A = -\frac{p}{6}$ ، $x_B = -\frac{5p}{6}$

3). $x_C = \frac{p}{4}$ ، $x_D = \frac{3p}{4}$

4). $S = \left[-p;-\frac{5p}{6}\right] \cup \left[-\frac{p}{6};\frac{p}{4}\right] \cup \left[\frac{3p}{4};p\right]$



92

1). $S = \left\{p;\pm\frac{2p}{5};\pm\frac{4p}{5}\right\}$

2). $\sin 3x = -\sin 2x$ يكافئ $\sin x.(4\cos^2 x - 1) = -2\sin x.\cos x$

يكافئ $\sin x.(4\cos^2 x - 1 + 2\cos x) = 0$

يكافئ $\sin x = 0$ أو $(4\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0$

بوضع: y = cosx و حل معادلة من الدرجة 2 نجد: $S = \left\{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right\}$ ومنه: $\cos\frac{2p}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ و $\cos\frac{4p}{5} = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$

94

1). $A(2;0)$ ، $B(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ ، $I\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 2). OAB متساوي الساقين ، $(\vec{i};\vec{oI}) = \frac{3p}{8}$

3). $I\left(\sqrt{2-\sqrt{2}};\frac{3p}{8}\right)$ 4). $\cos\frac{3p}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

95

1). $S_{OAM} = \frac{1}{2}\sin a$ ، 2). $S_{\overline{OAM}} = \frac{1}{2}a$ ، 3). $S_{OAP} = \frac{1}{2}\tan a$

4). من $S_{OAM} < S_{\overline{OAM}} < S_{OAP}$ ينتج $\sin a < a < \tan a$

96

1). $(\vec{OA};\vec{OB}) = \frac{2p}{5}$ ، $(\vec{OA};\vec{OC}) = \frac{4p}{5}$ ، $(\vec{OA};\vec{OD}) = \frac{6p}{5}$ ، $(\vec{OA};\vec{OE}) = \frac{8p}{5}$.

4). موع مركز ثقل الخماسي ABCDE ينطبق على O .

5). من العلاقة الشعاعية: $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}+\vec{OE} = \vec{0}$ لأن O مركز ثقل الخماسي ABCDE .

ينتج: $1+\cos\frac{2p}{5}+\cos\frac{4p}{5}+\cos\frac{6p}{5}+\cos\frac{8p}{5} = 0$

بما أن: $\frac{8p}{5} = 2p - \frac{2p}{5}$ ، $\frac{6p}{5} = 2p - \frac{4p}{5}$ إذن: $1 + 2\cos\frac{2p}{5} + 2\cos\frac{4p}{5} = 0$

6). $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$ بملاحظة أن: إذن: $\cos\frac{2p}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$