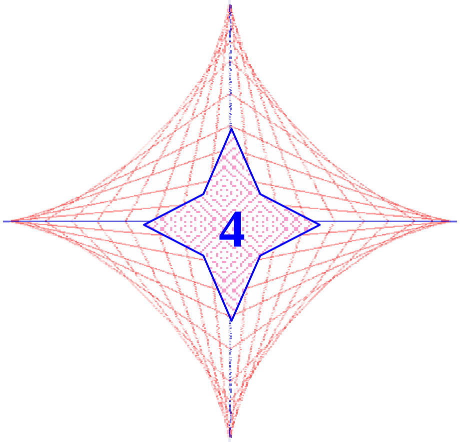
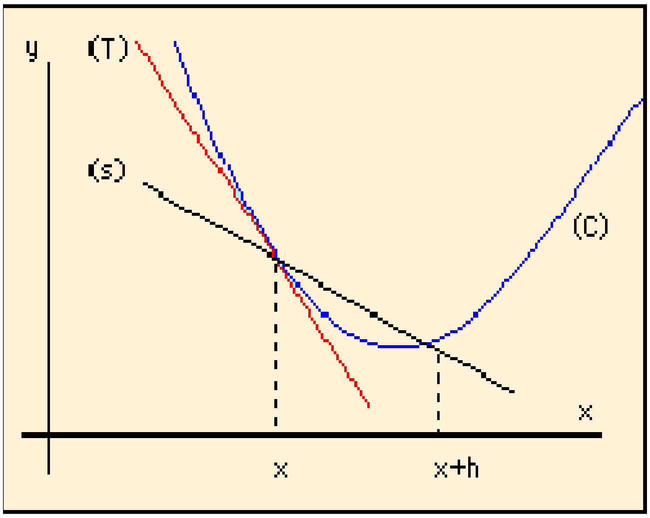


تطبيقات الإشتقاقية



الكفاءات المستهدفة

- تعيين إتجاه تغير دالة
- استعمال المشتق لتعيين القيم الحدية.
- حل مسائل تستخدم فيها دوال ناطقة ودوال صماء

الانشطه

نشاط 1:

<u>الهدف</u> : العلاقة بين إشارة مشتق دالة واتجاه تغيرها.

1) f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

h متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;0]$. k متناقصة تماما على $]0,+\infty[$.

2) $f'(x)=1$ ، $g'(x)=-2$ ، $h'(x)=2x$ و $k'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

3) من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)>0$ و $g'(x)<0$

من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ ؛ $h'(x)>0$ و من أجل كل $x\in]-\infty;0]$ ؛ $h'(x)<0$.

من أجل كل $x\in]0,+\infty[$ ؛ $k'(x) =< 0$

4) المطلوب مؤكد .

نشاط 2:

<u>الهدف</u> : دراسة إشارة مشتق دالة بيانيا واستنتاج اتجاه تغير هذه الدالة.

1) $g(x)=0$ معناه $x=1$ أو $x=-\dfrac{1}{3}$

2) من الرسم f متزايدة تماما على $\left]-\infty;-\dfrac{1}{3}\right]$ و $[1;+\infty[$ ؛ ومتناقصة تماما على $\left[-\dfrac{1}{3};1\right]$.

3) من الرسم الدالة g موجبة تماما على $\left]-\infty;-\dfrac{1}{3}\right[\cup]1;+\infty[$ وسالبة تماما على $\left]-\dfrac{1}{3};1\right[$

وتنعدم من أجل القمتين $-\dfrac{1}{3}$ و 1 فقط .

4) $f'(x)=3x^2-2x-1=g(x)$.

5) إشارة f' على $\mathbf{R}$ هي نفس إشارة g .

6) f' موجبة تماما على $\left]-\infty;-\dfrac{1}{3}\right[\cup]1;+\infty[$ معناه f متزايدة تماما على $\left]-\infty;-\dfrac{1}{3}\right]$ و $[1;+\infty[$ ؛ f' سالبة تماما على $\left]-\dfrac{1}{3};1\right[$ معناه f متناقصة تماما على $\left[-\dfrac{1}{3};1\right]$.

نشاط 3:

<u>الهدف</u> : دراسة المماس لمنحني دالة عند نقطة التي فاصلتها تعدم مشتق هذه الدالة.

1) عين فواصل النقط M تنتمي إلى $]1;2[$.

2) عين فواصل النقط M تنتمي إلى $]-1;1[$

3) المجال $]1;2[$ تكون فيه f' موجبة تماما.

4) المجال $]-1;1[$ تكون فيه f' سالبة تماما.

5) في النقطتين $A(-1;6)$ و $B(1;2)$ ، (C_f) يقبل فيهما مماسين موازيين لحامل محور الفواصل . العدد المشتق يكون معدوما عند فاصلتي هاتين النقطتين .

نشاط 4:

<u>الهدف</u> : الهدف من هذا النشاط هو حصر دالة بطريقتين وملاحظة أحسن طريقة .

<u>تصحيح</u> : الطريقة الثانية : 2) $[-1\,,1]$ عوضا $[-1\,,0]$ و3) $[1\,,5]$ عوضا $[0\,,5]$

<u>الطريقة الأولى :</u>

من أجل $x\in[-1\,,5]$ لدينا $0\le 2x^2\le 50$

و $-20\le -4x\le 4$

ومنه $-14\le 2x^2-4x+6\le 60$.

<u>الطريقة الثانية :</u>

1) $T=\dfrac{2\left(x_2^2-x_1^2\right)-4\left(x_2-x_1\right)}{x_2-x_1}=2\left(x_1+x_2-2\right)$

2) من أجل كل x_1 و x_2 من $[-1\,,1]$ حيث $x_1\neq x_2$ لدينا: $-2<x_1+x_2<2$ ومنه $-8<T<0$. إذن $T<0$

ملاحظة f متناقصة تماما على $[-1\,,1]$.

3) من أجل كل x_1 و x_2 من $[1\,,5]$ حيث $x_1\neq x_2$ لدينا : $2<x_1+x_2<10$ ومنه $0<T<16$ إذن $T>0$.

ملاحظة f متزايدة تماما على $[1\,,5]$.

4)

x	-1		1		5
$f(x)$	12	$\searrow$	4	$\nearrow$	36

5) من أجل كل x من $[-1\,,5]$ $4\le f(x)\le 36$.

6) باستعمال جدول التغيرات نجد أحسن حصر لـ $f(x)$.

الأعمال موجهة

تمــاريــن

1 صحيح 2 صحيح 3 خطأ

4 خطأ 5 صحيح 6 خطأ

7 صحيح 8 خطأ 9 صحيح

10 خطأ 11 خطأ 12 خطأ

13 خطأ 14 صحيح .

15 3) $f(x)\in\left[f(b);f(a)\right]$

16 1) منحني الدالة f يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل

17 1) المعادلة تقبل حلا واحداً .

18 3) المعادلة تقبل حلا واحدا على المجال $[0;1]$

19 1) الدالة f متزايدة تماما

20 2) المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا واحدا على $[0;1]$.

21 3) الدالة f تقبل على الأقل قيمة حدية على $]-\alpha;\alpha[$

22

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-	

23 الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$ و متناقصة تماما على $[-1;1]$

24 الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالات $]-\infty;-2[$ و $]-2;2[$ و $]-2;+\infty[$.

25 الدالة f' سالبة على المجال $[a;b]$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على $[a;b]$ ، أي $f(a)>f(b)$ (الدالة المتناقصة لا تحافظ على الترتيب).

26 الدالة f' موجبة على المجال $[a;b]$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على $[a;b]$ ، أي $f(a)<f(b)$ (الدالة المتزايدة تحافظ على الترتيب).

27 المنحني (C_1) يرفق بالمنحني (R)

المنحني (C_2) يرفق بالمنحني (Q)

المنحني (C_3) يرفق بالمنحني (P)

28 1) $f'(x)=3x^2-3$ ، أكبر قيمة تبلغها الدالة f على المجال $[-3;1]$ هي 3 و تبلغها عند1- $[f(-1)=3]$

2) $f'(x)=-3x^2+6$ ، $\left[f(\sqrt{2})=3\sqrt{2}\right]$

3) $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ ، $[f(0)=2]$

29 1)

x	-3		$\frac{3}{2}$		2
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{4}$	↗	

2)

x	-4		-1		2
$f(x)$		↗	8	↘	

3)

x	-5		0		2		7
$f(x)$		↗	1	↘	-3	↗	

4)

x	-2		-1		0		1		2
$f(x)$		↘	2	↗	3	↘	2	↗	

5)

x	-1		2
$f(x)$		↗	

6)

x	-4		-1		3		6
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{6}$	↘	

7)

x	$-\frac{1}{3}$		6
$f(x)$		↗	

8)

x	-7		2
$f(x)$		↘	

30 $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-2}$ ، $f'(x)=\dfrac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}$

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;2-\sqrt{7}]$ و $[2+\sqrt{7};+\infty[$ و متناقصة تماما على كل من $[2-\sqrt{7};2[$ و $]2;2+\sqrt{7}]$

نضع $x_1 = 5,012013014015016$

و $x_2 = 5,012013014015017$

$x_1 \in [2+\sqrt{7};+\infty[$ و $x_2 \in [2+\sqrt{7};+\infty[$

لدينا $x_2 > x_1$ و بالتالي $f(x_2) > f(x_1)$ لان الدالة f متزايدة تماما على $[2+\sqrt{7};+\infty[$ ، إذن $B > A$

31 $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2+x}$ ، $f'(x)=\dfrac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$

الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$ و متزايدة تماما على $[-1;1]$.

نضع $x_1 = 2,01401414$

و $x_2 = 2,01401416$

$x_1 \in [1;+\infty[$ و $x_2 \in [1;+\infty[$

لدينا $x_2 > x_1$ و بالتالي $f(x_2) < f(x_1)$ لان الدالة f مناقصة تماما على $[1;+\infty[$ ، إذن $B < A$

32 إذا كان $a<0$ الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ عند $\dfrac{-b}{2a}$ و إذا كان $a>0$ الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ عند $\dfrac{-b}{2a}$.

33 $f : x \mapsto x^3+ax+b$ ، $f'(x)=3x^2+a$

يكون للدالة f قيمتين حديتين مختلفتين إذا كان $a \in]-\infty;0[$.

34 $f : x \mapsto x^3+ax^2+b$ ، $f'(x)=3x^2+2ax$

يكون للدالة f قيمتين حديتين مختلفتين إذا كان $a \neq 0$.

35 $f : x \mapsto ax^2+bx+c$

إثبات أن $a>0$: لدينا $f(-1)$ قيمة حدية ، إذن $B(-1;3)$ هي ذروة للمنحني (C) و لدينا A تقع فوق B و بالتالي $f(-1)$ هي قيمة حدية صغرى ، و بما أن $f(x)$ هي دالة كثير حدود من الدرجة الثانية فإن $a>0$.

تعيين الدالة f :

نطبق الشروط $f(2)=1$ و $f(-1)=-3$ و $f'(-1)=0$ فنجد $a=\dfrac{4}{9}$ ، $b=\dfrac{8}{9}$ و $c=-\dfrac{23}{9}$

36 نطبق الشروط $f(1)=-1$ و $f(-1)=0$ و $f'(-1)=-\dfrac{13}{2}$ فنجد $a=3$ ، $b=-\dfrac{1}{2}$ و $c=-\dfrac{7}{2}$

37 (1

x	-3		1		2
$f(x)$		↘	1	↗	

v في الحالات المتبقية للتعرف على اتجاه تغير الدالة f ندرس إشارة مشتقتها.

38 (1 $f : x \mapsto |x^2-2x|$ ؛ $D=[0;5]$

نضع $g(x)=x^2-2x$

جدول تغيرات الدالة g هو:

x	0		1		2		5
$g(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	15

و لدينا $f(x)=g(x)$ إذا كان $x\in[2;5]$

و $f(x)=-g(x)$ إذا كان $x\in[0;2]$

جدول تغيرات الدالة f هو:

x	0		1		2		5
$f(x)$	0	↗	1	↘	0	↗	15

v في الحالات المتبقية للتعرف على اتجاه تغير الدالة f نتبع نفس بالطريقة مع $f(x)=g(x)$ إذا كان $g(x)\geq 0$ و $f(x)=-g(x)$ إذا كان $g(x)\leq 0$

39 1) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال D ثم أنجز جدول تغيرات الدالة $g : x \mapsto |f(x)|$ ، في كل حالة من الحالات التالية:

$f : x \mapsto (x^2-4)(x+1)$ ؛ $D=[-3;5]$.

من أجل كل x من D : $f'(x)=3x^2+2x-4$

الدالة f' تنعدم من أجل $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{3}$ و $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{3}$

جدول تغيرات الدالة f هو:

x	-3		x_1		x_2		5
$f(x)$	-10	↗	$f(x_1)$	↘	$f(x_2)$	↗	$f(5)$

الدالة f تنعدم من أجل $x=-2$ أو $x=2$ أو $x=-1$

و منه جدول تغيرات الدالة $|f|$ هو

x	-3		-2		x_1		-1		x_2		2		5
$\lvert f(x)\rvert$		↘	0	↗		↘	0	↗		↘	0	↗	

v في الحالات المتبقية للتعرف على اتجاه تغير الدالة g نتبع نفس بالطريقة مع $g(x)=f(x)$ إذا كان $f(x)\geq 0$ و $g(x)=-f(x)$ إذا كان $f(x)\leq 0$

40 1) $f : x \mapsto 2x^3-3x^2-1$ ؛ $I=\left[\frac{3}{2};2\right]$.

من اجل كل x من I : $f'(x)=6x(x-1)$

الدالة f متزايدة تماما على I و بالتالي

$f\left(\frac{3}{2}\right)\le f(x)\le f(2)$ أي $-1\le f(x)\le 3$

و بالتالي المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

2) $f : x \mapsto -x^3+3x^2-3x-2$ ؛ $I=[-1;0]$.

الدالة f متناقصة تماما على I و بالتالي

$f(0)\le f(x)\le f(-1)$ أي $-2\le f(x)\le 5$

و بالتالي المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

- في الحالات الأخرى تتبع نفس الطريقة (إذا كانت f متزايدة تماما على I فإنها تحافظ على الترتيب و إذا كانت متناقصة تماما على I فإنها لا تحافظ على الترتيب).

41 تصويب : الدالة f معرفة كما يلي:

$f : x \mapsto x^3-5x^2+3x+2$ و $I=[-1;2]$

من اجل كل x من I : $f'(x)=3x^2-10x+3$

جدول تغيرات الدالة f هو:

x	-1	$\frac{1}{3}$	2
$f(x)$	-7 $\nearrow$	$\frac{67}{27}$	$\searrow$ -4

المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلين متمايزين على I

لأن: في المجال $\left[-1;\frac{1}{3}\right]$ f متزايدة تماما و

$-7\le f(x)\le\frac{67}{27}$

و في المجال $\left[\frac{1}{3};2\right]$ f متناقصة تماما و

$-4\le f(x)\le\frac{67}{27}$

42 1) $f : x \mapsto x^2-3$ ؛ $D=[0;2]$.

الدالة f متزايدة تماما على D و

بالتالي $f(0)\le f(x)\le f(2)$

أي : $-3\le f(x)\le 1$

2) $f(2)\le f(x)\le f(8)$ (f متزايدة تماما على D)

3) $f(2)\le f(x)\le f(0)$ (f متناقصة تماما على D)

4) $f(1)\le f(x)\le f(-1)$ (f متناقصة تماما على D)

43 1) $f : x \mapsto x^2+4x+5$ ؛ $D=[-4;0]$

من أجل كل x من D : $f'(x)=2x+4$

x	-4	-2	0
$f(x)$	5 $\searrow$	1	$\nearrow$ 5

لدينا : $1\le f(x)\le 5$

2) $5\le f(x)\le 8$ ، 3) $-\frac{29}{8}\le f(x)\le\frac{27}{8}$

4) $2\le f(x)\le\frac{7}{2}$ ، 5) $2\le f(x)\le 7$

44 1) $f : x \mapsto x-\sin x$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=1-\cos x$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)\ge 0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

2) معادلة (Δ) هي : $y=x$

لدراسة وضعية (C_g) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة $x-\sin x$ و نجد :

(Δ) أعلى (C_g) في $]0;+\infty[$ و (Δ) أسفل (C_g) في $]-\infty;0[$ و (Δ) يقطع (C_g) في مبدأ المعلم O

45 1) $f : x \mapsto \frac{4x^2-1}{x^2+1}$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{10x}{(x^2+1)^2}$

الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و متناقصة تماما على $]-\infty;0]$.

جدول تغيرات f هو:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

2) $f(x)-4=-\frac{5}{x^2+1}$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)-4<0$

من جدول تغيرات f ، لدينا -1 قيمة حدية صغرى لـ f

و نستنتج أن : $-1\le f(x)<4$

46

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h(x)$		↗	1	↘	

نكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة فنجد:

$$\begin{cases} f(x)=-h(x) & ;x\le 0 \\ f(x)=h(x) & ;0\le x\le 1 \\ f(x)=g(x); & x\ge 1 \end{cases}$$

إذن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

47 نضع $f(x)=x^3+2x^2-4$ ،

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=3x^2+4x$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		0		1		$+\infty$
$f(x)$		↗	1	↘	-4	↗	-1	↗	

على المجال $[0;1]$ الدالة f متزايدة تماما ، بما أن l ينتمي إلى $[-4;-1]$ فإن المعادلة $f(x)=l$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $x_0\in[0;1]$.

48 1) $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$

(C_f) يقبل مماسا عند كل نقطة لأن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

2) • المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلا مضاعفا $x_0=1$

• التفسير البياني للنتيجة: المنحني (C_f) يقبل مماسا في النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$ هو حامل محور الفواصل.

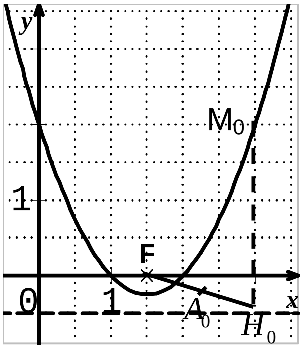
3) نحل المعادلة $f'(x)=3$ فنجد $(x=0)$ أو $(x=2)$

و منه نقط المنحني (C_f) التي يكون فيها معامل التوجيه يساوي 3 هي $A(0;-1)$ و $B(2;1)$

4) – إذا كان $c=0$ يوجد مماس واحد ، إذا كان $c>0$ يوجد مماسان و إذا كان $c<0$ لا يوجد مماس.

49 $f(x)=ax+b-\frac{6}{x}$ ، انطلاقا من الشرطين $f(2)=0$ و $f'(2)=1$ نجد $a=-0,5$ و $b=4$.

50 1) الرسم .



2) $H_0\left(x_0;-\frac{1}{2}\right)$

$A_0\left(\frac{3+2x_0}{4};-\frac{1}{4}\right)$

معامل التوجيه (A_0M_0) هو: $\dfrac{x_0^2-3x_0+2+\frac{1}{4}}{x_0-\frac{2x_0-3}{4}}=2x_0-3$.

لدينا $f'(x_0)=2x_0-3$ ومنه (A_0M_0) هو مماس للمنحني (C_f) في النقطة M_0 .

3) معامل توجيه (A_0F) هو $\frac{1}{3-2x_0}$ ولدينا :

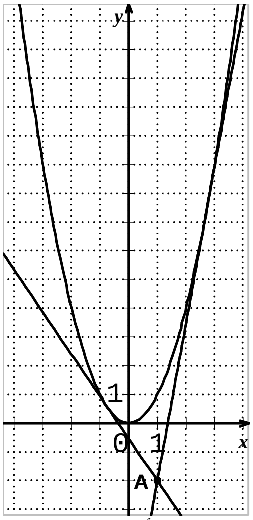
$\frac{1}{3-2x_0}\times(2x_0-3)=-1$ إذن $(A_0F)\perp(A_0M_0)$

وبالتالي A_0 هي المسقط العمودي لِـ F على المماس (A_0M_0) ولدينا ترتيب A_0 هو $-\frac{1}{4}$ إذن A_0 تنتمي إلى المستقيم ذي المعادلة $y=-\frac{1}{4}$.

51 $f'(4)=8$ إذن مماس منحني الدالة f هو (T_2)

$g'(4)=\frac{-1}{16}$ إذن مماس منحني الدالة g هو (T_3)

$h'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$ إذن مماس منحني الدالة h هو (T_1)



52 1) الرسم .

التخمين: مماسان .

2) (T_a) : $y=2ax-a^2$

المعادلة $2a-a^2=-2$ تعني

$a=1-\sqrt{3}$ أو $a=1+\sqrt{3}$

معادلة المماس $(T_{1-\sqrt{3}})$ هي :

$y=2(1-\sqrt{3})x--4+2\sqrt{3}$

معادلة المماس $(T_{1+\sqrt{3}})$ هي :

$y=2(1+\sqrt{3})x--4-2\sqrt{3}$

53 1) أ) $P'(x)=3(x-1)^2$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x $P'(x)\ge 0$ إذن p متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ومنه متزايدة على $\mathbb{R}$

ب) لدينا $2<x<2,2$ بما أن p متزايدة تماما فإن $P(2)<P(x)<P(2,2)$ أي : $-1<P(x)<-0,272$ وبالتالي $P(x)<-0,2$.

2) أ) $P(x)<-0,2$ معناه $\frac{P(x)}{(x-2)^2}<\frac{-0,2}{(x-2)^2}$ لأنه من أجل كل عدد x من $]2\ ;\ 2,2[$ ؛ $(x-2)^2>0$

ب) $-5<-\frac{0,2}{(x-2)^2}$ تكافئ $(x-2)^2<0.04$ و $x\neq 2$

ومعناه $2-0,2<x<2+0,2$ و $x\neq 2$ ومنه :

إذا كان $x\in\left]2\;;\;2,2\right[$ فإن $x\in\left]1,98\;;\;2\right[\cup\left]2\;;\;2,2\right[$

وهذا يعني أن $-5 > -\dfrac{0,2}{(x-2)^2}$ ومنه $f(x) < -5$.

وبالتالي نكتفي بأخذ $a=0,2$

ت) تصحيح : $f(x) < -M$ عوضا $f(x) < -1$

بنفس الطريقة $-\dfrac{0,2}{(x-2)^2} < -M$ تكافئ

$x\in\left]2-\sqrt{\dfrac{0,2}{M}}\;;\;2\right[\cup\left]2\;;\;2+\sqrt{\dfrac{0,2}{M}}\right[$.

إذا كان $M\geq 5$ فإن $\sqrt{\dfrac{0,2}{M}}\leq 0,2$ وبالتالي نكتفي بأخذ

$b=\sqrt{\dfrac{0,2}{M}}$ ولدينا : إذا كان $x\in\left]2\;;\;2+\sqrt{\dfrac{0,2}{M}}\right[$ فإن

$x\in\left]2-\sqrt{\dfrac{0,2}{M}}\;;\;2\right[\cup\left]2\;;\;2+\sqrt{\dfrac{0,2}{M}}\right[$ وهذا يعني

$-\dfrac{0,2}{(x-2)^2} < -M$ ومنه $f(x) < -M$.

$f'(x)=\dfrac{x(x-2)(x-3)^2}{(x-2)^4}$ من أجل كل $x\in\left]2;5\right[$

لدينا : $f'(x)\geq 0$

x	2	3	5
$f'(x)$	‖ +	0	+
$f(x)$	‖	6	6,88