

الكفاءات المستهدفة

- حساب نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$.
- معرفة نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$.
- حساب نهاية دالة ناطقة عند عدد a حيث حد لمجموعة تعريف هذه الدالة.
- التفسير البياني لنهاية غير منتهية لدالة عندما يؤول x إلى x_0 .
- معرفة شرط وجود مستقيم مقارب يوازي أحد محوري المعلم.
- تبرير أن مستقيما معلوما هو مستقيم مقارب. البحث عن مستقيم مقارب مائل.
- استعمال النظريات الأولية (المجموع، الجداء، المقلوب و حاصل القسمة) لحساب نهايات.
- حساب نهايات بإزالة عدم التعيين.

✓ بعد تقديم دراسة نهايات دالة عند أطراف مجموعة تعريفها يبقى الهدف الأساسي من هذا الفصل إتمام تكوين المتعلم و جعله أكثر استقلالية فيما يخص الدراسة التامة لدالة انطلاقا من عبارتها الجبرية ثم تمثيلها بيانيا و ذلك من خلال دراسة الدوال المنصوص عليها في البرنامج و هي الدوال كثيرات الحدود و الدوال الناطقة البسيطة.

✓ يتم كذلك في هذا الفصل دراسة السلوك التقاربي لمنحني دالة من خلال تعيين المستقيمات المقاربة له (إن وجدت) و الموازية لمحور الفواصل أو محور الترتيب انطلاقا من حساب النهايات و كذلك تعيين المستقيم المقارب المائل (إن وجد) إما بعملية البحث عليه أو استنتاجه انطلاقا من العبارة الجبرية للدالة.

الأنشطة

النشاط 1 :

الهدف : نهاية غير منتهية لدالة عند عدد.

(1)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$			

(2)

x	2.9	2.99	2.999	2.9999
$f(x)$	10^2	10^4	10^6	10^8
x	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	10^8	10^6	10^4	10^2

(3) كلما اقترب x من 3 إلا و أخذ $f(x)$ قيمة كبيرة جدا.

(4) إذا أخذنا مثلا $3 < x \leq 3 + 10^{-4}$ فإن

$$\frac{1}{(x-3)^2} \geq 10^8 \text{ و } 0 < (x-3)^2 \leq 10^{-8}$$

(5) إذا كان $3 - \frac{1}{\sqrt{A}} \leq x \leq 3 + \frac{1}{\sqrt{A}}$ مع $x \neq 3$ فإن

$$0 < |x-3| \leq \frac{1}{\sqrt{A}} \text{ و منه } 0 < (x-3)^2 \leq \frac{1}{A} \text{ و بالتالي}$$

$$f(x) \geq A$$

النشاط 2 :

الهدف : نهاية غير منتهية لدالة عند عدد من اليمين (اليسار).

(1)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	-		-
$g(x)$			

(2)

x	0.9	0.99	0.999	0.9999
$g(x)$	-10	-100	-1000	-10^4
x	1.0001	1.001	1.01	1.1
$g(x)$	10^4	1000	100	10

(3) كلما اقترب x من 1 فإن $|f(x)|$ تأخذ قيمة كبيرة أكثر فأكثر.

(4) بفرض $1 < x \leq 1 + 10^{-10}$ يكون $0 < x - 1 \leq 10^{-10}$

و منه $g(x) \geq 10^{10}$.

(5) يكفي تعويض، في البرهان السابق، 10^{10} بـ A .

النشاط 3 :

الهدف : نهاية غير منتهية عند مالانهاية.

(3) نلاحظ أن $k(x)$ تأخذ قيمة كبيرة جدا أكثر فأكثر كلما

اقترب x من العدد 1.

(4) $x^2 \geq A$ يعني $x \leq -\sqrt{A}$ أو $x \geq \sqrt{A}$ و بالتالي

يكفي أخذ $B = \sqrt{A}$.

النشاط 4 :

الهدف : نهاية منتهية عند مالانهاية.

(1) $a = 2$ و $b = 1$.

(2)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-		-
$h(x)$			

(3)

x	-10	-10^3	-10^5	-10^7
$h(x)$	1.9	1.999	1.999999	1.9...
x	10	10^3	10^5	10^7
$h(x)$	2.1	2.001	2.00001	2.00...

(4) نلاحظ أنه كلما أخذت $|x|$ قيمة كبيرة أكثر فأكثر فإن

$h(x)$ تقترب من العدد 2.

(5) بفرض $x \geq 10^6$ يكون $0 < \frac{1}{x} \leq 10^{-6}$ و بالتالي:

$$2 < 2 + \frac{1}{x} \leq 2 + 10^{-6}$$

(6) $2 < h(x) \leq 2 + e$ يعني $x \geq \frac{1}{e}$. نأخذ $B = \frac{1}{e}$.

النشاط 5 :

الهدف : نهاية منتهية عند عدد.

(1)

x	1.997	1.998	1.999
$f\left(x\right)$	2.997	2.998	2.999
x	2.001	2.002	2.003
$f\left(x\right)$	3.001	3.002	3.003

(2) نلاحظ: كلما اقترب x من 2 إلا و اقترب $f(x)$ من 3

(3) من أجل $x \neq 2$ ، $f(x) = x + 1$

(4) $0 \leq |f(x) - 3| < e$ يعني $0 \leq |x - 2| < e$ و بالتالي

يكفي أخذ $a \leq e$.

الأعمال الموجهة

دراسة دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة:

الهدف: التعرف على خواص دالة كثير حدود من الدرجة 3

المثال: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 (1 - 3/x^2 + 1/x^3)$

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$						

$-\infty$

3

$-\infty$

-1

3

-1

$+\infty$

$+\infty$

$-\infty$

3

$-\infty$

-1

3

-1

$+\infty$

$+\infty$

$-\infty$

3

$-\infty$

-1

3

-1

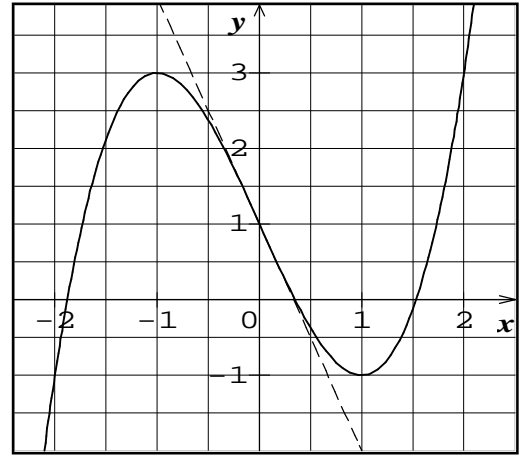
$+\infty$

$+\infty$

(Δ): $y = -3x + 1$

$$[f(x) - (-3x + 1)] = x^3$$

x	-1	0	+1
$f(x) - y$	-	0	+



قواعد تغيير المعلم: $x = X$ و $y = Y + 1$

النقطة $\Omega(0,1)$ مركز تناظر للمنحني (C_f).

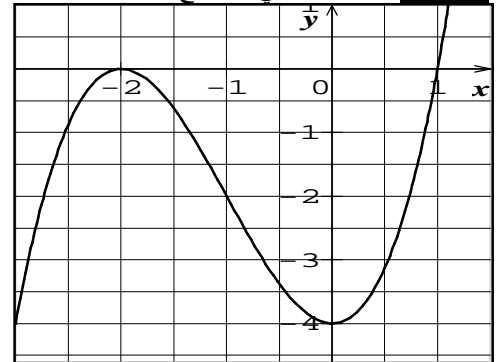
نبين أن $f(0.3) \times f(0.4) < 0$

0.4 و 0.3 هما قيمتان مقربتان للعدد a .

لدينا: $f(1.5) \times f(1.6) < 0$ و بالتالي

$1.5 < b < 1.6$ قيمة مقربة إلى 0.1 بالنقصان b .

التطبيق: فاصلتنا نقطتي التقاطع هما -2 و 1.



مركز التناظر هي النقطة $(-1, -2)$

دراسة دالة تناظرية:

الهدف: التعرف على منحني دالة تناظرية و خواصه

التعريف: إذا كان $c = 0$ و $d \neq 0$ فإن f دالة تآلفية.



إذا كان $ad - bc = 0$ فإن f دالة ثابتة.

$$D_f =]-\infty, -\frac{d}{c}[\cup]-\frac{d}{c}, +\infty[$$

المثال:

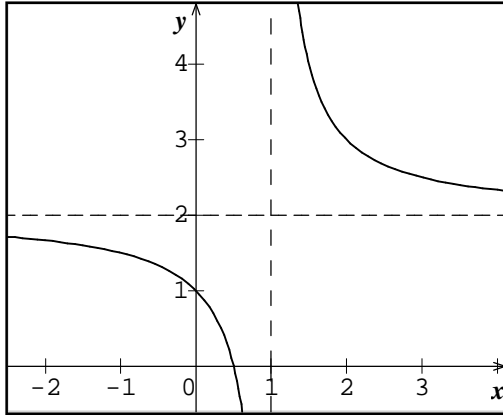
$$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$b = 1$ و $a = 2$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	2  $-\infty$		$+\infty$  2

المستقيمان المقاربان: $x = 1$ و $y = 2$

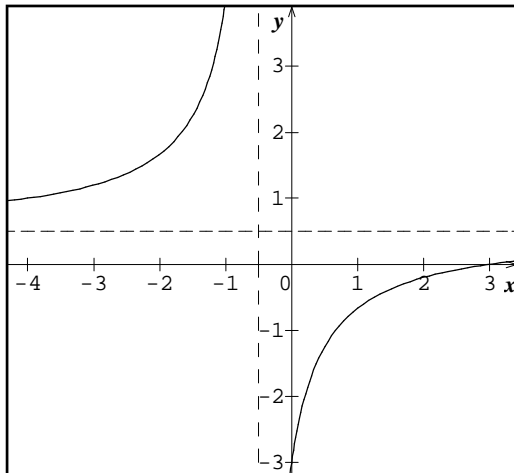
$f'(x) = -1$ يعني $x = 0$ أو $x = 2$.



قواعد تغيير المعلم: $x = X + 1$ و $y = Y + 2$

معادلة (C_f) بالنسبة إلى المعلم $(\Omega; i, j)$ هي $Y = \frac{1}{X}$

التطبيق:



مركز التناظر هي النقطة $(-0.5, 0.5)$

تمارين

1 صحيح.

2 صحيح.

3 صحيح.

4 خطأ.

5 خطأ.

6 (3)

7 (2)

8 (3)

9 (3)

10

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$D_f = \mathbb{R}^* \quad 11$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$D_f = [-2, 1[\cup]1, +\infty[\quad 12$$

$$f(-2) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

13 تصحيح:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} k(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

المنحنى الأول يمثل الدالة h .

المنحنى الثاني يمثل الدالة k .

المنحنى الثالث يمثل الدالة g .

المنحنى الرابع يمثل الدالة f .

$$1 \quad (2) \quad -\frac{1}{5} \quad (1) \quad 14$$

$$-\infty \quad (4) \quad +\infty \quad (3)$$

$$.9 \quad (2) \quad 9 \quad (1) \quad 15$$

$$.+\infty \quad (4) \quad +\infty \quad (3)$$

$$.1 \quad (3) \quad 0 \quad (2) \quad 0 \quad (1) \quad 16$$

$$+\infty \quad (6) \quad -\infty \quad (5) \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

$$.\sqrt{3} \quad (2) \quad .0 \quad (1) \quad 17$$

$$.+\infty \quad (4) \quad .3 \quad (3)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (1) \quad 18$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad (3)$$

$$.+\infty \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (1) \quad 19$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad (1) \quad 20$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (1) \quad 21$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = -\infty$$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad (1)$$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (2)$$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

(3) لا يمكن حساب النهاية.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \quad (4)$$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

(5) لا يمكن حساب النهاية.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (6)$$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad (7)$$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (8)$$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad (9)$$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (10)$$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad (1) \quad (26)$$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الترتيب.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \quad (2)$$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الترتيب.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \quad (3)$$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الترتيب.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \quad (4)$$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الترتيب.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \quad (5)$$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الترتيب.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad (6)$$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الترتيب.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \quad (7)$$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الترتيب.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \quad (8)$$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الترتيب.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (1) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \times g(x)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \times g(x)) = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \times g(x)) = 2 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (1) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = +\infty \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad (1) \quad (24)$$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (2)$$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad (3)$$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3 \quad (4)$$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad (5)$$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3 \quad (6)$$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad (7)$$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

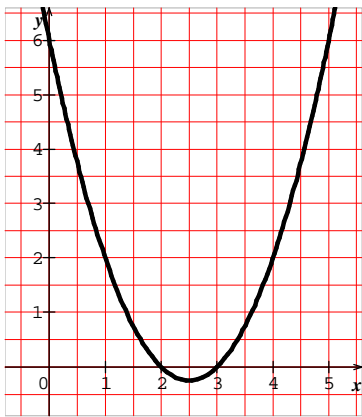
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \quad (8)$$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

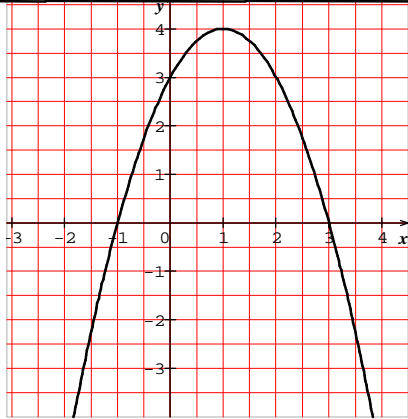
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (9)$$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

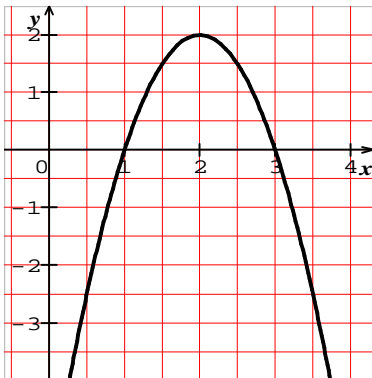
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -4 \quad (10)$$



x	-	1	+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="text-align: center;">4</div> </div>		



x	$-\infty$	2	$-\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="text-align: center;">2</div> </div>		



(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ (27)

منحنی f یقبل مقارب موازي لمحور الترتیب.

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

منحنی f یقبل مقارب موازي لمحور الترتیب.

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$

منحنی f یقبل مقارب موازي لمحور الترتیب.

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

منحنی f یقبل مقارب موازي لمحور الترتیب.

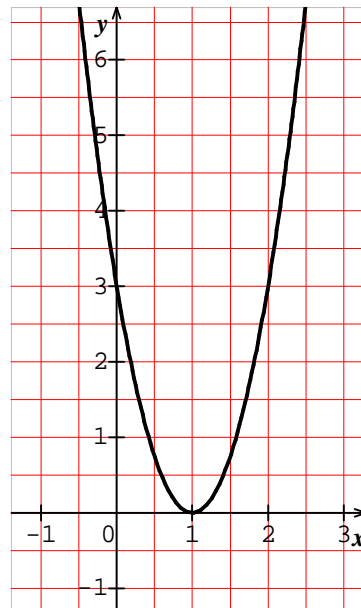
(5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

منحنی f یقبل مقارب موازي لمحور الترتیب.

(3)

x	-	1	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="text-align: center;">0</div> </div>		

(1) (28)



(4)

x	-	$\frac{5}{2}$	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="text-align: center;">$-\frac{1}{4}$</div> </div>		

(2)

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما
X=0 و y=0

x	-∞	0	+∞
f'(x)	+		+
f(x)	∞-	∞+	∞+

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما
X=0 و y=1

x	-∞	5	+∞
f'(x)	-		-
f(x)	2	∞+	2

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما
X=5 و y=2

x	-∞	2	+∞
f'(x)	-		-
f(x)	0	∞+	0

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما
X=2 و y=0

x	-∞	0	+∞
f'(x)	+		+
f(x)	1	∞+	1

بمأن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y) = 0$$

فإن: (Δ) مستقيم مقارب لمنحنى الدالة f.

(2)

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-			-	0	+
$f(x)$		$\frac{647}{169}$				$+\infty$		$+\infty$
	$\infty-$			$-\infty$			$\frac{373}{204}$	

X	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{367}{265}$	$\frac{163}{265}$	$+\infty$	

أولا نغير رمز النقطة ليصبح مثلا 0 ثم نتبع
طريقة تغيير المعلم: بحيث نكتب معادلة (C_f)
في المعلم (w ; l ; j) و تصبح:

Y=y+1 و X=x+0 حيث: F(X)=X³-X
و في الأخير نثبت أن F دالة فردية

(2)

X	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{19}{3}$	$-\frac{13}{3}$	$+\infty$	

إثبات المركز يتم بنفس الطريقة السابقة.

(3)

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

إثبات المركز يتم بنفس الطريقة السابقة.

(1) 30

x	-∞	-1	+∞
f'(x)	+		+
f(x)	2	∞+	2

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما
X=-1 و y=2

(2)

x	-∞	0	+∞
f'(x)	+		-
f(x)	0	∞+	0

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(1) 35

تستخدم الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من النتائج.

(2)

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{28}{9}$	-3	12	$+\infty$

تستخدم الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من النتائج.

(3)

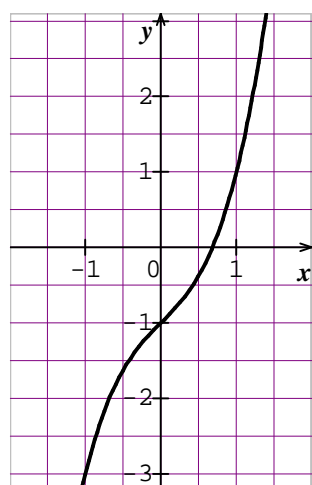
x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-9	7	-9	$+\infty$

تستخدم الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من النتائج.

(4)

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\infty$

تستخدم الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من النتائج.



(1) 36

نفس الطريقة لإثبات المقارب المائل.

(3)

x	$-\infty$	$-\frac{169}{408}$	1	$\frac{408}{169}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{169}{204}$	$+\infty$	$-\frac{816}{169}$	$+\infty$

نفس الطريقة لإثبات المقارب المائل.

(4)

x	$-\infty$	$\frac{239}{408}$	2	$\frac{577}{169}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{239}{204}$	$+\infty$	$-\frac{1154}{169}$	$+\infty$

نفس الطريقة لإثبات المقارب المائل.

32

المنحنى الأول يمثل الدالة f .

المنحنى الثاني يمثل الدالة g .

المنحنى الثالث يمثل الدالة h .

المنحنى الرابع يمثل الدالة k .

المنحنى الخامس يمثل الدالة l .

المنحنى السادس يمثل الدالة m .

$$-\frac{1}{2} \quad (3) \quad 0 \quad (2) \quad 1 \quad (1) \quad 33$$

$$.12 \quad (6) \quad 4 \quad (5) \quad \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \quad (7)$$

$$\cdot \frac{1}{12} \quad (9) \quad 3 \quad (8)$$

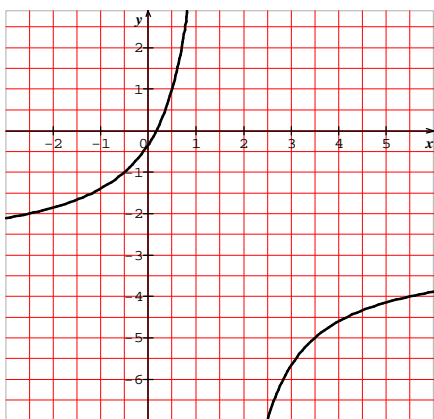
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \quad (11)$$

$$+\infty \quad (3) \quad -\infty \quad (2) \quad 0 \quad (1) \quad 34$$

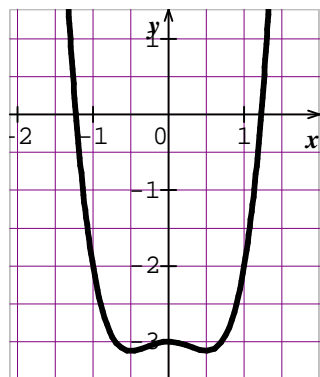
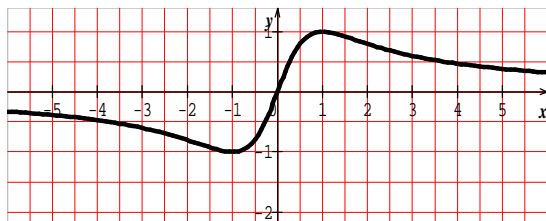
$$0 \quad (6) \quad -\frac{3}{4} \quad (5) \quad 0 \quad (4)$$

$$+\infty \quad (8) \quad \frac{1}{2} \quad (7)$$

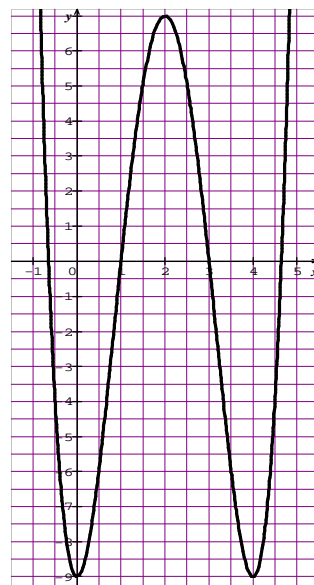


(2)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-1	1	$-\infty$	



(2)



(3)

الأجزاء (3) (4) (5) (6) (7) يتم الإجابة عليها بنفس الطريقة.

38 (1) ليكن x عدد حقيقي من D :

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}}$$

(2) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D :

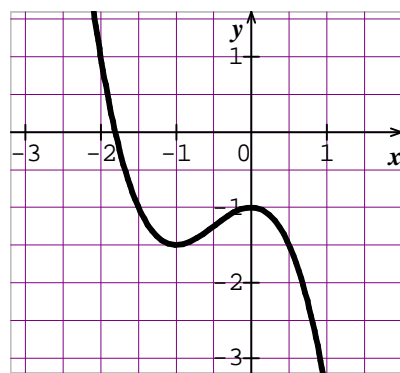
$$\frac{3}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} > 0 \quad \text{و} \quad \sqrt{x+3} + \sqrt{x} > 0 \quad (1)$$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x} > \sqrt{x} \quad \text{و} \quad \sqrt{x+3} > 0$$

$$\frac{3}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} < \frac{3}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x

$$0 \leq f(x) \leq \frac{3}{\sqrt{x}} \quad \text{من } D$$



(4)

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	3	$+\infty$	3

(1) 37

(3) بمأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$ فإن:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

(1) 39

x	10^4	10^6	10^{10}
f(x)	1,01	1	1
x	10^{12}	10^{20}	10^{40}
f(x)	1	1	1

(2) لدينا من أجل العدد الحقيقي x الموجب تماما:

$$x^2 \leq x^2 + x + 1 \text{ و } x^2 + x + 1 \leq x^2 + 2x + 1$$

أي

$$x^2 \leq x^2 + x + 1 \leq (x+1)^2$$

و منه:

$$x \leq \sqrt{x^2 + x + 1} \leq x + 1$$

(3) لدينا من أجل العدد الحقيقي x الموجب تماما:

$$x \leq \sqrt{x^2 + x + 1} \leq x + 1$$

بحساب مقلوب العبارة نجد:

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \leq \frac{1}{x}$$

بضرب النتيجة بـ $x + \sqrt{x}$ مع التبسيط نجد:

$$1 - \frac{1}{x+1} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

(4) بمأن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{1+x} = 1$$

فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

(40) لدينا من أجل العدد الحقيقي x من D:

$$-1 \leq \sin x \leq +1$$

$$2 \leq 3 + \sin x \leq 4$$

بالقسمة على x نجد:

$$\frac{2}{x} \leq f(x) \leq \frac{4}{x}$$

(2) بمأن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$$

فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

(1) 41 لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D:

$$-1 \leq \sin x \leq +1$$

$$x^2 - 1 \leq x^2 + \sin x \leq x^2 + 1$$

بالقسمة على x نجد:

$$\frac{x^2 - 1}{x} \leq f(x) \leq \frac{x^2 + 1}{x}$$

(2) بمأن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x} = +\infty$$

فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$0 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}} \quad (1) \quad 42$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

لا يمكن حساب النهاية لما x يؤول إلى $+\infty$.

$$\frac{-x}{x^2 + 3} \leq f(x) \leq \frac{x}{x^2 + 3} \quad (2)$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2 + 3} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 3} = 0$$

بنفس الطريقة يتم الإجابة على (3) و (4).

(1) 43 بمأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معدلته $y=3$.

(2) حسب إشارة الفرق $f(x) - y$:

لما $x \in]1, +\infty[$ فإن (C_f) يقع أعلى (D).

لما $x \in]-\infty, 1[$ فإن (C_f) يقع أسفل (D).

$$a=-2, \quad b=3 \quad (1) \quad 44$$

إجابة السؤالين (2) و (3) مثل التمرين 43.

(1) 45 بمأن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0$$

فإن: (C) يقبل (D) كمستقيم مقارب.

(2) دراسة إشارة الفرق: $f(x) - y$.

$$a=2, \quad b=6, \quad c=17 \quad (1) \quad 46$$

نفس الطرق السابقة للإجابة على (2)

(1) 47 الدالة h هي التي توفر الشروط السابقة.

(2) لا يمكن تعيين قيمة a من أجل $x=1$

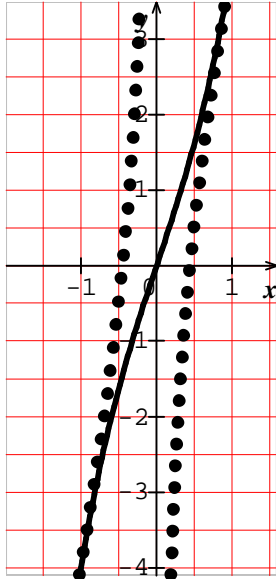
(6) النقطتان المتناظرتان بالنسبة للنقطة S هما:
(4, 0) و (-2, -6)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(1) 51

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

(2)



(3) (d) $y=5x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-\frac{1}{x}$	+		-
الوضعية	(C_g) فوق المستقيم		(C_g) تحت المستقيم

$$(C_f) \cap (C_g) = \{(-1, -4), (1, 4)\}$$

(1) 52 سبق كيفية إثبات وجود مستقيم مقارب مائل
و دراسة الوضعية النسبية.

(C) الدالة k هي التي تمثلها البياني (C).

$$(C_f) \cap (d) = \{ \}$$

$$(C_f) \cap (xx') = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, 0 \right) \right\}$$

$$(C_f) \cap (yy') = \{(0, 1)\}$$

(1) المستقيم المقارب المائل معادلته $y=x-2$

المستقيم المقارب العمودي معادلته $x=-2$

$$(C_f) \cap (C_g) = \{(-3, -9)\}$$

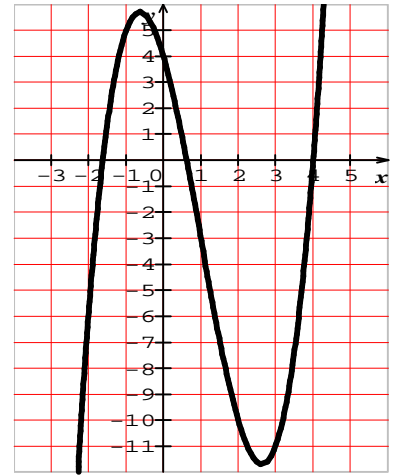
49

(1) 50

x	$-\infty$	$-\frac{188}{297}$	$\frac{495}{188}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{491}{86}$	$-\frac{1007}{86}$	$+\infty$

(2) سبق التطرق إلى كيفية إثبات مركز التناظر.

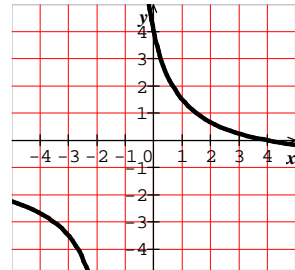
(3)

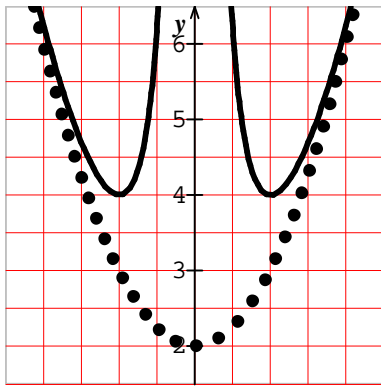


(4)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-
$f(x)$	-1	$+\infty$

(5)





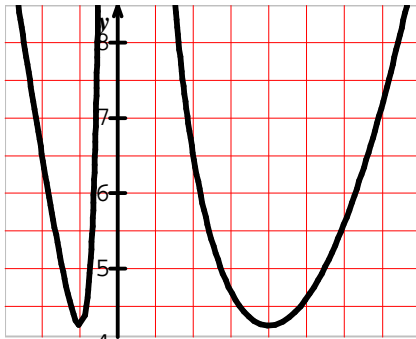
(6)

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{2}\right)^2 \quad (1)$$

54

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{17}{2}$	$+\infty$	$\frac{17}{2}$	$+\infty$	

(2)



(3)

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	2	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	+	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{134}{65}$		$\frac{134}{65}$	$+\infty$	

(4)

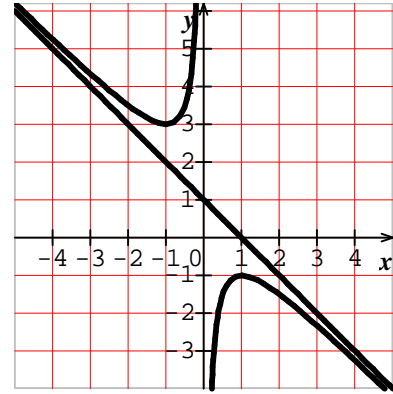
(5) المسافة AM ممثلة بالدالة g و تكون لها قيمة
(6) يتعامد المماس لـ (H) في النقطة M₁ والمستقيم (AM₁) إذا كان جداء معاملي توجيههما يساوي

$$-1 \text{ و هذا محقق لأن: } -\frac{1}{4} \times 4 = -1$$

نفس الشيء بالنسبة للحالة الثانية.

(2)

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$		-1	
		↘	↗	↗	↘	
		3			$-\infty$	$-\infty$



(3) لما $m \in]-1, 1[$ لا يوجد حلول.

لما $m = -1$ حل مضاعف $x = 1$.

لما $m = 1$ حل مضاعف $x = -1$.

لما $m \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ يوجد حلين.

$$I\left(\frac{-m+1}{2}, m\right) \quad (4)$$

(5) المماس يوازي محور الفواصل معناه:

$$f'(x_0) = 0 \text{ ومنه:}$$

$$A(-1, 3), B(1, -1)$$

A، B و I في استقامة معناه:

\vec{AB}, \vec{AI} متوازيان. و هذا محقق.

53

(1) ليكن $x \in D$ و $-x \in D$:

لدينا $f(-x) = f(x)$ إذن f زوجية.

(2)

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	$\frac{9}{2}$	$+\infty$

(3) معادلة المستقيم المقارب هي: $x = 0$.

$$MN = \frac{1}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} MN = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} MN = 0$$

(5) (C) يقع أعلى (P).

ب/ دراسة الوضعية تتم كما سبق.

55

(1) لدينا: $f(x) - 1 = \frac{u(x)}{x^2}$ 63

و كذلك: $0 \leq \frac{u(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x}$

و منه: $|f(x) - 1| \leq \frac{1}{x}$

(2) بمأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	0	-
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{1}{4}$	$+\infty$	

(1) $D_f = \hat{A}$ 56

(2) انطلاقاً من $-1 \leq \cos x \leq +1$ يمكن حصر $f(x)$ ثم الإجابة على السؤال (3).

(1) $x=1$, $y=-2$, $y=3$ 57

(2) يتم الرسم.

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 64

(2) من أجل نل عدد حقيقي x:

$f'(x) = x^2 - x - 2$

لما $f'(x) > 0$: فإن $x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

لما $f'(x) < 0$: فإن $x \in]-1, 2[$

(3)

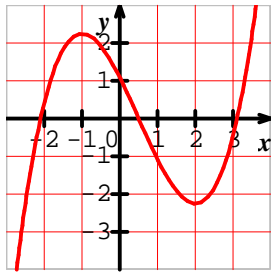
X	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{17}{12}$	$\frac{27}{12}$	$+\infty$	

(4) تم التطرق لإثبات مركز التناظر.

(5) للمعادلة $f(x)=0$ ثلاث حلول هي:

$x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1+3\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{1+3\sqrt{3}}{2}$

(6)



(7) سبق التعرض لمثل هذا السؤال.

(1) نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x: 65

$x \in \mathbb{R}$ و $f(-x) = -f(x)$ إذن f فردية.

$f(x + 2\pi) = x + 2\pi - \sin x$

$f(x + 4\pi) = x + 4\pi - \sin x$ (2)

$f(x + k2\pi) = x + k2\pi - \sin x$

(1) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ 58

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$

ب/ $x=1$ معادلة المقارب العمودي.

(3) تصحيح: $x \neq 1$

$a=-1$, $b=0$, $c=-2$

(4) معادلة المقارب المائل هي: $y=x-1$

$(C) \cap (d) = \{(0, 1), (2, 3)\}$ (5)

(1) $j(h) = h^2 + 3h + 1$ 59

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h(x) = 1$

60 تصحيح: المقام هو: $x+2$

(1)

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$

(2) $a=2$, $b=-1$, $c=3$

(3) $y=2x-1$

(4) يمكن التحقق من ذلك.

(5) يتم دراسة الوضعية كما سبق.

(1) $a=1$, $b=0$, $c=2$, $d=-1$ 61

(2) $x=1$, $x=-1$, $y=x$

(3) دراسة الوضعية تم التطرق لها سابقاً.

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ 62

(C) يقبل مستقيم مقارب معادلته: $y=2$

(2) $a=2$, $b=-3$, $c=-1$

$$D = \hat{A} - \{1, -1\} \quad (1) \quad 67$$

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2 - 18x}{(x^2 - 1)^2} \quad (5)$$

$$P(x) = x(x-3)(x^2 + 3x + 6)$$

x	$-\infty$	-1	0	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$-\infty$	-9	$-\infty$	$\frac{9}{2}$	$+\infty$	

$$D = \mathbb{R} \quad (1) \quad 68$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \quad \text{لما } x \in [0, +\infty[\text{ فإن:}$$

$$f(x) = \frac{x}{1-x} \quad \text{لما } x \in]-\infty, 0] \text{ فإن:}$$

(2) f دالة فردية.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad (3)$$

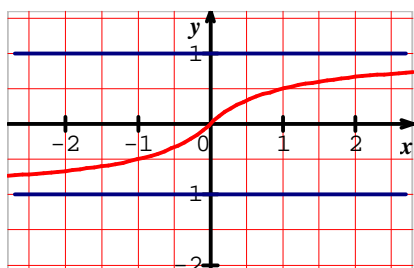
$$(4) \quad \text{لما } x \in [0, +\infty[\text{ فإن:}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$$

و منه f قابلة للإشتقاق عند 0.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	1



(5)

x	0	$2p$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$2p$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$0 \leq f'(x) \leq 2 \quad \text{و منه } f \text{ متزايدة على } \mathbb{R}.$$

$$-1 \leq -\sin x \leq 1$$

$$x-1 \leq x - \sin x \leq 1+x \quad (4)$$

$$x-1 \leq f(x) \leq 1+x$$

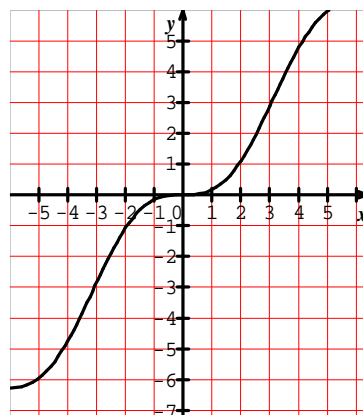
(5) لدينا:

$$f(x) \geq x-1 \quad \text{و} \quad x-1 \geq A$$

$$f(x) \geq A \quad \text{إذن:}$$

حسب تعريف النهاية لما x يؤول إلى $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{فإن:}$$



تصحيح: المقام هو: $x-C$

(1) معادلة المستقيم المقارب هي: $x=C$.

و عليه $C=1$.

$$(2) \quad \text{لدينا: } f(3) = \frac{5}{2} \quad \text{و منه: } 6a+b=5.$$

$$(3) \quad \text{لدينا: } f'(3)=0 \quad \text{و منه: } 4a-b=0.$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x-1} \quad (4)$$

(5) (C_f) يقع أعلى (D)



$$(6) \text{ لما } y^3 \neq 0 : x = \frac{y}{1-y}$$

$$\text{لما } y \neq 0 : x = \frac{y}{1+y}$$

(7) الحل الوحيد على \mathbb{R} للمعادلة $f(x)=y$ هو

$$x = \frac{y}{1-|y|}$$

$$D_g = \hat{A} - \{-1, 1\} \quad (II)$$

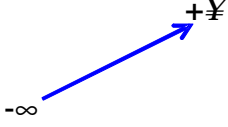
$$(2) \text{ لما } x \in]-1, 0[: g(x) = \frac{x}{1+x}$$

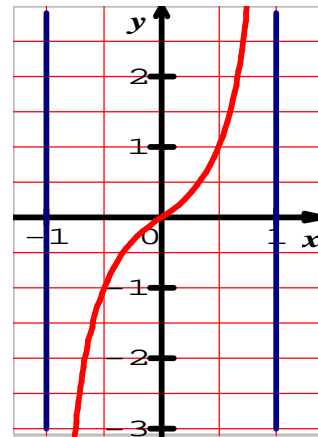
$$\text{لما } x \in [0, 1[: g(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty \quad (3)$$

$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x} = 1$$

x	-1	1
f'(x)	+	
f(x)		



(5)

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1, 1[$ ،

$$(f \circ g)(x) = x$$

(6) نستنتج أن المنحنيين متناظرين بالنسبة إلى (D) .