المعادلات التفاضلية

تعاريف: المعادلة التفاضلية هي معادلة:

- المجهول فيها دالة و غالبا نرمز له: y أو z أو أي حرف آخر.....
- تظهر فيها بعض المشتقات الدالة y (المشتقة الأولى y' أو مشتقات أعلى y'' , y''' , y'''' ...
- نسمي حلا للمعادلة التفاضلية في مجال كل دالة φ تحقق المعادلة في المجال.

مثال:

1- $y' = \sin x$ حلها $y = -\cos x + k$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

2- $y' = 3y$ حلها $y = ke^{3x}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

3- $y' = 1 + e^{x}$ حلها $y = x + e^{x} + k$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

4- $y'' = \cos x$ حلها $y = -\cos x + ax + b$ حيث $a,b \in \mathbb{R}$.

5- $y'' = y$ حلها $y = Ae^{x} + Be^{x}$ حيث $A,B \in \mathbb{R}$.

بعض الأنواع من المعادلات:

1- معادلات تفاضلية من الشكل $y' = f(x)$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و كانت F دالتها الأصلية على هذا المجال فإن حلول المعادلة التفاضلية $y' = f(x)$ هي دوال من الشكل $y = F(x) + c$ حيث c ثابت حقيقي.

مثال: $y' = \frac{1}{x^2}$. $y' = \cos x$,

2- معادلات تفاضلية من الشكل $y'' = f(x)$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و كانت F دالتها الأصلية على المجال I و كانت G دالة الأصلية للدالة F على المجال I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' = f(x)$ هي دوال من الشكل $y = G(x) + c_1x + c_2$ حيث $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

مثال: $y'' = \sin x$. $y'' = -\frac{1}{x^2}$

3- معادلات تفاضلية من الشكل $y'' = -\omega^2 y$

مبرهنة: إذا كان ω عددا حقيقيا غير معدوم فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' = -\omega^2 y$ هي الدوال y من الشكل: $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$ حيث $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

مثال: $y'' = -2y$. $2y'' + 7y = 0$

تذكير: $y' = ay + b$ حيث $a \neq 0, b \neq 0$ فان: $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ مثال: $y' = -2y + 3$

4- معادلات تفاضلية من الشكل $y' = ay$

مبرهنة: ليكن a عدد حقيقي . ولتمن المعادلة التفاضلية $y' = ay$.

حلول المعادلة التفاضلية في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y = ce^{ax}$ و c ثابت حقيقي.

مثال: $y' = 5y$.

تمارين:

1- حل المعادلة التفاضلية $y' = 2x^2 - 5x + 1$. ثم عين الحل الذي يأخذ القيمة 2 من اجل قيمة المتغير $x = -4$.

2- حل المعادلة التفاضلية $y'' + \pi^2 y = 0$. ثم عين الحل الذي يأخذ القيمة $\frac{2}{3}$ من اجل قيمة المتغير $x = \frac{1}{2}$. و يأخذ القيمة 0 من اجل قيمة المتغير $x = \frac{2}{3}$.

تمرين: $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + x}{1 - x}$.

1- عين الاعداد : d, c, b, a بحيث: $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{1 - x}$

2- استنتج دالة اصلية للدالة f على المجال .

تمرين: $y' = \frac{x^2 + 1}{x^2}$ عين حل للمعادلة بحيث $F(1) = -1$