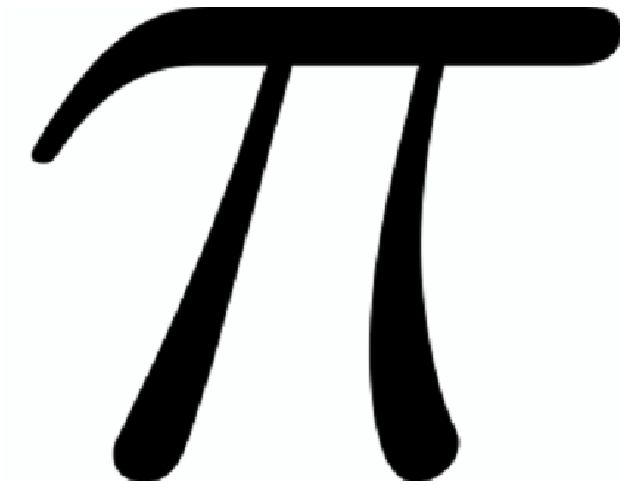
Aide - mémoire en Mathématiques

-- Pour 3AS – Branches : M, MT et SE --

Par Mr. Zakaria
مدرسة النهى عين النعجة



23/12/2010

مدرسة النهى عين العجة 13-13-69-57 05

المذكرات الأساسية في الرياضيات للسنة النهائية وما يليها

Aide - mémoire en mathématiques

شعبة الرياضيات و التقنية والعلوم التجريبية

تُساعد هذه المذكّرات الطالبَ على استذكار كل ما يحتاجه في مادة الرياضيات .

طبعة معدّلة ومصحّحة : 2009- 2010

الثمن : هدية لطلبة الرياضيات من السنة النهائية (لا تسلم إلا نسخة واحدة) .

جمعها الأستاذ زكرياء : 45-55-80-71 07

0 551 90-49-90

ترقبوا : ❶ المذكرات الأساسية في الفيزياء للسنة النهائية .

❷ المناهج العامة والخطوات عند حل التمارين في الرياضيات .

الفهرس : 2009-2010

أسئلة بسيطة عن كيفية استخدام المذكرات الأساسية في الرياضيات :

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(2x^2+x+3)^2=(x^2-3x-4)^2$ الجواب : $\left\{1,-\frac{1}{3}\right\}$

الصفحة 2 السطر 6 و تحذير من الخطأ 54

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^3-x^2-3x+2=0$ إذا علمت أن أحد الحلول هو 2

نبحث عن المعادلات من الدرجة 3 الصفحة 5 و 6

3. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $-2x^2+7x-5<0$ الجواب : $S=]-\infty,1[\cup]\frac{5}{2},+\infty[$

متراجحة من الدرجة 2 الصفحة 6 تشير إلى جدول الإشارة ننظر في الصفحة 5 أو الصفحة 37 و 38

4. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^2-x+14>4x^2-11x+17$ الجواب : $S=]\frac{1}{3},3[$

الطريقة العامة لحل متراجحة الصفحة 7 الحالة 3 أو الصفحة 38 الحالة 18

5. حل المتراجحة التالية : $\frac{x-1}{9-x}\geq\frac{6}{x-5}$ ج : $[-7;5[\cup[7;9[$

تحذير في آخر الصفحة 3 أو من الخطأ 6 والطريقة العامة مذكورة في الصفحة 3 أو في الصفحة 7 الحالة3

6.

نعتبر كثير الحدود $p(x)=4x^2-\left(\sqrt{6}+4\sqrt{3}\right)x+3\sqrt{2}$

1. أثبت أن $\frac{\sqrt{6}}{4}$ جذر لكثير الحدود .
2. أوجد الجذر الأخر (يطلب القيمة الدقيقة) الجواب : $\sqrt{3}$

لإيجاد الجذر الآخر علما أن أحد الجذرين معلوم ننظر في الصفحة 5 مجموع و جداء جذرين .

10. احسب المجموع التالي : $S'_n=1+2+4+8+\dots\dots+2^n$

نتساءل ما نوع المتتالية ثم ننظر في المجاميع الصفحة 30 ونرقم الحدود – في الهندسية – تبعا للأس لمعرفة عدد الحدود

11. لتكن الدالة $f(x)=\frac{x^2+2x-5}{x^2+1}$

أ. عين نقطة $M(x_0;y_0)$ من المنحنى يكون عندها المماس يوازي المستقيم الذي معادلته : $y=2x-1$

ب. عين نقطة $M'(x_0;y_0)$ من المنحنى يكون عندها المماس يعامد المستقيم الذي معادلته : $y=3x-1$

ننظر في الدوال الصفحة 14 ثم نبحث عن المماس في الأسفل ونستخدم القواعد .

12. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$

ننظر في الحساب المثلثي ثم المعادلات المثلثية الصفحة 12 و 13

13. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $|2x-3|<5$

متراجحة بالقيمة المطلقة ننظر في المتراجحات الصفحة 6-7 الحالة 4 أو في القيمة المطلقة صفحة 7 الخاصية 6

14. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $|x^2+x-1|>2$

متراجحة بالقيمة المطلقة ننظر في المتراجحات الصفحة 6-7 الحالة 5 أو في القيمة المطلقة صفحة 7 الخاصية 7

15. احسب $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin x}$

لإزالة عدم التعيين نستخدم العلاقة المثلثية الشهيرة الصفحة 11

16. F دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ فإن : $|F(x)-3|\leq\frac{1}{x^2+1}$ هل تقبل F نهاية عند $+\infty$.

- متراجحة بالقيمة المطلقة ننظر في المتراجحات الصفحة 6-7 الحالة 4 أو في القيمة المطلقة صفحة 7 الخاصية 6
- ثم نستخدم نظرية الحصر في النهايات صفحة 14 الخاصية 7

17. أعط مجموعة التعريف للدالة : $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$

مدرسة النهى – عين البيضة – البة

المذكرات الأساسية للسنة النهائية وما يليها

قوة عدد حقيقي :

قواعد : 1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 2. $(a^m)^n = a^{m \times n}$ 3. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ 4. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ 6. $(ab)^m = a^m \times b^m$ 7. $a^0 = 1$ 8. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

الجداءات الشهيرة :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

جداءات أدنى شهرة :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

ملاحظة : $(-a)^n = \begin{cases} a^n & ; n = 2k \\ -a^n & ; n = 2k+1 \end{cases}$ ، $n = 2k$ معناه n زوجي ، $n = 2k+1$ معناه n فردي

الجذور التربيعية : إذا كان a و b موجبين فإن :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$
$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a^2}$$
$$\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$$
$$\sqrt{a^2} = a \quad ; \quad a \geq 0$$
$$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$$
$$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

ملاحظة : $\sqrt{A(x) \cdot B(x)} \neq \sqrt{A(x)} \cdot \sqrt{B(x)}$ و $\sqrt{\frac{A(x)}{B(x)}} \neq \frac{\sqrt{A(x)}}{\sqrt{B(x)}}$ إلا إذا كان $A(x)$ و $B(x)$ موجبين .

حيث $A(x)$ و $B(x)$ عبارتان تحويان المتغير x .

والصحيح : $\sqrt{A(x) \cdot B(x)} = \sqrt{|A(x)|} \cdot \sqrt{|B(x)|}$ و $\sqrt{\frac{A(x)}{B(x)}} = \frac{\sqrt{|A(x)|}}{\sqrt{|B(x)|}}$

الحالة العامة : $\sqrt{A(x)^2} = |A(x)|$

- تحويل الجذر التربيعي إلى قوة : $\sqrt{x} = (x)^{\frac{1}{2}}$ و الجذر التكعيبي : $\sqrt[3]{x} = (x)^{\frac{1}{3}}$
- ليكن $a \in R^+$ فإن : $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
- $x^2 = a^2$ يكافئ : $x = a$ أو $x = -a$

الكسور :

1. ضرب الكسور : $\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} = \frac{a \times a'}{b \times b'}$
2. صحة الكتابات التالية : $\alpha \times \frac{a}{b} = \frac{\alpha \times a}{b} = \frac{\alpha}{b} \times a$ و الكتابة التالية : $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$
3. قسمة الكسور : $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \left(\frac{a}{b}\right) \times \left(\frac{d}{c}\right)$ و $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \left(\frac{a}{b}\right) \times \frac{1}{c}$ و $\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{b}$
4. الضرب في عدد غير معدوم α : $\frac{a}{b} = \frac{a \times \alpha}{b \times \alpha}$
5. القسمة على عدد غير معدوم α : $\frac{a}{b} = \frac{a \div \alpha}{b \div \alpha}$
6. فصل الكسور : $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

لكن : $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$

الاختزال والمساواة :

1. الاختزال الأفقي : أ – الجمع : $A(x) + \alpha = B(x) + \alpha$ (طرحنا α من كل طرف)
   ب- الضرب : $A(x) \times \alpha = B(x) \times \alpha$ (قسمنا الطرفين على العدد α غير المعدوم) .
2. الاختزال العمودي: أ – الضرب : $\frac{A(x) \times \alpha}{B(x) \times \alpha} = \frac{A(x)}{B(x)}$
   ب- الجمع : $\frac{A(x) + \alpha}{B(x) + \alpha} \neq \frac{A(x)}{B(x)}$

ملاحظة :

إذا كان : $A(x) \times h(x) = B(x) \times h(x)$ فلا يجوز اختزال $h(x)$ فنكتب التالي : $A(x) = B(x)$ إلا إذا كان $h(x) \neq 0$

والصحيح أن : 1. نجعل المعادلة صفرية .

2. نستخرج العامل المشترك : $h(x)\left(A(x) - B(x)\right) = 0$

3. $h(x) = 0$ أو $A(x) - B(x) = 0$

لكن: في الاختزال العمودي فلا حرج: $\frac{A(x)\times \cancel{h(x)}}{B(x)\times \cancel{h(x)}} = \frac{A(x)}{B(x)}$

الاختزال في المتراجحات :

1. الاختزال الأفقي: أ- الجمع: $A(x)+\cancel{\alpha} > B(x)+\cancel{\alpha}$ (طرحنا α من كل طرف)

ب- الضرب: $A(x)\times\alpha < B(x)\times\alpha \Rightarrow \begin{cases} A(x)<B(x) \ ; \ \alpha>0 \\ A(x)>B(x) \ ; \ \alpha<0 \end{cases}$

اختزال متغير في متراجحة:

$A(x)\times h(x) < B(x)\times h(x)$ لا يعني أن: $A(x)<B(x)$ إلا إذا كان: $h(x)>0$

الطريقة العامة:

1. نجعل المتراجحة صفرية: $A(x)\times h(x) - B(x)\times h(x) < 0$
2. نستخرج العامل المشترك: $h(x)\left(A(x)-B(x)\right)<0$.
3. نحدد الجذور وننشئ جدول الإشارة.

زكرياء
0771-80-55-45

قواعد الحساب في $\mathbb{R}$:

1. إضافة عدد حقيقي α إلى طرفي معادلة أو متراجحة: إذا كان: $a=b$ فإن: $a+\alpha=b+\alpha$
إذا كان: $a>b$ فإن: $a+\alpha>b+\alpha$
2. ضرب طرفي معادلة في عدد حقيقي α:
إذا كان: $a=b$ فإن: $a\times\alpha=b\times\alpha$
3. ضرب طرفي متراجحة في عدد حقيقي α غير معدوم:
أ- $\alpha>0$ نحافظ على اتجاه المتراجحة: إذا كان: $a>b$ فإن: $a\times\alpha>b\times\alpha$
ب- $\alpha<0$ نغير اتجاه المتراجحة: إذا كان: $a>b$ فإن: $a\times\alpha<b\times\alpha$
4. الجمع و الضرب طرفا إلى طرف:
إذا كان: $\begin{cases} x=y \\ \text{و} \\ a=b \end{cases}$ فإن: $\begin{cases} x+a=y+b \\ \text{أو} \\ x\times a=y\times b \end{cases}$.
5. ضرب الطرفين و الوسطين: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ معناه: $x\times b=y\times a$ حيث $a;b$ أعداد حقيقية غير معدومة

تعميم: $\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ معناه: $A(x)\times\beta(x)=B(x)\times\alpha(x)$ بشرط: $\begin{cases} B(x)\neq 0 \\ \beta(x)\neq 0 \end{cases}$

حذار: $\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ لا يعني أن: $A(x)\times\beta(x) < \alpha(x)\times B(x)$ والطريقة العامة:

- نجعل المتراجحة صفرية
- توحد المقامات وننشر ونرتب.
- ننشئ جدول الإشارة.

6. جذاء يساوي معدوما: $A(x)\times B(x)=0$ معناه إما $A(x)=0$ أو $B(x)=0$.

7. جذاء غير معدوم: $A(x)\times B(x)\neq 0$ معناه: $A(x)\neq 0$ و $B(x)\neq 0$.
8. جعل المتراجحة صفرية: إذا كان: $A(x)<B(x)$ معناه $A(x)-B(x)<0$.
9. خاصية التعدي: إذا كان: $\begin{cases} a\leq b \\ \text{و} \\ b\leq c \end{cases}$ فإن: $a\leq c$.
10. خاصية التعدي: إذا كان: $\begin{cases} a\leq b \\ \text{و} \\ b<c \end{cases}$ فإن: $a<c$.
11. جمع المتراجحات طرفا إلى طرف:
أ- إذا كان: $\begin{cases} a\leq b \\ \text{و} \\ x\leq y \end{cases}$ فإن: $a+x\leq b+y$.
ب- إذا كان: $\begin{cases} a\leq b \\ \text{و} \\ x<y \end{cases}$ فإن: $a+x<b+y$.
12. ضرب المتراجحات طرفا إلى طرف:

إذا كان: $\begin{cases} 0\leq a\leq b \\ 0\leq x\leq y \end{cases}$ فإن: $a\times x\leq b\times y$

مدرسة الشمس
0557 69-13-13

كثيرات الحدود:

1. كثيرات الحدود من الدرجة الأولى 1: $p(x)=ax+b$

i. $p(x)=0$ إذا وفقط إذا $x=-\frac{b}{a}$

ii. إشارة $p(x)=ax+b$

x		x_0	
$p(x)$	عكس إشارة a		إشارة a

iii. تغيرات $p(x)$:
أ- $a<0$ فإن $P(x)$ متناقصة تماما.
ب- $a=0$ فإن $P(x)$ دالة ثابتة.
ت- $a>0$ فإن $P(x)$ دالة متزايدة تماما.

2. كثيرات الحدود من الدرجة الثانية II: $p(x)=ax^2+bx+c$ حيث $a\neq 0$

i. حل المعادلة $p(x)=0$ وتحليلها.
نستخدم المميز Δ حيث: $\Delta=b^2-4ac$ ونميز ثلاث حالات:

إذا كان	حلول المعادلة $ax^2+bx+c=0$	تحليل المعادلة $ax^2+bx+c=0$
$\Delta>0$	$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x-x_1)(x-x_2)$
$\Delta=0$	$x_0=\frac{-b}{2a}$	$a(x-x_0)^2$
$\Delta<0$	لا توجد حلول	لا يمكن تحليله

ملاحظة : إذا كان $\Delta = 0$ فإن كثير الحدود عبارة عن متطابقة شهيرة .

المميز المختصر Δ' : لحل المعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث $b=2b'$ معناه أن b عدد زوجي فيمكن استخدام المميز المختصر : $\Delta' = b'^2 - a.c$ فإذا كان : $\Delta' > 0$ فإن الجذرين المتمايزين هما : $x_2 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta}}{a}$; $x_1 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta}}{a}$

[illegible]

نميز ثلاث حالات :

أ- $\Delta<0$ إشارة $P(x)$ هي إشارة a .

ب- $\Delta = 0$ فإن :

[illegible]		
$P(x)$	إشارة a	إشارة a

ت- $\Delta > 0$

[illegible]					
$P(x)$	إشارة a	0	عكس إشارة a	0	إشارة a

مجموع و جداء جذري معادلة من الدرجة II :

إشارة الحلين :

قاعدة : نعتبر المعادلة : $ax^2+bx+c=0$ ، و $\Delta > 0$

مجموع الجذرين : $S = x'+x'' = -\frac{b}{a}$ ، جداء الجذرين : $P = x'\times x'' = \frac{c}{a}$

أ. إذا كان $x'\times x'' < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

ب. إذا كان : $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x'\times x'' > 0 \\ x'+x'' > 0 \end{cases}$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين تماما .

ج. إذا كان : $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x'\times x'' > 0 \\ x'+x'' < 0 \end{cases}$ فإن المعادلة تقبل حلين سالبين تماما .

مدرسة الفهمي 0557-69-13-13

i. حل المعادلة $p(x) = 0$ وتحليلها .

- الخطوة 1: لحل هذه المعادلة ينبغي أن نعلم احد حلولها الظاهرة $x = \alpha$ (يعطى أو يلاحظ وأهم الحلول الملاحظة في الامتحانات هما : 1+ أو 1-).
- الخطوة 2 : تحليل $P(x)$ على الشكل التالي : $p(x) = (x-\alpha)(ax^2+b'x+c')$ ونعين a' ; b' ; c' بالنشر و المطابقة أو بالقسمة الاقليدية أو بطرق أخرى .
- الخطوة 3 : يكون $p(x) = 0$ إذا تحقق أحد أمرين : $x-\alpha=0$ أو $ax^2+b'x+c'=0$

ملاحظة : للتأكد من صحة الحلول : مجموع الحلول : $x_1+x_2+x_3 = \frac{-b}{a}$ جداء الحلول : $x_1\times x_2\times x_3 = \frac{-d}{a}$ ،

نستخدم أحيانا ـ لحل المعادلات من الدرجة 3 ـ العامل المشترك مرتين ونستغني بذلك عن الطريقة التقليدية أعلاه مثلا :

لحل المعادلة التالية :

$$2x^3-3x^2+4x-6=0$$
$$x^2(2x-3)+2(2x-3)=0$$
$$(2x-3)(x^2+2)=0$$

ii. إشارة كثير الحدود : $p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

نستخدم الصيغة التحليلية $p(x) = (x-\alpha)(ax^2+b'x+c')$

ندرس إشارة : $(x-\alpha)$ و إشارة : $(ax^2+b'x+c')$ في جدول واحد للإشارة ثم نضرب الإشارتين .

[illegible]

الطريقة العامة : نستخدم - إما طريقة التحليل .
- أو طريقة تحويل المتغير .
- أو طريقة الجذر الظاهر .

زكرياء 0771-80-55-45

مثال عن تحويل المتغير : حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(x^2-3x)^2 = 2(x^2-3x)+8$

الطريقة : 1. نجعل معادلة صفرية دون نشر .

2. نرى أن المعادلة من الشكل : $y^2-2y-8=0$ حيث $y = x^2-3x$

3. نعين قيمة y ومنه نعين قيمة x من أجل كل قيمة لـ y .

الجواب : $S = \{-1, 1, 2, 4\}$

[illegible]

كل متراجحة ـ عموما ـ تحتاج إلى جدول إشارة

حل المتراجحة $M(x) > 0$ معناه البحث عن قيم x التي تجعل $M(x)$ موجبة تماما .

حل المتراجحة $M(x) < 0$ معناه البحث عن قيم x التي تجعل $M(x)$ سالبة تماما .

أمثلة :

1. $A(x)\times B(x)<0$
ننشئ جدول إشارة $A(x)$ وجدول إشارة $B(x)$ ونضرب الإشارتين .

2. $\frac{A(x)}{B(x)}>0$ ـ نحول القسمة إلى جداء $A(x)\times B(x)>0$

ـ ثم ننشئ جدول الإشارة .

3. $A(x)>B(x)$ • نجعلها صفرية ثم نرتبها .
• نبحث عن الجذور .
• ننشئ جدول الإشارة .

4. α موجب و $|A(x)|<\alpha$ معناه $-\alpha<A(x)<\alpha$

5. $|A(x)|>\alpha$ معناه $\begin{cases} A(x)>\alpha \\ \text{أو} \\ A(x)<-\alpha \end{cases}$

القيمة المطلقة:

تعريف: $|A(x)|=\begin{cases} A(x) & ; A(x)\geq 0 \\ -A(x) & ; A(x)<0 \end{cases}$

خواص:

- الجداء : $|a.b|=|a|.|b|$
- القسمة : $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$
- المجموع : $|a+b|\neq|a|+|b|$ وإنما $|a+b|\leq|a|+|b|$
- $|A(x)|=0 \Rightarrow A(x)=0$
- $|a-b|=|b-a|$
- α موجب و $|A(x)|<\alpha$ معناه $-\alpha<A(x)<\alpha$
- $|A(x)|>\alpha$ معناه $\begin{cases} A(x)>\alpha \\ \text{أو} \\ A(x)<-\alpha \end{cases}$

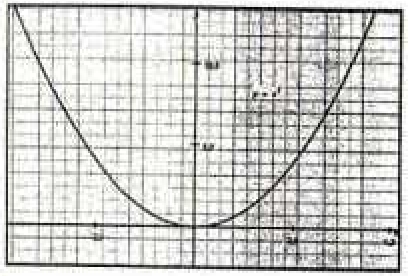
نهى/ زكرياء 0771-80-55-45

تربيع طرفي مساواة : إذا كان : $a(x)=b(x)$ فإن : $(a(x))^2=(b(x))^2$ والعكس غير صحيح إلا في الأعداد الموجبة .

تعميم (الرفع إلى القوة النونية) : إذا كان : $a(x)=b(x)$ فإن : $(a(x))^n=(b(x))^n$ حيث n طبيعي .

جذر طرفي مساواة موجبين : إذا كان : $a(x)=b(x)$ فإن : $\sqrt{(a(x))}=\sqrt{(b(x))}$ والعكس صحيح .

قلب طرفي مساواة : إذا كان : $a(x)=b(x)$ فإن : $\frac{1}{a(x)}=\frac{1}{b(x)}$ والعكس صحيح .



تربيع طرفي متراجحة :

الحالة 1 : إذا $a(x)$ و $b(x)$ مقادير موجبة

إذا كان : $a(x)>b(x)$ فإن : $(a(x))^2>(b(x))^2$

والعكس صحيح (لأن الدالة تربيع $f(x)=x^2$ متزايدة على المجال $[0\ ;+\infty[$.

الحالة 2 : إذا $a(x)$ و $b(x)$ مقادير سالبة :

إذا كان : $a(x)>b(x)$ فإن : $(a(x))^2<(b(x))^2$

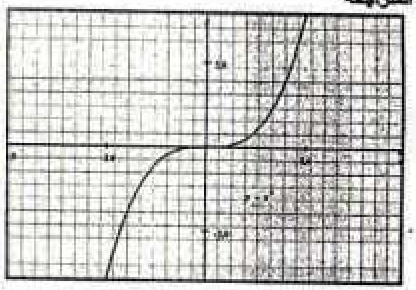
(لأن الدالة تربيع $f(x)=x^2$ متناقصة على المجال $]-\infty\ ;0]$)

مدرسة النهى 0557 69-13-13

عند تركيب الدوال المتناقصة تغير اتجاه المتراجحة

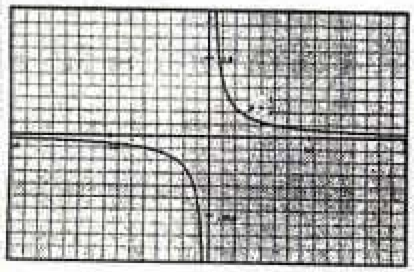
الرفع إلى القوة التكعيبية لمتراجحة :

لأن الدالة مكعب متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن تكعيب متراجحة يحافظ على اتجاه المتراجحة



معناه : إذا كان : $a(x)>b(x)$ فإن $(a(x))^3>(b(x))^3$ والعكس صحيح .

قلب طرفي متراجحة :



لأن الدالة مقلوب متناقصة تماما على $\mathbb{R}^*$ فإن قلب متراجحة يعكس اتجاه المتراجحة

معناه : إذا كان : $a(x)>b(x)$ فإن $\frac{1}{a(x)}<\frac{1}{b(x)}$

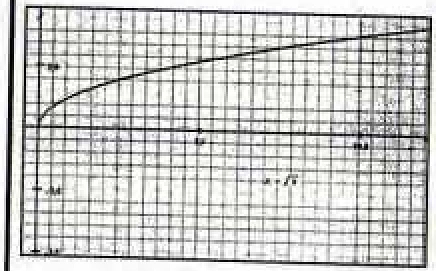
حيث $a(x);b(x)$ موجبان معا أو سالبان معا .

جذر متراجحة :

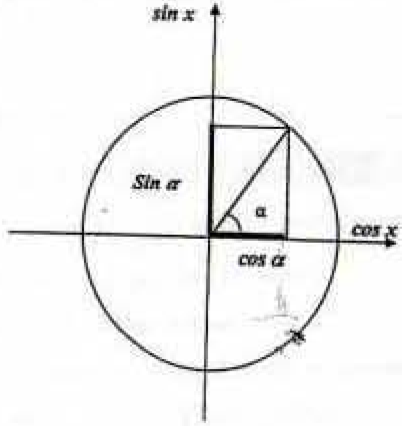
لأن الدالة جذر متزايدة على $]0 ; +\infty[$

فإن جذر متراجحة يحافظ على اتجاه المتراجحة :

معناه : إذا كان : $f(x) > h(x)$ فإن $\sqrt{f(x)} > \sqrt{h(x)}$



الحساب المُثلثي : تعاريف :



في مثلث قائم : نعرف

$\sin\alpha = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$; $\cos\alpha = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$\tan\alpha = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$; $\cot\alpha = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

من أشهر العلاقات $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

لكل x من R فإن :

$-1 \le \cos x \le 1$

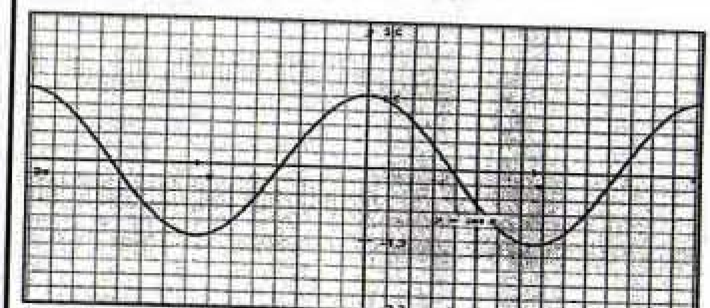
$-1 \le \sin x \le 1$

زكرياء
0771-80-55-45

منحنيات الدوال المثلثية

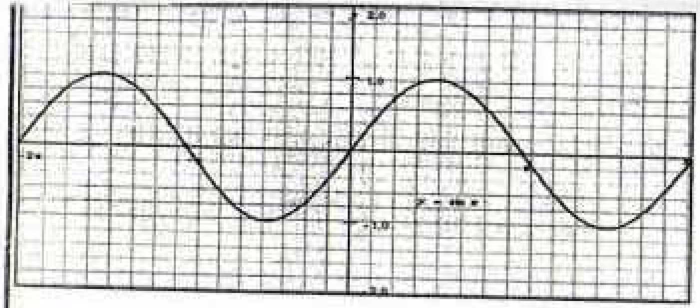
- $f(x) = \cos(x)$

- زوجية معناه
$\cos(-x) = \cos(x)$
بيانها متناظر بالنسبة إلى المحور $(y'y)$



- $f(x) = \sin(x)$

- فردية معناه
$\sin(-x) = -\sin(x)$
بيانها متناظر بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات .

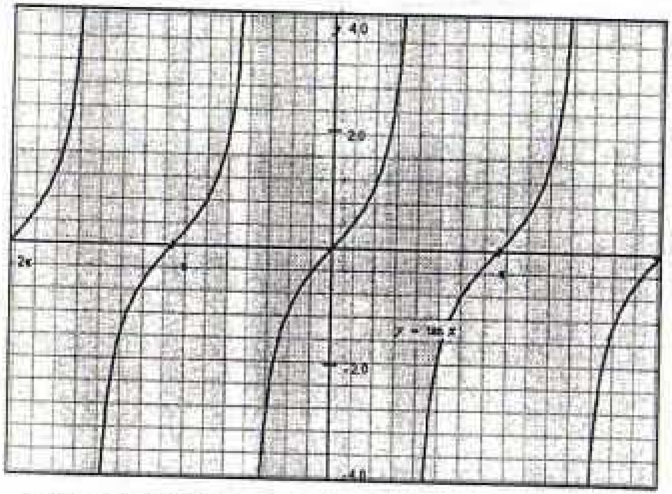


$f(x) = \tan(x)$

دالة فردية معناه
$\tan(-x) = -\tan(x)$

متزايدة على مجال تعريفها :

$R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$



ملاحظة : يمكن للطالب أن يلاحظ تغيرات الدوال $\sin(x)$; $\cos(x)$; $\tan(x)$ من المنحنيات السابقة ويستخدمها عند الحاجة .

مثلا : من اجل x , y من المجال $I = \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ فإنه إذا كان : $x < y$ فإن :

$\cos(x) > \cos(y)$ لأنها متناقصة على المجال I

و $\sin(x) < \sin(y)$ لأنها متزايدة على المجال I

و $\tan(x) < \tan(y)$ لأنها متزايدة على المجال I

[illegible]

- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

زكرياء
0771-80-55-45

- $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
- $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

دساتير مضاعفات الزوايا : عندما نضع $y = x$ في العلاقات : 1 و 3 و 5 من دساتير الجمع نجد :

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \qquad \cos 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases} \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

حالة خاصة :

$$\boxed{\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\cos x = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \\ 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases}$$

تحويل الجداء إلى مجموع :

$$2\sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$
$$2\cos x \sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$$
$$2\cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$
$$2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

زكرياء
0771-80-55-45

تحويل المجموع إلى جداء :

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x + \sin y = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

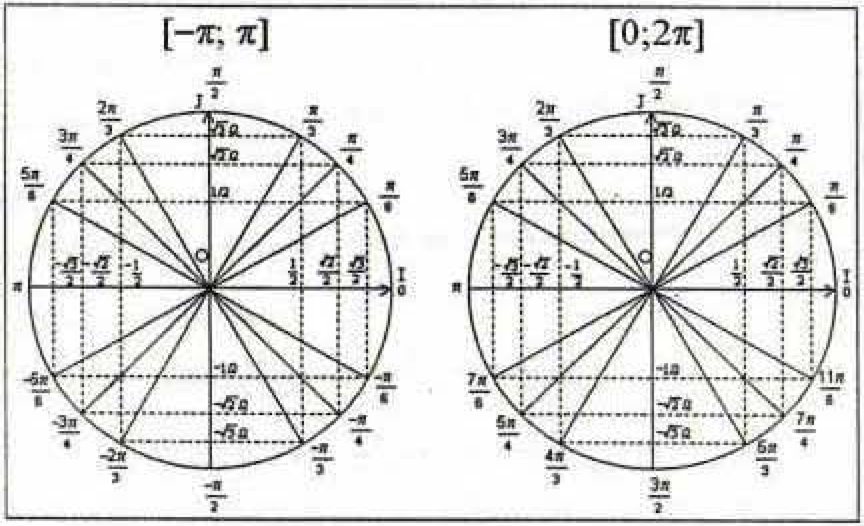
عبارة $\cos x$ و $\tan x$ و $\sin x$ بدلالة $\tan\frac{x}{2}$:

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad ، \quad \sin x = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad ، \quad \tan x = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

قاعدة :

$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi ,\ k \in Z$ و $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

قيم الزوايا الشهيرة :



	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$
Sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
Cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
Tan	$-\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$

قاعدة : الدالتان $\sin x$ و $\cos x$ دوريتان ودورهما 2π و الدالة $\tan x$ دورية ودورها π معناه :

لكل x من $\mathbb{R}$ فإن :

$$\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$$
$$\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$$
$$\tan(x+k\pi) = \tan(x)$$

مدرسة النهى
0557 69-13-13

المعادلات المثلثية :

1	$\sin a = \sin b \Leftrightarrow$	$a = b + 2k\pi$ أو $a = \pi - b + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
2	$\cos a = \cos b \Leftrightarrow$	$a = b + 2k\pi$ أو $a = -b + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

3. $\tan a = \tan b \Leftrightarrow a = b + k\pi$

4. $\cos x = a$ بشرط أن تكون : $-1 < a < +1$; فإنه يوجد عدد حقيقي c حيث $\cos x = c$ ومجموعة الحلول هي :

$x = c + 2k\pi$ أو $x = -c + 2k\pi$

5. $\sin x = a$ بشرط أن تكون : $-1 < a < +1$; فإنه يوجد عدد حقيقي c حيث $\sin x = c$ ومجموعة الحلول هي :

$x = c + 2k\pi$ أو $x = \pi - c + 2k\pi$

6. لحل المعادلات من الشكل : $\cos u = \sin v$ يجب تحويل الـ sin إلى cos أو العكس باستخدام القواعد في الجدول أعلاه .

المعادلات من الشكل : $a\cos x + b\sin x = c$

الخطوات : 1. نكتب العبارة على الشكل : $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2. نبحث عن الزاوية α التي تحقق ما يلي : $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

3. تصبح العبارة أعلاه من الشكل : $\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

4. وباستخدام دساتير الجمع يصبح : $\cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

5. ثم نعين x .

زكرياء 0771-80-55-45

مبادئ في الدوال العددية

النهايات: حالات عدم التعيين: 4 حالات فقط : $\pm\infty \mp \infty$ /1 ; $\infty \times 0$ /2 ; $\frac{0}{0}$ /3 ; $\frac{\infty}{\infty}$ /4

ملاحظة مهمة : لا تنس /1 $\frac{0}{\infty} = 0$ ، /2 $\frac{\infty}{0} = \infty$ ، /3 $(\mp\infty)\times(\mp\infty) = +\infty$ /4 $\frac{a}{\infty} = 0$ /5 $\frac{a}{0} = \infty ;\ a \neq 0$

1. نهاية دالة ثابتة : k : $\lim k = k$
2. نهاية ثابت في متغير : $\lim k \times f(x) = k \times \lim f(x)$
3. نهاية مجموع دالتين : $\lim(f+g) = \lim(f) + \lim(g)$ — نهاية مجموع = مجموع النهايات
4. نهاية جُداء : $\lim(f \times g) = \lim(f) \times \lim(g)$ — نهاية جُداء = جُداء النهايات
5. نهاية حاصل قسمة : $\lim\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim(f)}{\lim(g)}$ — نهاية قسمة = قسمة النهايات
6. نهاية جذر = جذر النهاية $\lim\sqrt{f} = \sqrt{\lim f}$.
7. نظرية الحصر في النهايات : إذا كان $f(x) < g(x) < h(x)$ على المجال $[a \ ; \ b]$ فإن :

$\lim f(x) < \lim\ g(x) < \lim\ h(x)$

قاعدة إجرائية : - النهاية عند $+\infty$ أو $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة .

- النهاية عند $+\infty$ أو $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة .

- الاستمرار عند نقطة $x = a$: f مستمرة عند نقطة فاصلتها $x = a$ إذا وفقط إذا : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
- الاشتقاق عند نقطة $x = a$:

f قابلة للاشتقاق عند $x = a$ إذا وُجدت النهاية : $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ أو $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

- الاشتقاق يمين $x = a$: إذا وجدت النهاية $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$

- الاشتقاق يسار $x = a$: إذا وجدت النهاية : $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l'$

<u>الحالة الأولى:</u> $l = l'$ نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة التي فاصلتها $x = a$.

<u>الحالة الثانية:</u> $l \neq l'$ نقول أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند النقطة التي فاصلتها $x = a$ وتسمى النقطة $(a ; f(a))$ نقطة زاوية يقبل المنحنى عندها نصفي مماسين معاملا توجيههما l و l' .

<u>الحالة الثالثة:</u> l أو l' يساوي ∞ المنحنى يقبل نصف مماس يوازي (yy') .

المماس : معادلة المماس عند نقطة $x = a$: $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

قاعدة: معامل توجيه (ميل) المماس $= f'(x_0)$ ، نذكر : ميل المماس $\frac{\text{فرق الترتيبين}}{\text{فرق الفاصلتين}}$

- مماس المنحنى يوازي المستقيم (d) ; $y = ax + b$ معناه $f'(x) = a$;
- مماس المنحنى يعامد المستقيم (d) ; $y = ax + b$ معناه $f'(x) \times a = -1$;

مدرسة النهضة 0557-69-13-13

ملاحظة: النقطة (a,b) ذروة للمنحني إذا وفقط إذا تحقق أمران : $\begin{cases} f(a)=b \\ f'(a)=0 \end{cases}$

الدوال الفردية والدوال الزوجية والدوال الدورية

أ- f فردية إذا وفقط إذا : $f(-x)=-f(x)$ لكل x و $-x$ من D_f والمنحنى (C_f) متناظر بالنسبة إلى المبدأ $O(0,0)$

ب- f زوجية إذا وفقط إذا : $f(-x)=f(x)$ لكل x و $-x$ من D_f والمنحنى (C_f) متناظر بالنسبة إلى المحور $(y'y)$

ج- f دورية ودورها a إذا وفقط إذا : $f(x+a)=f(x)$ لكل x من D_f

قواعد الاشتقاق

$f(x)$	λ	λx	x^n	$(u+v)$	$\sqrt{u}$	$\frac{u}{v}$	$u\times v$	u^n	$f[g(x)]$
$f'(x)$	0	λ	nx^{n-1}	$u'+v'$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	$u'v+v'u$	$nu^{n-1}u'$	$f'(g(x))\times g'(x)$

مشتق الدوال الجيبية:

$f(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(u)$	$\cos(u)$
$f'(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$u'\cos u$	$-u'\sin(u)$

المستقيمات المقاربة

أ- إذا كان : $\lim f(x)=a$ فإن المستقيم : $y=a$ مقارب للمنحنى (يوازي المحور $(x'x)$).

ب- إذا كان : $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$ فإن المستقيم : $x=b$ مقارب للمنحنى (يوازي المحور $(y'y)$).

ج- إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ فإن المستقيم : $y=ax+b$ مقارب للمنحنى (مائل).

نتيجة : لإثبات أن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارب للمنحنى نثبت : $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-y)=0$

المستقيم المقارب المائل :

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ → $y=ax+b$ ← $\lim(f(x)-ax)$

الفروع اللانهائية:

المرحلة الأولى : - نحسب : $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ ونميز ثلاث حالات :

أ- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$: المنحنى يقبل فرعا لا نهائيا في اتجاه المحور $(y'y)$.

ب- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$: المنحنى يقبل فرعا لا نهائيا في اتجاه المحور $(x'x)$.

ج- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\neq 0$ ننتقل إلى المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية : نحسب : $b=\lim(f(x)-ax)$ ونميز حالتين :

أ- $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\infty$ المنحنى يقبل فرعا لا نهائيا في اتجاه المستقيم : $y=ax$.

ب- في الحالة الأخرى فإن المستقيم المقارب المائل : $y=ax+b$.

الوضعية النسبية للمنحنى (C) الممثل للدالة f و المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=ax+b$

ندرس إشارة $\theta(x)$ حيث : $\theta(x)=f(x)-y$ ونميز ثلاث حالات :

أ- $\theta(x)>0$ نقول المنحنى (C) فوق المستقيم(Δ).

ب- $\theta(x)<0$ نقول المنحنى (C) تحت المستقيم (Δ).

ج- $\theta(x)=0$ وهي نقطة تقاطع المنحنى (C) والمستقيم(Δ) .

مركز التناظر: ثلاث طرائق:

أ- النقطة (α,β) مركز تناظر إذا وفقط إذا : $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$ لكل x و $(2\alpha-x)$ من D_f

ب- النقطة (α,β) مركز تناظر إذا وفقط إذا : $f(\alpha+x)+f(\alpha-x)=2\beta$ لكل $(\alpha+x)$ و $(\alpha-x)$ من D_f

ج- نستخدم دستور تغيير المعلم : نضع $\begin{cases} x=X+\alpha \\ y=Y+\beta \end{cases}$ ثم نعوض ونكتب y' بدلالة x'

ثم نبرهن أن الدالة الناشئة الجديدة $y'=g(x)$ فردية

محور التناظر: ثلاث طرائق:

أ- المستقيم $x=\lambda$ محور تناظر إذا وفقط إذا : $f(2\lambda-x)=f(x)$ لكل x و $(2\lambda-x)$ من D_f

ب- المستقيم $x=\lambda$ محور تناظر إذا وفقط إذا : $f(\lambda-x)=f(\lambda+x)$ لكل $(\lambda-x)$ و $(\lambda+x)$ من D_f

ج- نستخدم دستور تغيير المعلم بوضع [illegible] ثم نعوض ونكتب y' بدلالة x'

ثم نبرهن أن الدالة $y' = g(x)$ زوجية .

مبرهنة القيم المتوسطة: شروطها :

ا- f مستمرة على المجال $[a\,;b]$. ب- $f(a)\times f(b)<0$ ج- f رتيبة تماما على المجال $[a\,;b]$

إذا توفرت الشروط الثلاثة فإن يوجد عدد α وحيد من المجال $]a\,,b[$ تحقق $f(\alpha)=0$ (وتمثل بيانا نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المحور $(x'x)$).

ملاحظة: الشرط ج مرتبط بالوحدانية . ويلغى إذا لم ينص على أن α وحيد.

[illegible] : ا- f مستمرة على $[a\,;b]$.

ب- k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ أي : $f(a)<k<f(b)$

ج- f رتيبة تماما على المجال $[a\,;b]$

إذا توفرت الشروط الثلاثة فإن يوجد عدد α وحيد من المجال $]a\,,b[$ تحقق $f(\alpha)=k$ (وتمثل α بيانا فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $y=k$).

حالة خاصة:

ا- لإثبات أن $f(x)=ax+b$ تقبل حلا α من المجال : $]a\,,b[$ نضع : $g(x)=f(x)-(ax+b)$

ثم نطبق نظرية القيم المتوسطة على g .(وتمثل α بيانا فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $y=ax+b$).

ب- لإثبات أن $f(x)=h(x)$ تقبل حلا α من المجال : $]a\,,b[$ نضع : $g(x)=f(x)-h(x)$

ثم نطبق نظرية القيم المتوسطة على g .(وتمثل α بيانا فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المنحنى (C_g)).

نقطة الانعطاف : لتحديد نقطة الانعطاف نتبع فقريا الطريقة التالية :

- ننظر في جدول التغيرات هل توجد نقطة من المنحنى تنعدم عندها المشتقة الأولى $f'(x)$ ولا تغير إشارتها .
- إذا لم نجد نضطر إلى حساب المشتقة الثانية $f''(x)$ ثم نجعل $f''(x)=0$ ونعين x بشرط أن تغير $f''(x)$ الإشارة عند تلك القيمة

استنتاج المنحنيات (C_f) منحنى الدالة f معلوم.

لاستنتاج المنحنى (C_g) الممثل للدالة g من المنحنى (C_f) نميز عدة حالات :

ا- الحالة الأولى: g فردية نستخدم خطوتين :

1/ المطابقة (معناه متى يكون: $f(x)=g(x)$ ونتجلى عموما من تعريف القيمة المطلقة : $|x|=\begin{cases} x\,;\ x\ge 0\\ -x\,;\ x<0\end{cases}$)

2/ المناظرة (تناظر الجزء المطابق بالنسبة إلى المبدأ. ولا يهمنا الجزء الآخر).

ب- الحالة الثانية: g زوجية نستخدم نفس الخطوتين : إلا أن المناظرة تكون بالنسبة إلى $(y'y)$.

ج- الحالة الثالثة: نزيل القيمة المطلقة ونراعي القواعد التالية:

ا- $f(x)=g(x)$ على مجال I يكون تطابق بين المنحنيين .

ب- $f(x)=-g(x)$ على مجال I المنحنيان متناظران بالنسبة إلى $(x'x)$

ج- $f(-x)=g(x)$ على مجال I المنحنيان متناظران بالنسبة إلى $(y'y)$

د- $f(-x)=-g(x)$ على مجال I المنحنيان متناظران بالنسبة إلى المبدأ.

هـ- $g(x)=f(x)+k$ لرسم (C_g) نسحب (C_f) عموديا(إلى اتجاه $(y'y)$ بمقدار k. (إذا كان $k>0$ نسحب إلى الأعلى والعكس بالعكس).

و- $g(x)=f(x-a)+k$ حيث $a>0\,;k>0$ نسحب إلى اليمين مسافة a وإلى الأعلى مسافة k

نظرية في تغيرات دالة :

1. إذا كانت الدالتان f و g متزايدتين (أو متناقصتين) على مجال I فإن : f + g متزايدة (أو متناقصة) على المجال I .
(معناه : مجموع دالتين متزايدتين يعطي دالة متزايدة) أما طرح دالتين أو ضربهما أو حاصل قسمتهما فلا يعطي شيئا .

2. تغيرات مركب دالتين f و g يشبه ضرب الإشارات .
مثلا : g دالة متزايدة على المجال I و f متناقصة على المجال J = g (I) فإن مركب الدالتين f o g يعطي دالة متناقصة .

تقاطع المنحنيات :

1. تقاطع المنحنى (C_f) مع المحور $(x'x)$ نضع $f(x)=0$ ونعين x .
2. تقاطع المنحنى (C_f) مع المحور $(y'y)$ نضع $x=0$ ونحسب $f(0)$.
3. تقاطع المنحنى (C_f) مع المنحنى (C_g) نضع $f(x)=g(x)$ ونعين x ثم نعوض في أسهل الدالتين .
4. تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الذي معادلته : $y=ax+b$ نضع $f(x)=y$ ونعين x ثم نعوض في أسهل العبارتين

الدالة اللوغاريتمية

[illegible] 1. $\ln 1=0$ 2. $\ln(e)=1$

3. لوغاريتم الجداء : $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$ لكن : $\ln a\times \ln b$ لا يعطي شيئا .

4. لوغاريتم القسمة : $\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b=-\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$ لكن : $\frac{\ln a}{\ln b}$ لا يعطي شيئا .

5. لوغاريتم القوى : $\boxed{\ln\left(a^{n}\right)=n\ln(a)}$ لكن : $(\ln a)^{n}\neq n\ln(a)$

6. خاصية التباين : $\boxed{\ln(a)=\ln(b)\Leftrightarrow a=b}$ 7. $\boxed{\ln(a)>\ln(b)\Leftrightarrow a>b}$.

- الخواص 3 إلى 5 يشترط فيها أن تكون : $a>0$ و $b>0$

أما إذا كان : a و b حقيقيين غير معدومين فانه يجب الحفاظ على القيمة المطلقة مثلا : $\ln(a\times b)=\ln|a|\times\ln|b|$

و $\ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=\ln|x+1|-\ln|x-2|$

$$\ln(x-1)^{2}=2\ln|x-1|$$

و لا يصح إزالة القيمة المطلقة إلا إذا كان محتوى اللوغاريتم موجبا تماما .

- مجموعة التعريف : لتحديد مجموعة التعريف نراعي ثلاثة شروط :

1. شرط على المقامات ، يعرف $\frac{1}{p(x)}$ إذا كان : $p(x)\neq0$.
2. شرط على ما يخ اللوغاريتمات ، يعرف $\ln(p(x))$ إذا $p(x)>0$.
   و يعرف $\ln|p(x)|$ إذا $p(x)\neq0$.
   ويعرف $\ln(p(x))^{2}$ إذا $p(x)\neq0$.
3. شرط على الجذور ، يعرف $\sqrt{p(x)}$ إذا كان $p(x)\geq0$.

زكرياء
0771-80-55-45

الدالة المشتقة للدالة اللوغاريتمية :

قاعدة : $\boxed{(\ln(u))'=\frac{u'}{u}=(\ln|u|)'}$

لا ننس القواعد العامة التالية : أ - مشتق الجداء : $(u\times v)'=u'\times v+v'\times u$.

ب- مشتق القسمة : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-v'\times u}{v^{2}}$.

ج- مشتق الدالة المركبة : $(u^{n})'=nu^{n-1}.u'$

النهايات اللوغارتمية : نحفظ 5 نهايات +2

1. $\lim_{x\to0^{+}}\ln x=-\infty$
2. $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$
3. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=0^{+}$
4. $\lim_{x\to0^{+}}(x\ln(x))=0^{-}$

5. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
6. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\ln x)^{n}}{x}\right)=\lim\frac{1}{x}=0$
7. $\lim_{x\to0^{+}}x(\ln(x))^{n}=\lim_{x\to0^{+}}x=0$

تعميم :

1. $\ln(0^{+})=-\infty$ ، 2. $\ln(+\infty)=+\infty$ ، 3. $\frac{\ln(+\infty)}{(+\infty)}=0^{+}$ 4. $(0^{+})\ln(0^{+})=0^{-}$

5. $\frac{\ln(0+1)}{0}=1$

يشترط عند استخدام النهايات 3 و 4 و 5 التماثل

قاعدة : $\lim\ln(g(x))=\ln(\lim g(x))$

مثلا : $\lim_{x\to+\infty}\ln\sqrt{3x^{2}+2x-1}=\ln\sqrt{\lim_{x\to+\infty}3x^{2}+2x-1}=\ln\sqrt{\lim_{x\to+\infty}3x^{2}}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{3x-2}\right)=\ln\frac{2}{3}$$

الطريقة العامة في إزالة عدم التعيين :

1. إذا ظهر عند إجراء النهاية $\ln(+\infty)$ نستخدم عموما النهاية 3 : $\frac{\ln(+\infty)}{(+\infty)}=0^{+}$
2. إذا ظهر عند إجراء النهاية $\ln(0^{+})$ نستخدم عموما النهاية 4 : $(0^{+})\ln(0^{+})=0^{-}$
3. إذا ظهر عند إجراء النهاية $\ln(1)$ نستخدم عموما النهاية 5 : $\frac{\ln(0+1)}{0}=1$

ويستخدم من أجل ذلك عموما طرقا متعددة منها :

زكرياء
0771-80-55-45

1. العامل المشترك مثلا : $\lim_{x\to-\infty}x^{2}+3x-\ln(1-2x)=+\infty$ نكتبها على الشكل التالي :
$$(1-2x)\left(\frac{x^{2}+3x}{(1-2x)}-\frac{\ln(1-2x)}{(1-2x)}\right)$$
2. العامل المشترك داخل اللوغريتم مثلا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^{2}+1)}{x}=0$ نستخرج x^{2} داخل اللوغاريتم ثم نستخدم خواص اللوغاريتم
3. توحيد المقامات مثلا : $\lim_{x\to\frac{1}{2}^{+}}\frac{1}{2x-1}+\ln(2x-1)=+\infty$
4. إنشاء التماثل مثلا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{x}=0$ نضرب ونقسم في $(x+2)$.
5. استخدام خواص اللوغريتم $\lim_{x\to+\infty}2\ln x-\ln(x+1)=+\infty$
6. تحويل المتغير مثلا : $\lim_{x\to+\infty}\left((\ln x)^{2}-\ln x+3\right)=+\infty$
7. تعريف المشتق : $\lim_{x\to e}\frac{\ln(x)-1}{x-e}=\frac{1}{e}$ من الشكل $\lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)$

الدالة اللوغاريتمية للأساس الموجب a ($a\neq 1$) : قاعدة : $\log_a(x)=\dfrac{\ln x}{\ln a}$

الدالة المشتقة : $\left(\log_a g(x)\right)'=\left(\dfrac{\ln g(x)}{\ln a}\right)'=\dfrac{1}{\ln a}\times\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

الدالة الأُسِّيَّة للأساس e

خصائص :

1. $e^{g(x)}>0$ لكل x من D_g .
2. $a=b \Leftrightarrow e^a=e^b$
3. $a>b \Leftrightarrow e^a>e^b$ لأن الدالة الأسية $f(x)=e^x$ متزايدة تماما .
4. $e^{\ln(a)}=a$ لكل a موجب .
5. $a=\ln b \Leftrightarrow b=e^a$

الدالة المشتقة : $\left(e^{g(x)}\right)'=g'(x)\times e^{g(x)}$

النهايات الأسية : نحفظ 5 نهايات +2

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}=+\infty$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0^-$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}=1$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$

تصميم :

1. $e^{-\infty}=0^+$ 2. $e^{+\infty}=+\infty$ 3. $\dfrac{e^{(+\infty)}}{(+\infty)}=+\infty$ 4. $(-\infty)e^{(-\infty)}=0^-$ 5. $\dfrac{e^0-1}{0}=1$

يشترط عند استخدام النهايات 3 و 4 و 5 التماثل

قاعدة : $\lim e^{g(x)}=e^{\lim g(x)}$

مثلا : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\left(\frac{x+1}{2x}\right)}=e^{\lim\left(\frac{x+1}{2x}\right)}=e^{\frac{1}{2}}$

الطريقة العامة في إزالة عدم التعيين :

1. إذا ظهر عند إجراء النهاية $e^{(+\infty)}$ نستخدم عموما النهاية 3 : $\dfrac{e^{(+\infty)}}{(+\infty)}=+\infty$
2. إذا ظهر عند إجراء النهاية $e^{(-\infty)}$ نستخدم عموما النهاية 4 : $(-\infty)e^{(-\infty)}=0^-$
3. إذا ظهر عند إجراء النهاية $e^{(0)}$ نستخدم عموما النهاية 5 : $\dfrac{e^0-1}{0}=1$

ونستخدم من أجل ذلك عموما طرقا متعددة منها :

1. العامل المشترك مثلا : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x+1}-2x-3=+\infty$ نجعلها $(x+1)\left(\dfrac{e^{x+1}}{x+1}-\dfrac{2x+3}{x+1}\right)$
2. إنشاء التماثل مثلا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x+1}}{x}=+\infty$ نجعلها $\dfrac{e^{2x+1}}{2x+1}\times\dfrac{2x+1}{x}$
3. استخدام خواص اللوغريتم : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{2x}-e^x+1)-2x=0$
4. تحويل المتغير مثلا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+1}{2e^x-1}=\dfrac{1}{2}$ كما يمكن استخدام العامل المشترك .

الدالة الأسية للأساس a : قاعدة : $a^x=e^{x\ln a};\ a>0, x\in R$

الدالة المشتقة :

$$\left(a^{g(x)}\right)'=\left(e^{\ln(a^{g(x)})}\right)'=\left(e^{g(x)\ln a}\right)'=\ln a\, g'(x)e^{x\ln g(x)}=g'(x)a^{g(x)}\times\ln a$$

مجموعة التعريف : نراعي الجذور التربيعية و المقامات واللوغاريتم .

مثلا :

/1 $f(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}$ معرفة لكل x من R حيث $B(x)\neq 0$.

/2 $f(x)=\sqrt{A(x)}$ معرفة لكل x من R حيث $A(x)\geq 0$.

/3 $f(x)=Ln(A(x))$ معرفة لكل x من R حيث $A(x)>0$.

/4 $f(x)=Ln|A(x)|$ معرفة لكل x من R حيث $A(x)\neq 0$.

/5 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{B(x)}}$ معرفة لكل x من R حيث $B(x)>0$.

/6 $f(x)=\sqrt{\dfrac{A(x)}{B(x)}}$ معرفة لكل x من R حيث $\dfrac{A(x)}{B(x)}\geq 0$ معناه $A(x).B(x)\geq 0$ و $B(x)\neq 0$

ثم ننشئ جدول الإشارة .

/7 $f(x)=Ln\left(\dfrac{A(x)}{B(x)}\right)$ معرفة: $\dfrac{A(x)}{B(x)}>0$ معناه $A(x).B(x)>0$

/8 $f(x) = Ln\left|\dfrac{A(x)}{B(x)}\right|$ معرفة إذا : $A(x) \neq 0$ و $B(x) \neq 0$

/9 $f(x) = \dfrac{1}{Ln(B(x))}$ معرفة إذا : $\begin{cases} B(x) > 0 \\ \text{و} \\ Ln(B(x)) \neq 0 \end{cases}$

/10 $f(x) = Ln(A(x))^2$ معرفة إذا: $A(x) \neq 0$.

/11 $f(x) = (Ln\ A(x))^2$ معرفة إذا: $A(x) > 0$

الأعداد المركبة

تعريف : $i^2 = -1$

الشكل الجبري للعدد المركب : $z = a + ib$ حيث : a و b حقيقيان

يسمى العدد الحقيقي a : الجزء الحقيقي $Re(z)$ ويسمى b الجزء التخيلي $Im(z)$ للعدد المركب.

مرافق العدد المركب : $\bar{z} = a - ib$

قاعدة :

يكون العدد المركب حقيقيا إذا وفقط إذا كان جزؤه التخيلي معدوما أي : $Z \in R \Leftrightarrow Im(z) = 0$

يكون العدد المركب تخيليا صرفا إذا وفقط إذا كان جزؤه الحقيقي معدوما أي : $Z \in IR \Leftrightarrow Re(z) = 0$

قاعدة:

$$z \in R \Leftrightarrow z = \bar{z}$$
$$z \in IR \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$$

لاحظ :

1. $(a+ib)+(a-ib) = 2a$ معناه $z + \bar{z} = 2a$
2. $(a+ib)-(a-ib) = 2ib$
3. $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$ معناه $z\bar{z} = |z|^2$

الشكل المثلثي للعدد المركب :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r\ ,\ \theta]$$

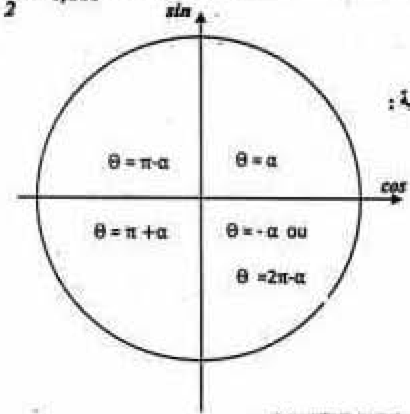
يسمى r طويلة العدد المركب z ولحسابه : $r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$

و تسمى θ عمدة العدد المركب z ولحساب $Arg(z)$ ننشئ جملة : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases}$ ونستفيد من قيم الزوايا الشهيرة .

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin\alpha$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1

لا تنس : $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ و $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$

كما يمكن أن نستفيد من الدائرة المثلثية التالية :



الشكل الأسي للعدد المركب : $r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

خصائص : $|e^{i\theta}| = 1$ ، $Arg(e^{i\theta}) = \theta$ ، $\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$

حالات خاصة : $e^{i\pi} = -1$; $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

دستور موافر : $(a+ib)^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$; $n \in Z$

جداء وقسمة عددين مركبين مكتوبين بالشكل المثلثي :

$$[r_1, \theta_1][r_2, \theta_2] = [r_1 r_2,\ \theta_1 + \theta_2]$$

$$\frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)] = \left[\frac{r_1}{r_2} ; \theta_1 - \theta_2\right]$$

حالة خاصة : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{[r ; \theta]} = \left[\dfrac{1}{r} ; -\theta\right]$

تساوي عددين مركبين :

1. بالشكل الجبري : $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

حالة خاصة : $a + ib = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

2. بالشكل المثلثي : $[r;\theta]=[r';\theta'] \Rightarrow \begin{cases} r=r' \\ \theta=\theta'+2k\pi \end{cases}$

التمثيل الديكارتي و التمثيل القطبي للعدد المركب :

كل عدد مركب : $z=a+iy=[r;\theta]$ يمكن تمثيله بنقطة في المستوي $A(a,b)$ أو يمثل قطبيا بشعاع $\vec{u}(r;\theta)$

بعض العُمد الشهيرة :

$$z\in R_+^* \Leftrightarrow Arg(z)=0+2k\pi \ ;k\in Z$$
$$z\in R_-^* \Leftrightarrow Arg(z)=\pi+2k\pi$$
$$z\in IR_+^* \Leftrightarrow Arg(z)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$
$$z\in IR_-^* \Leftrightarrow Arg(z)=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$$

خصائص المرافقات والعمد :

- $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
- $\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- $z\times\bar{z}=|z|^2=a^2+b^2$
- $\overline{z^n}=(\bar{z})^n$
- $z=\bar{z}\Leftrightarrow z\in R$
- $z+\bar{z}=0 \Leftrightarrow z\in iR$
- $Arg(\bar{z})=-Arg(z)+2\pi k$
- $Arg(\lambda z)=Arg(z)\ ,\ \lambda\in R^+;\lambda\neq 0$
- $Arg(\lambda z)=Arg(z)+\pi\ ;\ \lambda<0$
- $Arg(z^n)=n\,Arg(z)$
- $Arg(z_1\times z_2)=Arg(z_1)\times Arg(z_2)$
- $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=Arg(z_1)-arg(z_2)$

المعادلات من الدرجة الثانية في C : نستخدم عموما المميز Δ ولإيجاد الجذور التربيعية للمميز نفرض أن :
$\Delta=(a+ib)^2$

ولإيجاد العددين a و b ننشئ الجملة التالية : $\begin{cases} a^2-b^2=Re(\Delta) \\ a^2+b^2=|\Delta| \\ 2ab=Im(\Delta) \end{cases}$ ← أزيل من البرنامج

تطبيق الأعداد المركبة على الأطوال والزوايا :

البعد بين نقطتين : $AB=|z_B-z_A|=|z_A-z_B|$

الزاوية بين شعاعين : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\ [2\pi]$

وبصفة عامة :

$$\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}=[r;\theta] \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{DC}{BA}=r \\ (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=\theta \end{cases}$$

حالات خاصة :

$\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)\in R$ معناه $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=0$ أي أن الشعاعين متوازيان .

$\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\in R$ معناه : الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يوازي $\overrightarrow{AC}$ معناه النقاط A , B , C على استقامة واحدة .

$\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\in IR$ معناه : الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يعامد $\overrightarrow{AC}$ (والمثلث ABC قائم في A)

دستور اولر :

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

خصائص الطويلات :

- $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ وهي موجبة تماما .
- $z\bar{z}=|z|^2=a^2+b^2$
- $|z.z'|=|z|.|z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$
- $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ وتسمى المتباينة المثلثية .

الدوال الأصلية وحساب التكامل

قواعد التكامل غير المحدود :

1/ $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ [illegible]

$$2/\quad \int \left(\frac{u'}{u}\right) = \ln|u| + c$$

$$3/\quad \int \frac{u'}{u^n} = \frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + c \quad , n \neq 1$$

$$4/\quad \int u' \cdot u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1} \quad , n \neq -1$$

$$5/\quad \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$6/\quad \int u' e^u = e^u + c$$

$$7/\quad \int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c$$

$$8/\quad \int \ln(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}(ax+b)\ln(ax+b) - x + c$$

قانون التجزئة :

$$\int_a^b u \cdot v' = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v \cdot u'$$

حالات خاصة : 1. $\int a\,dx = ax + c$ 2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ 3. $\int e^x dx = e^x + c$ 4. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$

أصلية الدوال الجيبية:

$$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + c$$

$$\int \sin(ax+b)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

$$\int \cos(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$$

التكامل المحدود : إذا كان $F(x)$ أصلية الدالة $g(x)$ على المجال $[a \; ; \; b]$ فإن :

$$\int_a^b g(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

خواص : 1. $-\int_b^a g(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx$

2. $\int_a^c g(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx + \int_b^c g(x)\, dx$ تسمى نظرية شال في التكاملات .

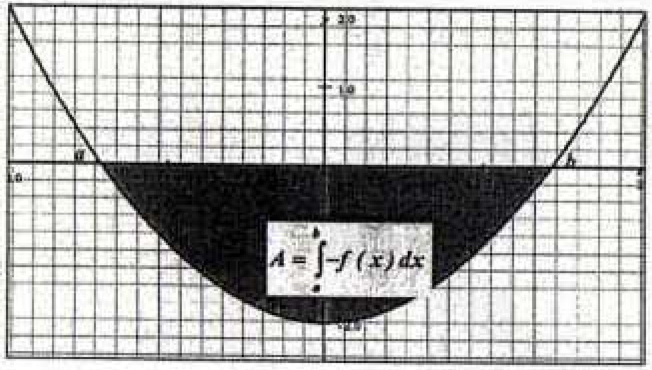
3. نظرية الحصر في التكاملات : إذا كان $f(x) < g(x) < h(x)$ على المجال $[a \; ; \; b]$ فإن :

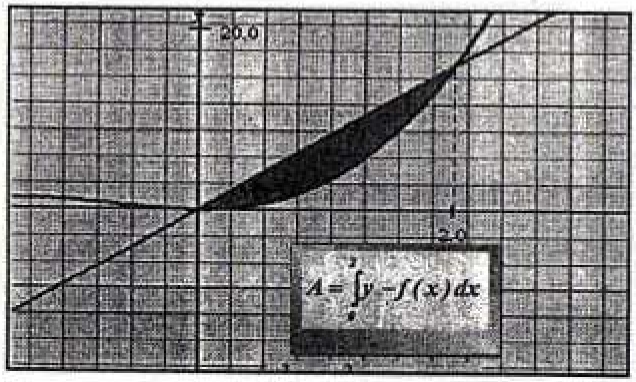
$$\int_a^b f(x)\, dx < \int_a^b g(x)\, dx < \int_a^b h(x)\, dx$$

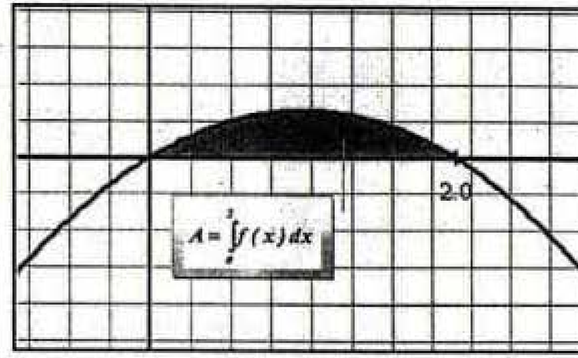
4. إذا كان $a \le b$ و $m \le f \le M$ فإن : $m(b-a) \le \int_a^b f(t)\, dt \le M(b-a)$

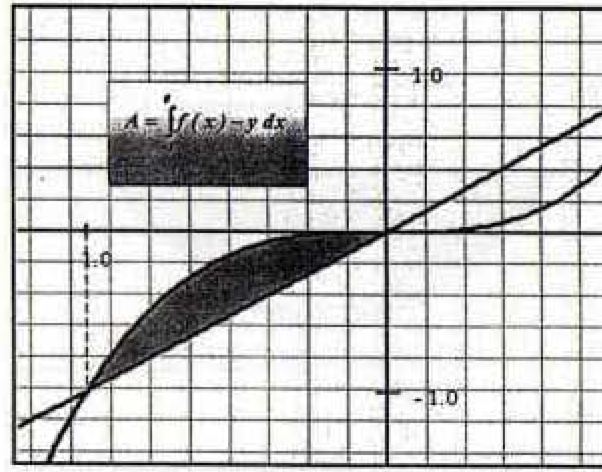
5. $\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$

حساب المساحات :









المتتاليات العددية

مدرسة الهمس
05569-13-13

عدد الحدود : عدد حدود المجموع التالي : $u_p+u_{p+1}+\dots+u_n$ هو : $n-p+1$

القانون العام لعدد الحدود :

$$\text{عدد الحدود} = \frac{\text{الدليل الأخير} - \text{الدليل الأول} + \text{الفارق}}{\text{الفارق}}$$

مثلا : عدد حدود المجموع التالي : $u_0+u_2+u_4+\dots\dots+u_{2n}$ هو : $\frac{2n-0+2}{2}=n+1$

عدد حدود المجموع التالي : $u_1+u_3+u_5+\dots+u_{2n+1}$ هو $\frac{(2n+1)-1+2}{2}=n+1$

المتتالية الهندسية :

تعريف : (u_n) هندسية إذا حققت التعريف : $u_{n+1}=u_n\times q$ لكل n من $\mathbb{N}$ حيث q عدد ثابت يسمى أساس المتتالية .

الحد العام للمتتالية الهندسية (بدلالة n) : $u_n=u_p\times q^{n-p}$

حالة خاصة : $u_n=u_0\times q^n$ إذا كان الحد الأول هو u_0 .

$u_n=u_1\times q^{n-1}$ إذا كان الحد الأول هو u_1 .

مجموع متتالية هندسية : $S_n=u_1+u_2+u_3+\dots+u_n=u_1\times\frac{1-q^n}{1-q}=u_1\times\frac{q^n-1}{q-1}$ ، $q\neq 1$

وبدلالة u_0 يكون المجموع : $S_n=u_0+u_1+\dots+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=u_0\times\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

وبصفة عامة : $\text{مجموع متتالية هندسية} = \text{الحد الأول} \times \frac{1-(\text{الأساس})^{\text{عدد الحدود}}}{1-(\text{الأساس})}$

الوسط الهندسي : إذا كان $a\ ;\ b\ ;\ c$ حدود متتابعة ـ أو متباعدة بنفس المسافة ـ من متتالية هندسية فإن : $b^2=a\times c$

المتتالية الحسابية :

تعريف : (u_n) حسابية إذا حققت التعريف : $u_{n+1}=u_n+r$ لكل n من $\mathbb{N}$ حيث r عدد ثابت يسمى أساس المتتالية .

الحد العام للمتتالية الحسابية (بدلالة n) : $u_n=u_p+(n-p)\times r$

حالة خاصة : $u_n=u_0+nr$ إذا كان الحد الأول هو u_0 .

$u_n=u_1+(n-1)r$ إذا كان الحد الأول هو u_1 .

زكرياء
0771-80-55-45

مجموع متتالية حسابية : $u_1+u_2+\dots+u_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)$

أو $u_0+u_1+\dots+u_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)$

وبصفة عامة : $\text{مجموع متتالية حسابية} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$

الوسط الحسابي : إذا كان $a\ ;\ b\ ;\ c$ حدود متتابعة ـأو متباعدة بنفس المسافة ـ من متتالية حسابية فإن $2b=a+c$

المتتالية المتقاربة :

تكون المتتالية (U_n) متقاربة إذا وفقط إذا وجدت لها نهاية معناه : $\lim_{n\to+\infty} u_n = b$

قاعدة : 1/ كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى متقاربة . (محدودة من الأعلى معناه : $u_n < a$ لكل n من N)

2/ كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى متقاربة .(محدودة من الأدنى معناه : $u_n > a$ لكل n من N)

المتتالية المتزايدة تماما :

تكون (u_n) متزايدة تماما إذا : $u_{n+1} - u_n > 0$ لكل n من N أو $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

المتتالية المتناقصة :

تكون (u_n) متناقصة إذا : $u_{n+1} - u_n \le 0$ لكل n من N أو $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le 1$

المتتاليتان المتجاورتان $(u_n);(v_n)$: تحقق شرطين :

1/ إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة 2/ $\lim(u_n - v_n) = 0$ معناه يؤولان إلى نفس النهاية

قاعدة في النهايات : إذا كان العدد الحقيقي q حيث $-1 < q < 1$ فإن : $q^{\infty} = 0$

وإذا كان : $q > 1$ فإن : $q^{+\infty} = +\infty$

أما إذا كان : $q \le -1$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} q^n$ غير موجودة .

مدرسة النهى
0557 69-13-13

المتتالية الثابتة :

تعريف : تكون المتتالية ثابتة إذا تساوت كل حدودها معناه : $u_0 = u_1 = \cdots = u_n$

أو بعبارة أخرى : $u_{n+1} - u_n = 0$ لكل n من N

مجموع متتالية ثابتة = عدد الحدود × الحد الأول

تغيرات المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_{n+1} = f(u_n)$

i. ننظر في رتابة الدالة $f(x)$ المكافئة للعلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$

ii. نحسب إشارة $u_1 - u_0$ ونميز حالتين

أ/ $u_1 - u_0 > 0$ نتوقع أن تكون المتتالية متزايدة تماما ثم نبرهن بالتراجع $u_{n+1} > u_n$ لكل n من N .

ب- $u_1 - u_0 < 0$ نتوقع أن تكون المتتالية متناقصة تماما ثم نبرهن بالتراجع $u_{n+1} < u_n$ لكل n من N.

نهاية المتتالية (u_n) بيانيا : هي فاصلة نقطة تقاطع المنحنى مع المستقيم الذي معادلته $y = x$

القواسم والمضاعفات (خاص بشعبة الرياضيات)

قاعدة 1 : كل عددين متتابعين أوليان فيما بينهما معناه : $a \wedge (a+1) = 1$

قاعدة 2 : إذا كان عدد a أوليا مع عددين آخرين $b ; c$ فإنه أوليا مع جدائهما معناه : $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow a \wedge bc = 1$

قاعدة 3 : $a \wedge b = 1 \Rightarrow a^p \wedge b^k = 1$ حيث $(p,k) \in N^2$

قاعدة 3 : كل عدد طبيعي n غير أولي أكبر تماما من 1 $(n \ge 2)$ يقبل قاسما أوليا a حيث $a \le \sqrt{n}$

نرمز بـ :

$$PGCD(a;b) = a \wedge b$$
$$PCCM(a;b) = a \vee b$$

طريقة : لحساب القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b :

- الطريقة التحليلية : نحلل كلا من a و b إلى عوامل أولية ثم : d هو جداء العوامل المشتركة بأصغر أس .
- خوارزمية إقليدس : d هو آخر باق غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس .

قاعدة : كل قاسم مشترك لعددين طبيعيين a و b فإنه يقسم القاسم المشترك الأكبر بينهما

وبالرموز : $\begin{cases} \alpha / a \\ \alpha / b \end{cases} \Rightarrow \alpha / (a \wedge b)$

زكرياء
0771-80-55-45

خواص :

1. $d / a \Rightarrow d / (ka) \ ; k \in N$ إذا قسم عدد d عددا a فإنه يقسم مضاعفاته .
2. $\begin{cases} a / b \\ a / c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a / (a+b) \\ a / (a-b) \\ a / (a \times b) \\ a / am + bn \end{cases}$ إذا قسم عدد" عددين فإنه يقسم المجموع و الضرب وحاصل الطرح
3. $a \wedge b = b \wedge a$ خاصية التبديل
4. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ خاصية التجميع
5. $a \wedge a = a$ خاصية عدم النمو .
6. $ka \wedge kb = k(a \wedge b)$ خاصية العامل المشترك حيث $k \in N$

قاعدة : إذا كان $a \wedge b = d$ فإنه يوجد عددان a' و b' طبيعيان أوليان فيما بينهما حيث : $a = d \times a'$ و $b = d \times b'$

[redacted] أو : $\boxed{m = \frac{a \times b}{d}}$

تنبيه : القاعدة خاصة بعددين فقط ولا يجوز تعميمها .

نتائج :

1. إذا كان العددان a و b أوليان فيما بينهما فإن : $m = a \times b$

2. $\begin{cases} a/c \\ b/c \end{cases} \Rightarrow (a \vee b)/c$ إذا قسم عددان عددا آخر فإن مضاعفهما يقسمه كذلك .

خواص :

1. $a \vee b = b \vee a$ خاصية التبديل
2. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ خاصية التجميع
3. $a \vee a = a$ خاصية عدم النمو
4. $ka \vee kb = k(a \vee b)$ خاصية العامل المشترك حيث $k \in N$

نظرية غوص : إذا قسم عدد a جداء عددين b ; a وكان أوليا مع أحدهما فإنه يقسم العدد الآخر

وبالرموز : $\begin{cases} a/(b \times c) \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow a/c$

نظرية بيزو : يكون العددان الطبيعيان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا وُجد زوج من الأعداد الصحيحة $(x;y)$ حيث :

$$ax + by = 1$$

مثلا : $(3 ، 2)$ أوليان فيما بينهما لأنه يوجد زوج $(1- ، 1)$ يحقق المعادلة أعلاه

$(n+1 ; n)$ أوليان فيما بينهما لأنه يوجد زوج $(1- ، 1)$ يحقق المعادلة أعلاه

$(1+n^2 ; n)$ أوليان فيما بينهما لأنه يوجد زوج $(-n ; 1)$ يحقق المعادلة أعلاه

مدرسة النهى
0557 69-13-13

الموافقة بترديد n

تعريف : $a \equiv b \ [n]$ إذا وفقط إذا : $(a-b)$ مضاعف للعدد n أي $a - b = kn$ حيث k عدد صحيح

حالة خاصة : إذا كان $0 < b < n$ فإن b يمثل باقي قسمة العدد a على n .

خواص الترديد :

1. إضافة عدد صحيح α : $a \equiv b \ [n] \Leftrightarrow a + \alpha \equiv b + \alpha \ [n]$
2. الضرب في عدد صحيح α غير معدوم
   i. الضرب الجزئي : $a \equiv b \ [n] \Leftrightarrow a \times \alpha \equiv b \times \alpha \ [n]$
   ii. الضرب الكلي : $a \equiv b \ [n] \Leftrightarrow a \times \alpha \equiv b \times \alpha \ [n \times \alpha]$
3. القسمة على عدد صحيح α غير معدوم :
   i. القسمة الجزئية : $a \times \alpha \equiv b \times \alpha \ [n] \Rightarrow a \equiv b \ [n]$ بشرط $n \wedge \alpha = 1$ (أوليان فيما بينهما)
   ii. القسمة الكلية : $a \times \alpha \equiv b \times \alpha \ [n \times \alpha] \Leftrightarrow a \equiv b \ [n]$
4. الجمع طرفا إلى طرف : $\begin{cases} a \equiv b \ [n] \\ a' \equiv b' \ [n] \end{cases} \Rightarrow a + a' \equiv b + b' \ [n]$
5. الضرب طرفا الى طرف : $\begin{cases} a \equiv b \ [n] \\ a' \equiv b' \ [n] \end{cases} \Rightarrow a \times a' \equiv b \times b' \ [n]$
6. الرفع إلى قوة طبيعية : $a \equiv b \ [n] \Rightarrow a^n \equiv b^n \ [n]$ و العكس غير صحيح .

الاحتمالات

زكرياء 0771-80-55-45

تذكير : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n$ حالات خاصة : $2! = 2$; $0! = 1$

التوفيقة : C_n^p هو عدد طرق اختيار P عنصرا من n عنصرا بدون مراعاة للترتيب .

$$P \le n \quad C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

الترتيبة : A_n^p هو عدد طرق ترتيب P عنصرا من n عنصرا متمايزة مثنى مثنى (لا يسمح فيها التكرار).

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

قائمة : لإنشاء P قائمة من n عنصرا فإن هناك n^p طريقة .

حالات خاصة : $C_n^n = 1$; $C_n^1 = n$ خاصية التناظر : $C_n^p = C_n^{n-p}$ ، $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$

مثلا : $C_{13}^4 = C_{13}^9$ (عدد طرق اختيار 4عناصر من 13 عنصرا يساوي عدد طرق اختيار 9عناصر من 13 عنصرا)

الاحتمال : احتمال الحدث A = [illegible]

خواص الاحتمال :

الخاصية	لغة الحوادث	أجزاء E
$0 \ge p(A) \ge 1$	حادثة كيفيةA	A
$p(\phi) = 0$	الحادثتان الأكيدة و المستحيلة	ϕ ، E
$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$	غير متلائمتين A ، B	$A \cap B = \phi$
$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$	$\overline{A}$ الحادثة العكسية للحادثة A	$\overline{A}$
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$	كيفيتانB و A	A ، B

إذا كان : $A_1, ..., A_n$ تجزئة للحدث A فإن : $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

إذا الحدث A متساوي الاحتمالات فإن : $P(A) = \frac{Card A}{Card \Omega}$.

الاحتمالات الشرطية : لتكن A حادثة من مجموع المخارج E حيث $p(A) \neq 0$. نعرّف على E احتمالا جديدا يرمز له بالرمز $p_A(B)$

حيث من أجل كل حادثة B نكتب $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ $p_A(B) = p(A/B)$ و نقرأ " إحتمال B علما أن A محققة "

إذا كان الحدثان A و B مستقلين فإن : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

المتغير العشوائي :

X_i	x_1	x_2	....	x_n	
$P(X=x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	.....	$P(x_n)$	$\sum P(X=x_i)=1$
$X_i\,P(X_i)$	$x_1\,P(x_1)$	$x_2\,P(x_2)$	.....	$x_n\,P(x_n)$	$\sum x_i\,P(x_i)=E(X)$
$X_i^2\,P(X_i)$	$x_1^2\,P(x_1)$	$x_2^2\,P(x_2)$	....	$x_n\,P(x_n)$	$\sum x_i^2\,P(x_i)$

الأمل الرياضي : $E(X) = \sum x_i P(x_i) = x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2) + \dots + x_n P(x_n)$

التباين : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(E(X)\right)^2$

الانحراف المعياري : $\sigma_x = \sqrt{V(x)}$

قواعد السحب :

I. إذا كان السحب في آن واحد نستخدم توفيقة $C_n^p = \frac{n!}{P!(n-p)!}$ حيث P العدد المسحوب و n العدد الموجود (الكلي)

II. إذا كان السحب متتابعا (واحدة بعد أخرى) نراعي حالتين :

1. دون إرجاع الأولى قبل السحب الموالي ، نستخدم ترتيبة $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
2. مع إرجاع الأولى قبل السحب الموالي ، نستخدم في هذه الحالة قائمة n^p

ملاحظة : يستحسن في كثير من التمارين ذات العمليات المتتابعة استخدام شجرة الاحتمالات

مدرسة النهى
0557-69-13-13

بين حروف العطف والعمليات الرياضية :

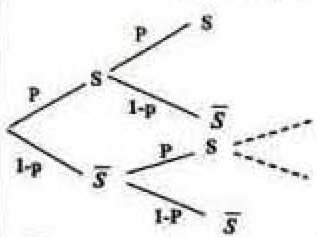
1. عند تعبيرنا للحرفين " و " أو " ثم " نستخدم عملية الضرب " x ".
2. عند تعبيرنا للحرف " أو " نستخدم عمليات الجمع " + ".

قانون برنولي (قانون ذو حدين) :

تعريف :

- نسمي تجربة برنولي كل تجربة عشوائية لا تحوي إلا مخرجين متعاكسين S و $\overline{S}$
- نسمي مخطط برنولي كل تكرار لتجربة برنولي متماثلة ومستقلة .

مثلا : رمي قطعة نقود لها مخرجان متعاكسان فقط هما : الوجه (S) الذي احتماله P و القفا ($\overline{S}$) الذي احتماله 1- P
وعندما نرمي قطعة النقود هذه 10 مرات فإننا نحصل على مخطط برنولي .



إذا أجرينا n تجربة فإن :

1. احتمال الحصول على عدد k من النجاحات هو : $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ حيث $0 \le k \le n$

2. الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X تبعا لقانون برنولي : $E(X) = n\,p$
3. الانحراف المعياري لـ X : $V(X) = n\,p\,(1-p)$
4. التباين : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

مثلا : نرمي بحجر نرد غير مزيف 10 مرات متتابعة ونعتبر المتغير X الذي يمثل الحصول على الرقم 6 .
احتمال الحصول على الرقم 6 في الرمية الواحدة $P = \frac{1}{6}$ واحتمال عدم الحصول على الرقم 6 هو $1-p = 1-\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

احتمال الحصول 8 مرات على الرقم 6 هو : $p(X=8) = C_{10}^{8}\left(\frac{1}{6}\right)^8\left(\frac{5}{6}\right)^2$

الأمل الرياضي (معدل الحصول على الرقم 6) هو : $E(X) = n \times p = 10 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$

زكرياء
0771-80-55-45

قوانين الاحتمالات المستمرة :

تعريف :

كثافة احتمالات :
نسمي كثافة احتمالات على المجال I كل دالة مستمرة وموجبة على المجال I وتحقق :

$\int_a^b f(t)\,dt = 1$ إذا كان : $I = [a\ ,\ b]$

$\lim \int_a^x f(t)\,dt = 1$ إذا كان : $I = [a\ ,\ +\infty[$

$\left(\lim \int_x^a f(t)\,dt + \lim \int_a^x f(t)\,dt\right) = 1$ إذا كان : $I = \mathbb{R}$

خاصية : نقول عن متغير عشوائي X يتبع قانون احتمالات مستمر كثافته f على المجال I إذا كان من أجل كل x و y من I فإن :

- $p(x \le X \le y) = \int_x^y f(t)\,dt$
- $p(X \le x) = \int_a^x f(t)\,dt$
- $p(X \ge x) = 1 - \int_a^x f(t)\,dt$

ملاحظة : الاحتمال $p(X \le x)$ تمثل المساحة تحت المنحنى الممثل للدالة $t \mapsto f(t)$ من أجل $t \in [a\ ,\ x]$

أمثلة :

1. عين العدد الحقيقي α حتى تكون الدالة المعرفة على المجال $[0\ ,\ 1]$ بـ : $f(x) = x + \alpha$ كثافة احتمال على $[0\ ,\ 1]$ ؟

الجواب : تعين قيمة α لكي يكون : $\int_0^1 (x+\alpha)\,dx = 1$ وبعد إجراء الحساب نجد $\alpha = \frac{1}{2}$.

2. لتكن f دالة [redacted] على المجال $[a\ ,\ b]$ ما قيمة f حتى تكون كثافة ؟

الجواب : نسمي $f(t)=\lambda$ ونعين قيمة λ حتى يكون $\int_a^b f(t)\,dt=1$ معناه $\int_a^b \lambda\,dt=1$ نجد $\lambda=\dfrac{1}{b-a}$.

3. نعتبر $\lambda>0$ اثبت أن الدالة f المعرفة على R_+ بـ $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ كثافة احتمالات على R_+.

الجواب : نحسب $\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt=\lambda\left[-\dfrac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^x=1-e^{-\lambda x}$ ثم نجري النهاية

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^{-\lambda x})=1$

الخلاصة :

- إذا كان f دالة [redacted] على المجال $[a\ ,\ b]$ فإن : $f(t)=\dfrac{1}{b-a}$ وتسمى P **قانونا منتظما** .
- إذا كان $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ حيث $\lambda>0$ يسمى **P قانونا أسيا بوسيط λ**.

دراسة الإشارة

1. إذا كان $a\neq 0$ فإن : $\dfrac{1}{a}$ لها نفس إشارة a .
2. $\sqrt{a}\ ,\ |a|\ ,\ a^2$ تساوي الصفر إذا وفقط إذا $a=0$.
   إذا كان : $a\neq 0$ فإن : $a^2>0$ و $|a|>0$.
   إذا كان : $a>0$ فإن : $\sqrt{a}>0$.
   لا توجد الإشارة " – " في إشارات : $\sqrt{a}\ ,\ |a|\ ,\ a^2$
3. إشارة x^3 هي إشارة x .
4. إذا كان : $a>0$ فإن إشارة $\ln a$ من إشارة $a-1$.
5. $e^a>0$ لكل a حقيقي .
6. إشارة $\dfrac{a}{b}$ هي إشارة $a\times b$ (حيث $b\neq 0$) (إشارة القسمة هي إشارة الجداء).
7. لتحديد إشارة حاصل قسمة $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ أو إشارة الجداء $A(x)\times B(x)$ نحدد إشارة $A(x)$ وإشارة $B(x)$ في جدول إشارة ثم نجري قسمة الإشارات أو ضرب الإشارات .
8. غالبا لا تحدد إشارة المجموع $A(x)+B(x)$ باستخدام جدول الإشارة ، و لدراسة إشارة $A(x)+B(x)$ نحول المجموع إلى جداء أو إلى حاصل قسمة .
9. إشارة كثير حدود من الدرجة الأولى I :

x		$-b/a$	
$ax+b\ ,\ (a\neq 0)$	عكس إشارة a	0	مثل إشارة a

10. إشارة كثير حدود من الدرجة II : المميز $\Delta>0$

[illegible]					
[illegible]	مثل إشارة a	0	عكس إشارة a	0	مثل إشارة a

مدرسة النهى 13-13-69 0557

11. $\Delta=0$

x		$\cdot$	
ax^2+bx+c	مثل إشارة a	0	مثل إشارة a

12. $\Delta<0$

x	
ax^2+bx+c	مثل إشارة a

13. إشارة اللوغاريتم

x		$\cdot$	
$a\ln(x)+b$	عكس إشارة a	0	مثل إشارة a

14. تعميم

x		$\cdot$	
$a\ln(a'x)+b$	عكس إشارة $a\times a'$	0	مثل إشارة $a\times a'$

15. الدالة الأسية : a و b من نفس الإشارة .

x	
ae^x+b	مثل إشارة a

16. a و b من إشارتين مختلفتين .

x		$\cdot$	
ae^x+b	عكس إشارة a	0	مثل إشارة a

17. تعميم

x		$\cdot$	
$ae^{a'x}+b$	عكس إشارة $a\times a'$	0	مثل إشارة $a'\times a$

18.

لحل متراجحة $f(x)<g(x)$ نتبع الخطوات التالية :

أ. نجعل المتراجحة صفرية : $f(x)-g(x)<0$.
ب. ندرس إشارة $f(x)-g(x)$.
ت. ننظر في أي مجال تتحقق الإشارة " – " .

19.

لدراسة إشارة $f(x)$ في مجال معين I نتبع الخطوات التالية :

أ. نحدد جذور المعادلة $f(x)=0$
ب. ننشئ جدول الإشارة .

20.

الدراسة البيانية لإشارة الدالة $f(x)$:

أ. $f(x)<0$ معناه في أي مجال يكون المنحنى (C_f) تحت المحور $x'x$.
ب. $f(x)>0$ معناه في أي مجال يكون المنحنى (C_f) فوق المحور $x'x$.
ت. $f(x)>k$ معناه في أي مجال يكون المنحنى (C_f) فوق المستقيم $y=k$.

مدرسة النهى 13-13-69 0557

المعادلات التفاضلية:

المعادلة	الحل
$f'(x)=af(x)$ أو $y'=ay$	$f(x)=Ce^{ax}$
$f'(x)=af(x)+b$ أو $y'=ay+b$	$f(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$
$y''+w^2y=0$	$f(x)=a\cos(wx)+b\sin(wx)$ $=\beta\cos(wx+\varphi)$

التحويلات النقطية

التعريف الهندسي :

1. M' صورة النقطة M بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ إذا وفقط إذا كان : $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$
2. M' صورة النقطة M بالتحاكي الذي مركزه ω ونسبته K إذا وفقط إذا كان

$$\overrightarrow{\omega M'}=k\,\overrightarrow{\omega M} \quad \text{حيث} \quad k\in R^*-\{1\}$$

3. M' صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه ω وزاويته θ إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{cases}\omega M'=\omega M\\ (\overrightarrow{\omega M},\overrightarrow{\omega M'})=\theta\end{cases}$$

4. M' صورة النقطة M بالتشابه الذي مركزه ω وزاويته θ ونسبته K إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{cases}\|\overrightarrow{\omega M'}\|=k\|\overrightarrow{\omega M}\|\\ (\overrightarrow{\omega M},\overrightarrow{\omega M'})=\theta\end{cases}$$

مدرسة النهى
055769-13-13

التحولات النقطية والأعداد المركبة :

ليكن العدد المركب $z=x+iy$ صورته في المستوي النقطة $M(x,y)$ ، و العدد المركب $z'=x'+iy'$ صورته في المستوي النقطة $M'(x';y')$ حيث : $f(M)=M'$

$$z'=az+b$$

المتحكم في طبيعة التحويل هو العدد : a

الحالة (1) : $a=1$ فإن التحويل f هو انسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}x_b\\y_b\end{pmatrix}$

الحالة (2) : $a\in R^*-\{1\}$ فإن التحويل f هو تحاك : نسبته a ومركزه النقطة الصامدة التي لاحقتها $\frac{b}{1-a}$

الحالة (3) : $a\in C$ و $|a|=1$ فإن التحويل f هو دوران : - زاويته $Arg(a)$ ومركزه النقطة الصامدة .

الحالة (4) : $a\in C$ و $|a|\neq 1$ فإن التحويل f هو تشابه : - نسبته $|a|$

- زاويته $Arg(a)$

- ومركزه النقطة الصامدة التي لاحقتها $\frac{b}{1-a}$

الحساب الشعاعي والهندسة التحليلية :

تساوي شعاعين : نقول عن شعاعين أنهما متساويان إذا كان لهما : 1. نفس المنحى 2. نفس الاتجاه 3. نفس الطويلة .

مجموع شعاعين : $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$

باستخدام طريقة الإغلاق فإن الشعاع $\vec{w}$ هو بدء الشعاع الأول $\vec{u}$ ونهاية الشعاع الأخير $\vec{v}$.

طول شعاع المحصلة :

$$\|\vec{w}\|=\sqrt{u^2+v^2+2(u)(v)\cos\beta}$$

علاقة شال في الأشعة :

من أجل ثلاث نقاط A , B , C من المستوي فإن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

عمليات على الأشعة :

1. $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$
2. $k(k'\vec{u})=(kk')\vec{u}$
3. $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$
4. $k\vec{u}=\vec{0}$ يعني إما : $k=0$ أو $\vec{u}=\vec{0}$
5. طرح شعاعين : $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$ حيث $(-\vec{v})$ هو الشعاع المعاكس للشعاع $\vec{v}$.
6. جداء شعاع $\vec{u}$ في عدد حقيقي غير معدوم k : نميز حالتين :

أ. الشعاعان $k\vec{u}$; $\vec{u}$ لهما نفس المنحى ونفس الاتجاه إذا كان : $k>0$.

ب. الشعاعان $k\vec{u}$; $\vec{u}$ لهما نفس المنحى ومتعاكسين في الاتجاه إذا كان : $k<0$.

ت. $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$

زكرياء
0771-80-55-45

الارتباط الخطي بين شعاعين :

الشعاعان $\vec{v}$; $\vec{u}$ مرتبطان خطيا إذا وجد عدد حقيقي k حيث : $\vec{u}=k\vec{v}$

نتيجة : الشعاعان المرتبطان خطيا لهما نفس المنحى .

الزوايا الموجهة لشعاعين :

إذا كان x قيسا للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ الموجهة فإن كل الأعداد من الشكل $x+2k\pi$ هي أقياس للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$.

القيس الرئيسي : من بين أقياس الزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ يوجد قيس وحيد على المجال $]-\pi\,,\pi]$ يسمى القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$.

علاقة شال : $(\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},\vec{w})+(\vec{w},\vec{v})$

مدرسة النهى
055769-13-13

نتائج : من اجل كل شعاعين غير معدومين $\vec{v}$; $\vec{u}$ لدينا :

1. $(\vec{u},\vec{v})=-(\vec{v},\vec{u})$
2. $(\vec{u},\vec{v})=(-\vec{u},\vec{v})+\pi$
3. $(\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},-\vec{v})+\pi$
4. $(\vec{u},\vec{v})=(-\vec{u},-\vec{v})$

الزوايا الموجهة المتقايسة : إذا قيسا α للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ و α' قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u'},\vec{v'})$ تكون الزاويتان متقايستين إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح k يحقق : $\alpha'=\alpha+2k\pi$.

الزوايا الموجهة والارتباط الخطي : الشعاعان $\vec{v}$; $\vec{u}$ مرتبطان خطيا إذا وجد عدد صحيح k حيث :

$$(\vec{u},\vec{v})=2k\pi \quad \text{أو} \quad (\vec{u},\vec{v})=\pi+2k\pi$$

خاصية : من اجل كل شعاعين غير معدومين $\vec{v}$; $\vec{u}$ ، ومن اجل كل عددين حقيقيين k و k' لدينا :

- إذا كان k و k' من نفس الإشارة فإن : $(k\vec{u},k'\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$
- إذا كان k و k' من إشارتين مختلفتين فإن : $(k\vec{u},k'\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$

مثلا : إذا كان $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{3}$ فإن $(-4\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}$; $(\vec{u},2\vec{v})=\frac{\pi}{3}$.

توازي مستقيمين :

يكون المستقيمان (AB) ، (CD) متوازيين إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overline{AB}$; $\overline{CD}$ مرتبطين خطيا .

نتيجة : ثلاث نقاط على استقامة واحدة

النقط A , B , C على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overline{AB}$; $\overline{CD}$ مرتبطين خطيا .

إحداثيات نقطة ومركبتا شعاع : ليكن $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ معلما في المستوي

1. من أجل كل نقطة M من المستوي توجد ثنائية وحيدة من الأعداد الحقيقية $(x\,;y)$ حيث : $\overline{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$

2. من أجل كل شعاع $\vec{u}$ توجد ثنائية وحيدة من الأعداد الحقيقية $(x\,;y)$ حيث : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ ونرمز له $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

نتائج : ليكن $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ معلما في المستوي وليكن الشعاعان $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

1. يتساوى الشعاعان $\vec{v}$; $\vec{u}$ إذا وفقط إذا تساوت المركبتان : $\begin{cases}x=x'\\y=y'\end{cases}$.
2. مجموع الشعاعين هو شعاع : $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$
3. مركبتا الشعاع $k\vec{u}$ هما $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

زكرياء
0771-80-55-45

مبرهنة : لتكن النقطتان $A(x_A\,;y_A)$ ، $B(x_B\,;y_B)$ في معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

1. مركبتا الشعاع [redacted]
2. إحداثيا M منتصف القطعة المستقيمة [AB] هما : [redacted]
3. المسافة بين النقطتين A , B هي :

[redacted]

4. شرط الارتباط الخطي بين الشعاعين : $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

إذا وجد عدد حقيقي k حيث $\vec{v}=k\times\vec{u}$ أو أن تتحقق : $\frac{x}{y}=\frac{x'}{y'}$ أو $x'y=xy'$

المستقيم في المستوي :

1. معادلة المستقيم الديكارتية : $ax+by+c=0$ حيث $a\times b\neq0$ أي غير معدومين في آن واحد
2. كل مستقيم يوازي محور التراتيب معادلته : $x=a$.
3. كل مستقيم يوازي محور الفواصل معادلته : $y=b$.
4. كل مستقيم لا يوازي المحورين معادلته : $y=ax+b$ حيث $a\neq0$
5. كل مستقيم معادلته $y=ax+b$ معامل توجيهه (ميله) هو العدد الحقيقي a
6. كل مستقيم شعاع توجيهه $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ فإن معامل توجيهه : $a=\frac{\beta}{\alpha}$
7. من أجل نقطتين $A(x_A\,,y_A)\,;B(x_B\,,y_B)$ من المستقيم (AB) فإن معامل توجيه المستقيم هو :

معامل توجيه المستقيم = $\dfrac{\text{فرق التراتيب}}{\text{فرق الفواصل}}$ أو : [redacted]

8. يتوازى مستقيمان (D) و (D') معادلتاهما: $y=ax+b$ و $y=a'x+b'$ إذا وفقط إذا تساوى معاملا التوجيه: $a=a'$

9. يتعامد مستقيمان (D) و (D') معادلتاهما: $y=ax+b$ و $y=a'x+b'$ إذا وفقط إذا: $a\times a'=-1$

10. كل مستقيم معادلته الديكارتية: $ax+by+c=0$ فإن شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ وشعاع ناظمه $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

11. والعكس كل مستقيم ناظمه الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ فإن معادلته الديكارتية $ax+by+c=0$

12. يتعامد المستقيمان D و D' اللذان معادلتهما: $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ إذا تعامد ناظماهما $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ و $\vec{n'}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$ معناه: $\vec{n}.\vec{n'}=aa'+bb'=0$

13. يتوازى المستقيمان D و D' اللذان معادلتهما: $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ إذا كان المحدد = 0

$$det=\begin{vmatrix}a&a'\\b&b'\end{vmatrix}=ab'-ba'=0$$

الدائرة في المستوي :

الدائر التي مركزها $\Omega(a,b)$ ونصف قطرها R هي مجموعة $M(x,y)$ من المستوي المحققة للعلاقة: $\Omega M=R$
والتي معادلتها الديكارتية:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

مدرسة النهى
0557-69-13-13

مثال: عين مجموعة النقط $M(x,y)$ المحققة للعلاقة:

1. $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.
2. $x^2+y^2-x-3y+\frac{5}{2}=0$.
3. $x^2+y^2+6y+10=0$.

إرشاد: في كل مرة نحاول كتابة العبارة على الشكل العام: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ وذلك باستخدام العلاقة المهمة:

$$x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$x^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

.1

$$\begin{aligned}x^2+y^2+2x-4y+1=0 &\Leftrightarrow (x^2+2x)+(y^2-4y)+1=0\\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+1-1^2-2^2=0\\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=2^2\end{aligned}$$

ومجموعة النقط هي دائرة مركزها (2 ، -1) ونصف قطرها 2 .

2. $x^2+y^2-x-3y+\frac{5}{2}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=0$

وهذا يكافئ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=0$ ومجموعة النقط هي النقطة $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

3. نجد $x^2+(y+3)^2=-1$ وهي مجموعة خالية.

المرجح في المستوي :

اصطلاح: إذا كانت نقطة A مرفقة بالعدد الحقيقي α تسمى الثنائية (A , α) نقطة مثقلة .

1 - مرجح نقطتين :

تعريف: إذا كانت $\alpha+\beta\neq0$ فإن مرجح النقطتين المثقلتين (A , α) , (B , β) هو النقطة G المحققة للعلاقة:

$$\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}=\vec{0}$$

ونكتب: $G=bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$

خاصية 1: إذا كان $G=bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإنه يكافئ: $\vec{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$

كما يكافئ: $\vec{BG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\vec{BA}$

زكرياء
0771-80-55-45

هذه الخاصية تستخدم هندسيا لإنشاء مرجح نقطتين .

مثلا: $G_1=bar\{(A,1);(B,2)\}$ معناه: $\vec{AG_1}=\frac{2}{1+2}\vec{AB}=\frac{2}{3}\vec{AB}$

$G_2=bar\{(A,4);(B,-1)\}$ معناه: $\vec{AG}=\frac{-1}{4+(-1)}=-\frac{1}{3}\vec{AB}$

ملاحظة: إذا كان A ≠ B فإن النقط A , B , G على استقامية (على استقامة واحدة) .

خاصية الاختزال 2: إذا كان: $G=bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإن $G=bar\{(A,k\alpha);(B,k\beta)\}$ حيث $k\neq0$

مثلا: مرجح الجملة (A , 4) ; (B , -2) هو مرجح للجملة: (A , 2) ; (B , -1)

خاصية 3: إذا كان: $G=bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإن إحداثية المرجح G في معلم هو:

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}\ ;\ y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$$

تعريف : إذا كان المعاملان α و β متساويين فإننا نسمي مرجح النقطتين A , B بـ مركز ثقلهما (أو مركز المسافات المتساوية) ويكون في منتصف القطعة $[AB]$.

مثلا : إذا كان : $G = bar\{(A,-3);(B,-3)\}$ فإن G منتصف القطعة $[AB]$.

مرجح ثلاث نقاط :

تعريف : إذا كان : $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ فإن مرجح الجملة $(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)$ هي النقطة G المحققة للعلاقة التالية :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

خاصية الاختزال 1 : إذا كان $G = bar\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma)\}$

فإن $G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ حيث $k\neq 0$

خاصية 2 : إذا كان : $G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ فإن : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$

خاصية3 : إحداثيات المرجح G في معلم :

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}\ ;\ y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

خاصية التجميع :

إذا كان : $G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ و $G_1 = bar\{(B,\beta);(C,\gamma)\}$ فإن :

و $G = bar\{(A,\alpha);(G_1,\beta+\gamma)\}$

تبسيط مجموع شعاعي باستخدام مرجح :

- إذا كان : $G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإنه من أجل كل نقطة M :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{GM}$$

- إذا كان : $G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ فإنه من أجل كل نقطة M :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

زكرياء
0771-80-55-45

مثلا : يمكن تبسيط المجموع الشعاعي : $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+6\overrightarrow{MC}$ باعتبار G مرجحا للجملة : $\{(A,2);(B,-3);(C,6)\}$ فتصبح : $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+6\overrightarrow{MC}=5\overrightarrow{MG}$

ملاحظة : إذا كان مجموع المعاملات معدوما ، فلا يمكن استخدام مرجحا ,ولكن نستخدم علاقة شال في الأشعة وذلك لاثبات أن المجموع الشعاعي مستقل عن النقطة M .

مثلا :

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}&=3\overrightarrow{MA}-5(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})\\&=-5\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

تعين مجموعة نقط :

مثال 1 : A , B نقطتان من المستوي المزود بمعلم عين مجموعة النقط M المحققة للعلاقة التالية : $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|=6$

الجواب : نعتبر النقطة G مرجحا للجملة $(A,1);(B,2)$ فيكون : $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MG}$ وتصبح العلاقة المعطاة هي :

$\|3\overrightarrow{MG}\|=6$ معناه : $\|\overrightarrow{MG}\|=2$ وهي دائرة مركزها G ونصف قطرها 2 .

مثال 2 : عين مجموعة النقط M المحققة للعلاقة التالية : $\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=2\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\|$ حيث A , B , C نقاط معلومة ثابتة .

الجواب : نعتبر G_1 مرجحا للجملة : $\{(A,3);(B,1)\}$ و G_2 مرجحا للجملة : $\{(A,1);(C,1)\}$ فيكون :

$3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MG_1}$ و $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG_2}$ و بالتعويض أعلاه نجد :

$\|4\overrightarrow{MG_1}\|=2\|2\overrightarrow{MG_2}\|$ ومنه $\|\overrightarrow{MG_1}\|=\|\overrightarrow{MG_2}\|$ ومجموعة النقط M هو محور القطعة المستقيمة $[G_1G_2]$

مدرسة النهى
055769-13-13

كيف نثبت أن ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة باستخدام المرجح :

قاعدة عامة :

لإثبات أن ثلاث نقط تقع على استقامية يكفي أن نثبت أن إحدى النقاط مرجح للنقطتين الأخريين (ويستخدم عموما خاصية التجميع في جميع الاتجاهات)

كيف نثبت أن ثلاث مستقيمات تتقاطع في نقطة واحدة باستخدام المرجح :

قاعدة عامة :

لاثبات أن المستقيمات (AB) , (CD) و (EF) تتقاطع في نقطة واحدة يكفي أو نثبت أن النقطة G

- G هي مرجح للنقطتين A , B
- G هي مرجح للنقطتين C , D
- G هي مرجح للنقطتين E ,F

$\Longleftarrow$

معناه G تنتمي إلى المستقيم (AB)
معناه G تنتمي إلى المستقيم (CD)
معناه G تنتمي إلى المستقيم (EF)

$\Longleftarrow$

G نقطة التقاء لكل المستقيمات

الجُداء السلمي: المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس.

تعريف: الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز له بـ: $\vec{u}.\vec{v}$ والمعرف بـ:

$$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$$

الجداء السلمي والتعامد:

خاصية: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذا وفقط إذا: $\vec{u}.\vec{v}=0$

خصائص في حسابات الجداء السلمي: من اجل كل شعاع من الأشعة: $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$

- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ الخاصية التبديلية.
- $\vec{0}.\vec{u}=\vec{u}.\vec{0}=\vec{0}$
- $k(\vec{u}.\vec{v})=\vec{u}.(k\vec{v})=k(\vec{u}.\vec{v})$ لكل k حقيقي.
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
- $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2$ ويدعى المربع السلمي للشعاع $\vec{u}$.
- $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$
- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$
- $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

الجداء السلمي و الهندسة التحليلية: المستوي (P) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

خاصية: إذا كان $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ فإن: $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$ و $\vec{u}^2=x^2+y^2$

الجداء السلمي و الزوايا: $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

حساب $\cos\theta$ و $\sin\theta$: المستوي (P) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

إذا كان $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ و θ قيس للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ فإن: $\cos\theta=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$

$$\sin\theta=\frac{\begin{vmatrix}x&x'\\y&y'\end{vmatrix}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}=\frac{xy'-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

[illegible] مستقيم: المستوي (P) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

ليكن المستقيم (D) الذي معادلته: $ax+by+c=0$ و $A(x_0,y_0)$ نقطة من المستوي

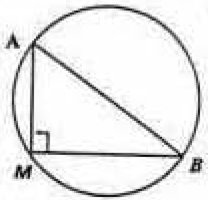
المسافة العمودية بين النقطة A و المستقيم (D) هو:

$$d(A,(D))=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

نظرية: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ و $a;b;c$ أعداد حقيقية

المعادلة $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ هي معادلة دائرة إذا وفقط إذا $a^2+b^2-c\geq 0$

مركز هذه الدائرة $\Omega(a,b)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$



معادلة دائرة معلوم قطرها:

الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

التمثيل الوسيطي للدائرة:

الدائرة التي مركزها $\Omega(a,b)$ ونصف قطرها r حيث $(r>0)$ هي مجموعة النقط $M(x,y)$

التي تحقق الجملة: $\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\y=b+r\sin\theta\end{cases}$ حيث $\theta\in\mathbb{R}$

والعكس: كل جملة $\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\y=b+r\sin\theta\end{cases}$ تسمى تمثيلا وسيطيا للدائرة التي مركزها $\Omega(a,b)$ ونصف قطرها r.

حالة خاصة: التمثيل الوسيطي: $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$ يمثل دائرة مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها r.

داخل وخارج الدائرة: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. مجموعة النقط $M(x,y)$ المحققة للعلاقة $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ هي دائرة (C) (أي محيطها) مركزها $\Omega(a,b)$ ونصف قطرها r.
2. مجموعة النقط $M(x,y)$ المحققة للعلاقة $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ هي القرص الذي مركزه $\Omega(a,b)$ ونصف قطرها r.

3. مجموعة النقط $M(x,y)$ المحققة للعلاقة $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ هي نقاط المستوي خارج القرص الذي مركزه $\Omega(a,b)$ ونصف قطرها r.

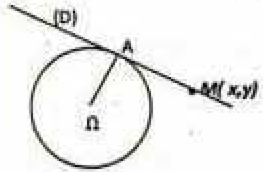
تقاطع مستقيم (D) ودائرة (C): ليكن المستقيم (D) و الدائرة (C) التي مركزها Ω ونصف قطرها r

1. إذا كان: $d(\Omega;(D))>r$ فإن: المستقيم (D) و الدائرة (C) لا يتقاطعان ونكتب $(D)\cap(C)=\varnothing$

2. إذا كان : $d(\Omega;(D))=r$ فإن : المستقيم (D) يمس الدائرة (C) في نقطة وحيدة .
3. إذا كان : $d(\Omega;(D))<r$ فإن : المستقيم (D) و الدائرة (C) يتقاطعان في نقطتين مختلفتين .

ولا ننسى قاعدة المسافة بين نقطة $\Omega(x_0,y_0)$ ومستقيم $(D): ax+by+c=0$ وهي :

$$d(\Omega;(D))=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



المماس والدائرة : لتكن الدائرة (C) التي مركزها Ω ونصف قطرها r

1. (D) مماس للدائرة (C) إذا وفقط إذا $d(\Omega;(D))=r$
2. معادلة المماس (D) للدائرة (C) عند النقطة A هو مجموعة النقط M (x,y) المحققة للعلاقة :

$$\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{MA}=0$$

العلاقات المترية في المثلث :

مبرهنة الكاشي : ABC مثلث كيفي :

1. $AB^2=AC^2+BC^2-2AC.BC\cos\hat{C}$
2. $AC^2=AB^2+BC^2-2AB.BC\cos\hat{B}$
3. $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC\cos\hat{A}$

قاعدة المساحات :

ABC مثلث كيفي و S مساحة المثلث ABC فإن :

مدرسة النهى
055769-13-13

$$S=\frac{1}{2}AB.AC\sin\hat{A}=\frac{1}{2}BA.BC\sin\hat{B}=\frac{1}{2}CA.CB\sin\hat{C}$$

قانون الجيوب :

$$\frac{AB}{\sin\hat{C}}=\frac{AC}{\sin\hat{B}}=\frac{BC}{\sin\hat{A}}$$

ناظم المستقيم (D) : كل شعاع عمودي على المستقيم (D) يسمى ناظم هذا المستقيم .

خصائص الناظم :

1. إذا كان $\vec{n}$ ناظما المستقيم (D) فإن كل شعاع $k\vec{n}$ $(k\neq 0)$ هو ناظم كذلك .
2. إذا كان $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ ناظما المستقيم (D) فإن الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ شعاع توجيه للمستقيم (D)

مجموعة النقط M حيث : $MA^2+MB^2=k$

نعتبر I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

من أجل كل نقطة M فإن : $MA^2+MB^2=2IM^2+\frac{AB^2}{2}$ (تسمى نظرية المتوسط)

فإذا كان k حقيقيا فإن مجموعة النقط M المحققة للعلاقة : $MA^2+MB^2=k$ تكون دائرة ، أو نقطة ، أو مجموعة خالية .

مثلا : ليكن A و B نقطتان حيث AB = 2 نريد تعيين المجموعة E من النقط M المحققة للعلاقة : $MA^2+MB^2=20$

نستخدم نظرية المتوسط : $MA^2+MB^2=20 \Leftrightarrow 2IM^2+\frac{4}{2}=20 \Leftrightarrow IM^2=9 \Leftrightarrow IM=3$

إذن مجموعة النقط E دائرة مركزها I ونصف قطرها 3

زكرياء
0771-80-55-45

مجموعة النقط M حيث : $\overline{MA}.\overline{MB}=K$

الطريقة العامة : نجزئ $\overline{MA}$ و $\overline{MB}$ مرورا بالنقطة I منتصف القطعة $[AB]$ (علاقة شال في الأشعة)

مثلا : لتكن النقطتان A و B حيث AB = 4 نريد تعيين المجموعة E من النقط M المحققة للعلاقة : $\overline{MA}.\overline{MB}=12$

لدينا : $\overline{MA}.\overline{MB}=12 \Leftrightarrow (\overline{MI}+\overline{IA}).(\overline{MI}+\overline{IB})=12$ ولا ننسى أن : $\overline{IB}=-\overline{IA}$

تصبح العلاقة : $(\overline{MI}+\overline{IA}).(\overline{MI}-\overline{IA})=12$ وهي جداء شهير من الشكل : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

إذن : $MI^2-IA^2=12$ معناه $MI^2-2^2=12$ حيث $IA=\frac{AB}{2}$

ومنه : $MI^2=16$ وهذا يكافئ $MI=4$ إذن مجموعة النقط E هي دائرة مركزها I ونصف قطرها 4 .

مجموعة النقط M حيث : $\overline{AM}.\vec{u}=k$

الطريقة العامة : نبحث عن نقطة خاصة H تنتمي إلى المجموعة ، ويتحقق بذلك العلاقة : $\overline{AH}.\vec{u}=k$ ولا ننسى أن $\overline{AM}.\vec{u}=k$

و يكون بذلك $\overline{AM}.\vec{u}=\overline{AH}.\vec{u}$

معناه $(\overline{AM}-\overline{AH}).\vec{u}=0$ إذن $\overline{HM}.\vec{u}=0$ ومنه $\overline{HM}\perp\vec{u}$

إذن مجموعة النقط M هي المستقيم المار بالنقطة H و العمودي على الشعاع $\vec{u}$.

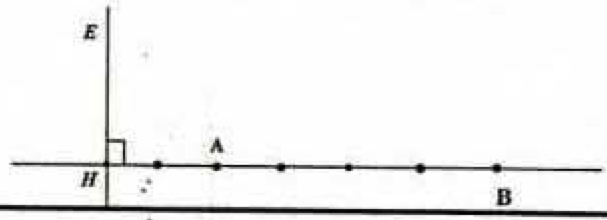
مثلا : لتكن النقطتان A و B حيث AB =4 نريد تعيين المجموعة E من النقط M المحققة للعلاقة : $\overline{AM}.\overline{AB}=-8$

نعتبر النقطة H من المستقيم (AB) حيث الشعاعان $\overline{AH}$ و $\overline{AB}$ متعاكسان إضافة إلى أن :

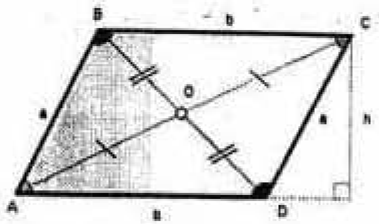
$AH\times AB=6 \Leftrightarrow AH=\frac{8}{4}=2$ وتحقق بذلك العلاقة الشعاعية : $\overline{AH}.\overline{AB}=-8$

إذن من العلاقتين : $\overline{AM}.\overline{AB}=\overline{AH}.\overline{AB}$ وهذا معناه $(\overline{AM}-\overline{AH}).\overline{AB}=0$

إذن $\overline{HM}.\overline{AB}=0$ يعني $\overline{HM}\perp\overline{AB}$ ومجموعة النقط M هي المستقيم المار بالنقطة H و العمودي على الشعاع $\overline{AB}$



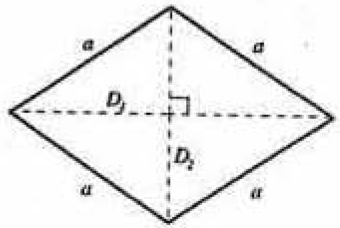
متوازي الأضلاع:



ABCD هو رباعي معناه كل ضلعين متقابلين فيه متوازيان
يكون الرباعي ABCD متوازي أضلاع إذا تحقق احد الأمور التالية :

1. القطران $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان .
2. { AB = DC و AD = BC } ,الضلعان المتقابلان متقايسان
3. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ معناه { AB = DC و (AB) // (DC) }
4. { $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}$ و $\widehat{BAD}=\widehat{BCD}$ } الزاويتان المتقابلتان متساويتان

متوازيات أضلاع خاصة:



أ. المعين : هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان
يعرف المعين ABCD بعدة طرق منها :
1. { $(AC)\perp(BD)$ و [AC] ، [BD] متناصفان } (القطران متعامدان ومتناصفان)
2. { AB = BC = CD = DA }
3. { (AC) ينصف كلا من الزاويتين $\hat{A}$ و $\hat{C}$ و (BD) ينصف كلا من الزاويتين $\hat{B}$ و $\hat{D}$ } .

زكرياء
0771-80-55-45

ب. المستطيل : هو متوازي أضلاع له زاوية قائمة
يعرف المستطيل ABCD بعدة طرق منها :
1. { $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}=90°$ }
2. { AC = BD و [AC] ، [BD] متناصفان } . (القطران متساويان ومتناصفان)

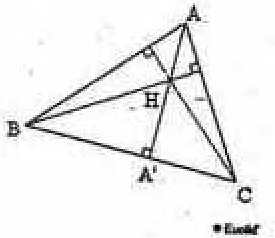
ت. المربع : هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان وزاوية قائمة
يعرف المربع ABCD بعدة طرق منها :
1. { $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}=90°$ و AB = BC = CD = DA }
2. { AC = BD و $(AC)\perp(BD)$ و [AC] ، [BD] متناصفان } . القطران متعامدان ومتناصفان ومتساويان

المثلثات الخاصة :

1. المثلث ABC المتساوي الساقين :
أ. فيه ضلعان متقايسان $AB = AB$ ب. الزاويتان : $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$.
2. المثلث المتقايس الأضلاع :
أ. أضلاعه متقايسة ب. $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=\widehat{BAC}=60°$

3. المثلث القائم : فيه زاوية قائمة .

المستقيمات الخاصة في مثلث:



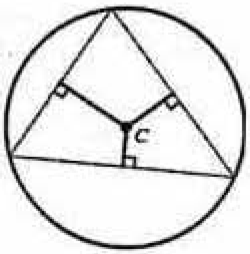
1. الارتفاع : في مثلث هو المستقيم الذي يشمل احد رؤوس المثلث ويعامد الضلع المقابل

خصائص الارتفاع :
أ. ارتفاعات مثلث متقاطعة في نقطة واحدة .
ب. مساحة المثلث ABC :

$$S(ABC)=\frac{1}{2}AA'\times BC$$
$$=\frac{1}{2}BB'\times AC$$
$$=\frac{1}{2}CC'\times AB$$

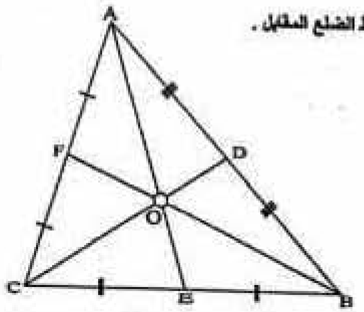
مدرسة النهى
0557 69-13-13

2. المحور : في مثلث هو محور احد أضلاعه (من خصائص المحور يعامد وينصف)



خصائص المحور :
أ. محاور مثلث متقاطعة في نقطة واحدة .
ب. نقطة تقاطع محاور مثلث هي مركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث (التي تشمل رؤوسه) .

3. المتوسط : في مثلث هو المستقيم الذي يشمل احد رؤوس المثلث ويتوسط الضلع المقابل .

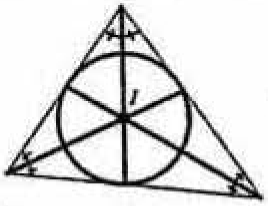


خصائص المتوسط :
أ. متوسطات مثلث متقاطعة في نقطة واحدة .
ب. نقطة تقاطع متوسطات مثلث هي مركز ثقل هذا المثلث .
ت. مركز الثقل يبعد بـ $\frac{2}{3}$ من المتوسط عن رأس المثلث.

$$OA=\frac{2}{3}EA\ ;\ OB=\frac{2}{3}FB\ ;OC=\frac{2}{3}DC$$

ث. المتوسط يقطع المثلث إلى مثلثين متساويي المساحة .

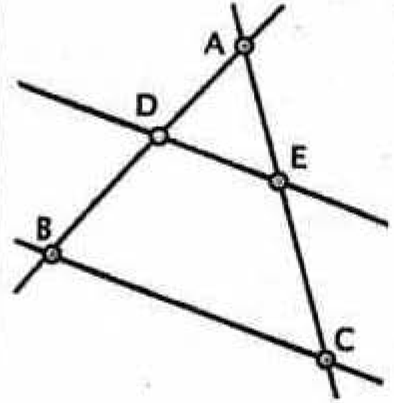
4. المنصف : في مثلث هو منصف إحدى زواياه .



خصائص المنصف :
أ. المنصفات الداخلية في مثلث متقاطعة في نقطة واحدة .
ب. نقطة تقاطع المنصفات الداخلية في مثلث هي مركز الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث (أي التي تمس أضلاع المثلث من الداخل) .

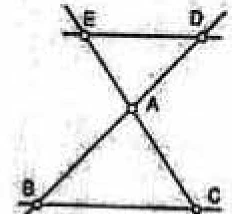
نظرية طاليس:

إذا كان لدينا مستقيمان متقاطعان في نقطة A يقطعهما مستقيمان (BC) ; (DE) في النقط D ، E ، B ، C حسب أحد الشكلين وكان المستقيم (BC) يوازي المستقيم (DE) فإن :



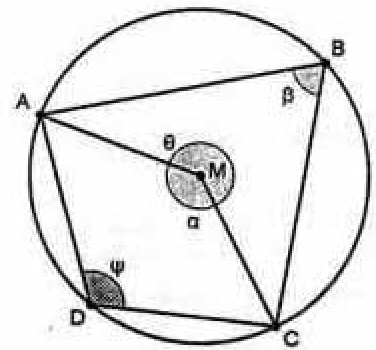
- أطوال أضلاع المثلث ABC متناسبة مع أطوال الأضلاع الموافقة لها من المثلث ADE أي : $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$

❖ عكس نظرية طاليس :



إذا كانت كل من النقط A , B ,D على استقامة واحدة و النقط A , C , E كذلك على استقامة واحدة وكان : $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ فإن المستقيمين (BC) و (DE) متوازيان .

الزوايا والدائرة :



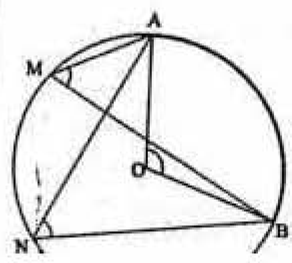
مبرهنة : في كل دائرة الزاوية المركزية تساوي ضعف الزاوية المحيطية التي تحصر معها نفس القوس .

$$\begin{cases}\alpha = 2\beta \\ \theta = 2\psi\end{cases}$$

نتائج :

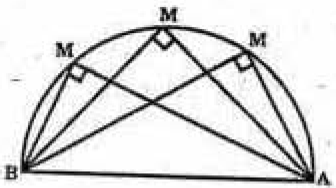
1. في دائرة الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس ، أو تحصر أقواسا متقايسة تكون متقايسة .

إذن : الزوايا كلها متساوية $\widehat{AMB}=\widehat{ANB}=\widehat{AOB}$ لأنها تحصر نفس القوس

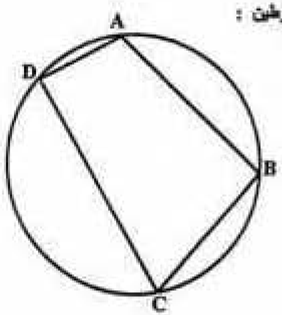


مدرسة الهدى

2. عندما تكون النقطتان A و B من دائرة متقابلتين قطريا ، و M نقطة من نفس الدائرة تختلف عن النقطتين A و B فإن المثلث ABM قائم في M .



3. تكون رؤوس الرباعي المحدب ABCD من نفس الدائرة إذا تحقق أحد الشرطين :
 I. $\widehat{DBC}=\widehat{DAC}$.
 II. الزاويتان $\widehat{BCD}$ و $\widehat{BAD}$ متكاملتان .



زكرياء
0771-80-55-45

المثلثات المتقايسة:

تعريف : نقول عن مثلثين إنهما متقايسان إذا كان قابلين للتطابق .

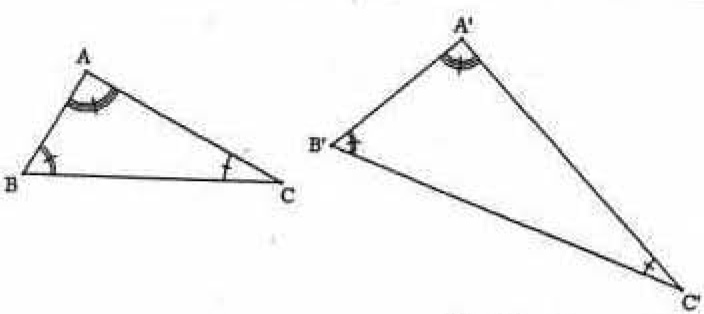
نتيجة : المثلثان المتقايسان أطوال أضلاعهما متساوية مثنى مثنى ، وزواياهما متقايسة مثنى مثنى .

خواص المثلثين المتقايسين :

1. يتقايس مثلثان إذا كانت أطوال أضلاعهما متساوية مثنى مثنى .
2. يتقايس مثلثان إذا تقايست زاوية والضلعان اللذان يحصرانها من أحد المثلثين مع زاوية و الضلعين اللذين يحصرانها من المثلث الآخر .
3. يتقايس مثلثان إذا تقايس ضلع والزاويتان المجاورتان له من أحد المثلثين مع ضلع والزاويتين المجاورتين من المثلث الآخر .
4. يتقايس مثلثان إذا كان أحدهما صورة للمثلث الآخر بانسحاب ، أو تناظر محوري ، أو تناظر مركزي ، أو دوران .

المثلثات المتشابهة :

تعريف : نقول عن مثلثين إنهما متشابهان إذا كانت زوايا أحدهما تساوي زوايا الآخر .



خواص :

1. يتشابه مثلثان إذا تقايست زاويتان من احد المثلثين مع زاويتين من المثلث الآخر .
2. يتشابه مثلثان إذا كان أطوال الأضلاع المتماثلة فيهما متناسبة $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$.
3. يتشابه مثلثان إذا تقايست زاوية من احد المثلثين مع زاوية من المثلث الآخر وكان طولا الضلعين اللذين يحصران الزاوية من المثلث متناسبين مع الضلعين الآخرين من المثلث الآخر .

الهندسة الفضائية

نعتبر المعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

يكافئ $M(x,y,z)$: $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

عمليات على الأشعة : نعتبر الشعاعين $\vec{u}(x,y,z)$; $\vec{v}(x',y',z')$

1. مجموع شعاعين : $\vec{u}+\vec{v}(x+x',y+y',z+z')$.
2. ضرب شعاع في عدد حقيقي : $k\vec{u}(kx,ky,kz)$.
3. يكون الشعاعان $\vec{u};\vec{v}$ على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كانا مرتبطين خطيا ، يعني يوجد عدد حقيقي k حيث :
$\vec{u}=k\vec{v}$

مبرهنة : لتكن النقطتان $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ في معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1. مركبتا الشعاع $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$
2. إحداثيا I منتصف القطعة المستقيمة [AB] هما : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
3. المسافة بين النقطتين A , B هي : $AB=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$

المستقيم في الفضاء :

يتعين المستقيم في الفضاء بـ :

- نقطة معلومة وشعاع توجيه معلوم .
- أو نقطتين معلومتين .
- أو تقاطع مستويين .

معادلة مستقيم يمر بنقطة معلومة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ويوازي شعاعا معلوما $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$: المستقيم (D) هو مجموعة من النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء المحققة لـ : $\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{v}$ وهذا يكافئ : يوجد عدد حقيقي يحقق $\overrightarrow{M_0M}=t\vec{v}$ معناه :

$$(D):\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\quad;t\in R\\z=z_0+ct\end{cases}$$

ويسمى التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) .

مثال : أكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم D الذي يمر بالنقطة $M_0(1,2,-3)$ والموازي للشعاع : $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$

الجواب : $(D):\begin{cases}x=1+2t\\y=2+3t\quad;t\in R\\z=-3+t\end{cases}$

معادلة مستقيم يمر بنقطتين معلومتين $M_1(x_1,y_1,z_1)$; $M_2(x_2,y_2,z_2)$:

نعتبر شعاع التوجيه $\vec{v}=\overrightarrow{M_1M_2}$

و المستقيم (D) هو مجموعة من النقط $M(x,y,z)$ المحققة لـ : $\overrightarrow{M_1M}\parallel\overrightarrow{M_1M_2}$

وترد بذلك المسألة إلى الحالة الأولى .

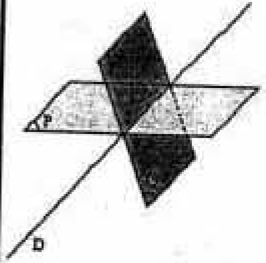
مثال : أكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم المار بالنقطتين $A(2;2;-3)$ و $B(1;-1;0)$ الجواب : نعين الشعاع $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-3\\3\end{pmatrix}$ والمستقيم هو مجموعة النقط $M(x,y,z)$ المارة بالنقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}$: $\begin{cases}x=2-t\\y=2-3t\\z=-3+3t\end{cases}$

معادلة مستقيم معرف بتقاطع مستويين :

مثال : لتكن معادلتا المستويين : $(p): x-4y+7=0$, $(Q): x+2y-z+1=0$

1. اثبت أن المستويين متقاطعان ، ترمز بـ D للمستقيم الناتج عن تقاطعهما .
2. أكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم D ، حدد شعاع توجيهه .

الجواب : $\begin{cases}x=4t-7\\y=t\quad;t\in R\\z=5t-6\end{cases}$.



تقاطع مستقيمين :

نعتبر المستقيمين (Δ) و (Δ') المعرفين بـ : $(\Delta'):\begin{cases}x=x_1+a't'\\y=y_1+b't'\\z=z_1+c't'\end{cases}$; $(\Delta):\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$

لدينا إذن مستقيمان: المستقيم (Δ) شعاع توجيهه $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ و المستقيم (Δ') شعاع توجيهه $\vec{v'}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$

1. إذا كان: $\vec{v} \,//\, \vec{v'}$ فإن المستقيمين متوازيان أو متطابقان .
2. إذا كان: $\vec{v} \not\parallel \vec{v'}$ فإن المستقيمين متقاطعان أو لا ينتميان إلى مستو واحد ، ولمعرفة أي حالة لدينا نحل الجملة التالية :

$$(S):\begin{cases} x_0+at = x_1+a't' \\ y_0+bt = y_1+b't' \\ z_0+ct = z_1+c't' \end{cases}$$ ذات المجهولين t و t' .

نختار من الجملة (S) معادلتين فقط ونبحث عن قيم t و t' ثم نتحقق من صحة النتيجة في المعادلة الباقية .

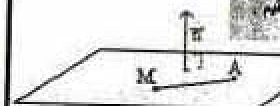
- فإذا كانت الجملة (S) تقبل حلا وحيدا من قيم t و t' فإن المستقيمين متقاطعان في نقطة B تحدد إحداثياتها بتعويض قيمة t في تمثيل المستقيم (Δ) أو بتعويض قيمة t' في تمثيل المستقيم (Δ') .
- أما إذا كانت الجملة (S) لا تقبل حلا فإن المستقيمين لا يقعان في مستو واحد .

تعريف المستوي وطرق تعيينه:

يتعين المستوي بأربع طرق :

- بمستقيمين متقاطعين
- بمستقيمين متوازيين .
- بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة .
- بمستقيم ونقطة خارجة عنه .

و يتعين المستوي أيضا بصورة وحيدة بمعرفة نقطة منه ومستقيم يعامده وفق النظرية الأساسية التالية :



من نقطة خارجة عن مستقيم (أو واقعة عليه) يمر مستو وحيد ووحيد فقط يعامد هذا المستقيم

معادلة المستوي : $ax+by+cz+d=0$ حيث $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ ناظمه : الشعاع $\vec{n}(a,b,c)$

مثال 1 : أوجد معادلة المستوي الذي يمر بالنقطة $M_0(1,-1,2)$ و يعامد الشعاع $\vec{n}(2,1,2)$

الجواب : $(P): 2x+y+2z-5=0$

مثال 2 : أوجد معادلة المستوي الذي يمر بالنقطة $A(-1,2,1)$ و يعامد المستقيم المار بالنقطتين : $B(1,3,2)$ و $C(2,4,5)$

الجواب : $(P): x+y+3z-4=0$

- يتعامد المستويان : $\begin{cases}(p_1): a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\(p_2): a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$ إذا وفقط إذا تعامد ناظماهما : $\vec{n_1}\perp\vec{n_2}$

معناه $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$ معناه $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

مثلا : المستويان : $(Q): -x+3y+z+4=0$ ، $(P): 2x+y-z+1=0$ متعامدان .

- يتوازى المستويان إذا وفقط إذا كان الناظمان : $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ مرتبطين خطيا معناه $\vec{n_1} \,//\, \vec{n_2}$

معناه : $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=\lambda$

بعد نقطة عن مستوي:

بعد النقطة A عن المستوي (P) هو العدد الحقيقي الموجب : $d(A,P)=\dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

مثال : أحسب بعد النقطة $A(3,9,1)$ عن المستوي : $x-2y+2z-3=0$ الجواب : $\dfrac{16}{3}$

تقاطع مستقيم (D) ومستو (P) :

نعتبر المستوي(P) و المستقيم (D) المعرفين بـ :

$$(D):\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases} \quad ; \quad (P): a'x+b'y+c'z+d'=0$$

من اجل دراسة تقاطع المستقيم والمستوي نقوم بحل الجملة التالية :

$$\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\\a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}$$

ولهذا نعوض x و y و z في المعادلة 4 فنحصل على معادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول t ونميز عدة حالات :

أ. إذا كان لهذه المعادلة حل $t=t_0$ فإن المستقيم (D) يقطع المستوي (p) في نقطة واحدة H نحصل على إحداثيتها بتعويض قيمة t في معادلة المستقيم أعلاه .

ب. إذا كان لهذه المعادلة ما لا نهاية من الحلول (كأن نجد مثلا 0 = 0) فإن المستقيم محتوى في المستوي .

ت. إذا كانت المعادلة لا تقبل حلولا (كأن نجد مثلا 0 = 2) فإن المستقيم لا يقطع المستوي .

- استدراك : التحويلات النقطية

كتابة العبارة المركبة للتحويل بمعرفة خواصه:

1. M' صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ معناه $z'=z+a+ib$
2. M' صورة M بالتحاكي الذي مركزه ω ونسبته K معناه : $z'-z_\omega=k(z-z_\omega)$
3. M' صورة M بالدوران الذي مركزه ω وزاويته θ معناه $z'-z_\omega=e^{i\theta}(z-z_\omega)$
4. M' صورة M بالتشابه الذي مركزه ω وزاويته θ ونسبته K معناه $z'-z_\omega=k\,e^{i\theta}(z-z_\omega)$

الصحيح والغلط :

الغلط	الصحيح
1. $(a+b)^2=a^2+b^2$	1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
2. $\sqrt{x^2}=x$	2. $\sqrt{x^2}=\vert x\vert$
3. $x\cancel{(x+1)}=2\cancel{(x+1)}$ معناه $x=2$	3. لا يجوز اختزال متغير قد يكون معدوما والطريق الصحيح نجعل المعادلة صفرية ثم نستخرج العامل المشترك $x(x+1)-2(x+1)=0$ $(x+1)(x-2)=0$ $x+1=0$ ou $x-2=0$
4. $3\times2^n=6^n$	4. $3^n.2^n=6^n$
5. $\frac{x+3}{2x}=\frac{3}{2}$	5. لا نختزل إلا مضروبا
6. $(x+1)>\frac{1}{x}$ معناه $x(x+1)>1$ ضربنا الطرفين والوسطين	6. نجعلها صفرية $(x+1)-\frac{1}{x}>0$ ثم نوحد المقامات ونختزل $\frac{x^2+x-1}{x}>0$ ثم ننشئ جدول الإشارة وذلك بدراسة إشارة البسط وإشارة المقام ثم قسمة الإشارات .
7. $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}=x+y$	7. لا يجوز الخلط بين $\sqrt{(x+y)^2}=\vert x+y\vert$ و $\sqrt{x^2+y^2}$ التي لا تعطي شيئا .
8. $\sqrt{(-3)^2}=-3$	8. $\sqrt{(-3)^2}=\vert-3\vert=3$ انظر رقم 2 أعلاه
9. $-x<0$ لكل x من R	9. لو كانت x سالبة فإن : $-x>0$
10. $-x^2<0$ لكل x من R	10. من اجل $x=0$ العلاقة غير صحيحة .
11. $\sqrt{(2x+3)^2}=2x+3$	11. $\sqrt{(2x+3)^2}=\vert 2x+3\vert$
12. $\sqrt{8}=4$	12. $\sqrt{8}=\sqrt{4.2}=2\sqrt{2}$ أما $\sqrt{16}=4$
13. $\vert x\vert=3$ معناه $x=3$	13. $\vert x\vert=3\Rightarrow x=3$ ou $x=-3$
14. $2x-3=0$ معناه $x=\frac{2}{3}$	14. $2x-3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$
15. $x^2=3$ معناه $x=\sqrt{3}$	15. $x^2=3\Rightarrow x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$
16. $(-x-1)^2=x^2-2x+1$	16. $(-x-1)^2=[-(x+1)]^2=(x+1)^2$ $=x^2+2x+1$
17. $x^2+y^2=(x+y)(x-y)$	17. لا يجوز الخلط مع القاعدة الشهيرة $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

الغلط	الصحيح
18. $a^{x+y}\times a^{x-y}=a^{(x+y)(x-y)}=a^{x^2-y^2}$	18. القاعدة هي : $a^p\times a^k=a^{p+k}$
19. $x<y$ معناه $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$	19. لأن الدالة مقلوب متناقصة فإن : $x<y \Leftrightarrow \frac{1}{x}>\frac{1}{y}$
20. $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$	20. $a^2+b^2+c^2$ لا تعطي شيئا .
21. $2^3\times4^2=8^6$	21. $2^3\times4^2=2^3\times(2^2)^2=2^3\times2^4=2^7$
22. $(-1)^n=-1$ لكل n طبيعي	22. إذا كان n زوجيا فإن : $(-1)^n=1$ أما إذا كان فرديا فإن $(-1)^n=-1$
23. $6x^2=3$ معناه $2x^2=0$ بالاختزال	23. $6x^2=3\Leftrightarrow 2x^2=1\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2}$
24. $(3x-1)<\frac{1}{(x+2)}$ معناه بضرب الطرفين $(3x-1)(x+2)<1$	24. نجعلها صفرية ثم نوحد المقامات ثم ننشئ جدول الإشارة كما فعلنا أعلاه رقم 6 .
25. $3\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\left(-\frac{3}{2}\right)^n$	25. $3^n\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\left(-\frac{3}{2}\right)^n$
26. $3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=2^{n+1}$	26. $3^{n+1}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=2^{n+1}$
27. $(x+1)x>0$ معناه $\begin{cases}x+1>0\\x>0\end{cases}$	27. لحل المتراجحة $(x+1)x>0$ ننشئ جدول الإشارة
28. $(x+1)^2<4$ معناه $x+1<2$	28. $(x+1)^2<4\Leftrightarrow(x+1)^2-4<0$ $\Leftrightarrow(x+1-2)(x+1+2)<0$ $\Leftrightarrow(x-1)(x+3)<0$ ثم ننشئ جدول الإشارة .
29. $2x(x+1)=(x+1).3$ وبالاختزال يصبح $2x=3$	29. لا نختزل متغير والصحيح نجعلها صفرية ثم نستخرج العامل المشترك ثم نحدد قيم x .
30. $(x^2-1)^2=-5$ معناه $(x^2-1)=-\sqrt{5}$	30. المعادلة $(x^2-1)^2=-5$ مستحيلة من الوهلة الأولى .
31. النشر $2(x+1)(3x-2)=(2x+2)(6x-4)$	31. لا ننشر إلا على قوس واحد فيكون : $2(x+1)(3x-2)=(2x+2)(3x-2)$ ou $=(x+1)(6x-4)$ ولا يجوز الخلط مع العملية : $2[(x+1)+(3x-2)]$
32. $\sqrt{12}=6$	32. $\sqrt{12}=\sqrt{4.3}=2\sqrt{3}$
33. $\vert x\vert>0$ لكل x من R	33. العلاقة غير صحيحة من اجل $x=0$.
34. $\sqrt{x(2x+3)}=\sqrt{x}\times\sqrt{(2x+3)}$	34. $\sqrt{x(2x+3)}=\sqrt{\vert x\vert}\times\sqrt{\vert 2x+3\vert}$

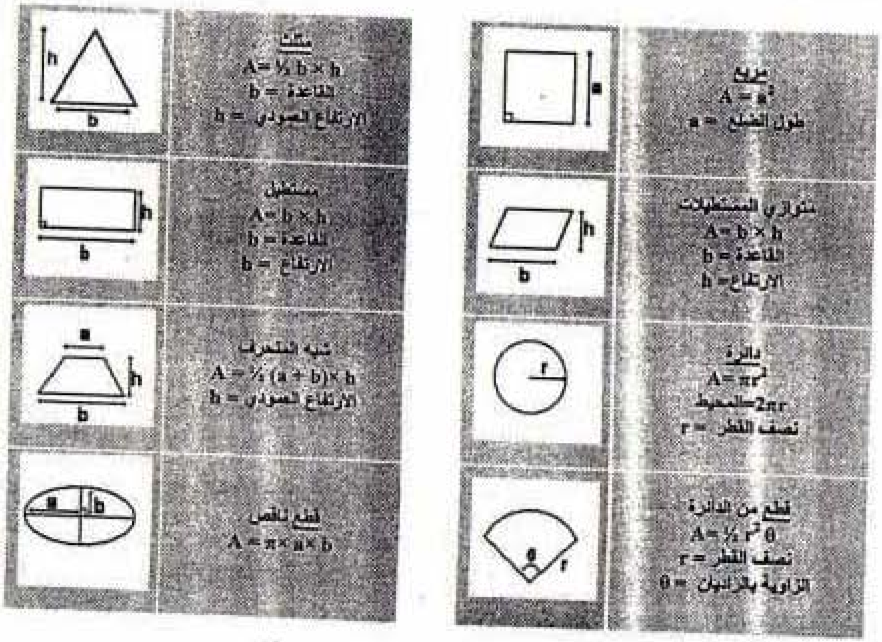
35. $\sin x = 0$ على $\mathbb{R}$ معناه $x = 0$	35. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$
36. لدراسة إشارة $4x^2-12x+9$ نحسب المميز فنجد $\Delta = 0$ والحل المضاعف $\frac{3}{2}$ ثم $\begin{array}{c\|ccc} x & & \frac{3}{2} & \\ \hline 4x^2-12x+9 & - & 0 & + \end{array}$	36. $\begin{array}{c\|ccc} x & & \frac{3}{2} & \\ \hline 4x^2-12x+9 & + & 0 & + \end{array}$
37. $-x^2 < 0$ لكل x من $\mathbb{R}$	37. العلاقة غير صحيحة من أجل $x = 0$.
38. $\sqrt{\frac{x}{x+1}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$	38. $\sqrt{\frac{x}{x+1}} = \frac{\sqrt{\|x\|}}{\sqrt{\|x+1\|}}$
39. $1+\frac{2a}{3} = \frac{3+2a}{3} = \frac{5a}{3}$	39. $3+2a \neq 5a$
40. $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{b} \times c$	40. $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c}$ وينبغي تحديد الكسر الرئيسي .
41. $\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = a \times \frac{b}{c}$	41. $\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = a \times \frac{c}{b}$
42. $\|x\| < 1$ معناه $x < 1$	42. $\|x\| < 1$ معناه $-1 < x < 1$ انظر خواص القيمة المطلقة
43. $\|x-3\| > 2$ معناه $x-3 > 2$	43. $\|x-3\| > 2 \Rightarrow \{ (x-3) < -2$ ou $x-3 > 2 \}$
44. إشارة $f'(x) = \frac{x^2+2x+1}{(x-1)^2}$ من إشارة $2x+1$	44. هي إشارة x^2+2x+1
45. $\begin{cases} x > 3 \\ et \\ x < 2 \end{cases}$ معناه : $2 < x < 3$	45. لا يوجد عدد حقيقي يحقق : $\begin{cases} x > 3 \\ et \\ x < 2 \end{cases}$
46. $2x^2+3 = 0$ معناه $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$	46. المعادلة $2x^2+3=0$ تكافئ $2x^2 = -3$ وهو مستحيل .
47. $\|x\| = \|y\|$ معناه $x = y$	47. $\|x\| = \|y\|$ معناه $\{x = y$ ou $x = -y\}$
48. $-3x < 4$ معناه $x < -\frac{4}{3}$	48. $-3x < 4$ معناه $x > -\frac{4}{3}$
49. $4^2 = 8$	49. $4^2 = 16$
50. $\frac{2x-1}{-3} < x$ معناه $2x-1 < -3x$	50. $\frac{2x-1}{-3} < x$ يكافئ $2x-1 > -3x$ ثم نجعلها صفرية
51. $\|x-1\| < \|x\|$ معناه $x-1 < x$	51. نربع الطرفين ونتخلص من القيمة المطلقة وفق العلاقة

	$\|A\|^2 = A^2$ ثم نجعلها صفرية ثم نرتبها وثم نعين x أو ننشئ جدول الإشارة
52. $9(x^2+2)^2 = (9x^2+18)^2$	52. $9(x^2+2)^2 = 3^2(x^2+2)^2 = (3x^2+6)^2$
53. $ax^2+bx+c = (x-x_1)(x-x_2)$ حيث $x_1 ; x_2$ حلي العبارة	53. للتحليل : $ax^2+b^2+c = a(x-x_1)(x-x_2)$
54. $a^2 = b^2$ معناه $a = b$	54. $a^2 = b^2$ معناه $\{a = b$ ou $a = -b\}$
55. $a < b$ معناه $a^2 < b^2$ حيث a , b حقيقيان	55. $a < b$ معناه $a^2 < b^2$ إذا كان a , b موجبين ، أما إذا كانا سالبين نقلب اتجاه المتراجحة فيصبح $a^2 > b^2$
56. $(x-2)^2 = x^2-2(x)(-2)+2^2$	56. $(x-2)^2 = x^2-2(x)(2)+2^2$
57. $a < b$ معناه $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ حيث a , b حقيقيان غير معدومين	57. $a < b$ معناه $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ لأن الدالة مقلوب متناقصة .
58. $Ln\ 0 = 1$	58. $\ln 1 = 0$ أما $Ln\ 0$ فغير موجود .
59. $\ln(2x+1)^2 = 2\ln(2x+1)$	59. $\ln(2x+1)^2 = 2\ln\|2x+1\|$.
60. $f(x) = x^2 \ln(3x-1)$ دالتها المشتقة هي : $f'(x) = 2x\frac{3}{3x-1}$	60. نستخدم مشتق جداء دالتين u $(uv)' = u'v + v'u$ فنجد
61. مجموعة النقط $M(x,y)$ المحققة للعلاقة : $(x+1)^2+(y+3)^2 = 25$ هي دائرة مركزها $(1 , 3)$ ونصف قطرها $r = 5$	61. هي دائرة مركزها $(-1 , -3)$ ونصف قطرها $r = 5$
62. $\ln a \times \ln b = \ln(a \times b)$	62. $\ln a \times \ln b$ لا يعطي شيئا .
63. $\frac{\ln a}{\ln b} = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$	63. $\frac{\ln a}{\ln b}$ لا يعطي شيئا .
64. $(x+1)^2 = e^2$ معناه $x+1 = e$	64. $(x+1)^2 = e^2$ معناه : $\{x+1 = e$ ou $x+1 = -e\}$
65. $\ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \ln(x+1) - \ln(x-2)$	65. $\ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \ln\|x+1\| - \ln\|x-2\|$
66. $\ln(-x) = -\ln x$	66. $\ln(-x)$ لا يعطي شيئا
67. $\frac{\ln(2x)}{2} = \ln x$	67. لا يجوز اختزال 2 في العبارة $\frac{\ln(2x)}{2}$
68. إذا كان : $z = -2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ فإن	68. لا تكون الطويلة سالبة والصحيح $\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

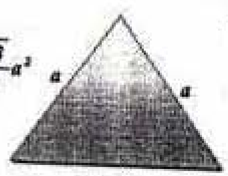
$\begin{cases} \lvert z \rvert = -2 \\ Arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$	$-\sin a = \sin(\pi + a)$; $-\cos a = \cos(\pi + a)$
.69 $\frac{1}{e^x} = -e^x$	.69 $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ ،
.70 $Arg(3i) = \frac{3\pi}{2}$	.70 $Arg(3i) = \frac{\pi}{2}$
.71 إذا كان $f(x) = (\ln x)^3$ فإن : $f'(x) = 3(\ln x)^2$	.71 $f'(x) = 3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}$ قاعدة : $(u^n)' = nu^{n-1}u'$
.72 $(-1)^{-1} = 1$	.72 $(-1)^{-1} = \frac{1}{-1} = -1$
.73 $\int x e^x dx = \int x dx . \int e^x dx = \frac{1}{2} x^2 . e^x + c$	.73 $\int (f \times g) \neq \int f \times \int g$
.74 لتعيين x من المعادلة $\sqrt{x+1} = -2$ نربع الطرفين	.74 المعادلة مستحيلة من الملاحظة الأولى .
.75 لحل المتراجحة $\lvert x-1 \rvert < -1$ نربع الطرفين ونستفيد من الخاصية $\lvert A \rvert^2 = A^2$	.75 المتراجحة مستحيلة من الوهلة الأولى .
.76 $\frac{1}{x^2+2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}$	.76 $\frac{1}{x^2+2}$ لا تعطي شيئا .
.77 $\frac{x-3}{x-1} \geq \frac{2}{5}$ يكافئ $5(x-3) \geq 2(x-1)$	.77 الصحيح انك تجعل المتراجحة صفرية ثم توحد المقامات وتبسط الحسابات ثم تنشئ جدول الإشارة .
.78 إذا كان $x^2 > 4$ فإن : $x > 2$	.78 إذا كان $x^2 > 4$ فإن : $x^2 - 4 > 0$ ثم $(x-2)(x+2) > 0$ ثم جدول الإشارة .
.79 إذا كان $x \leq -2$ فإن : $x^2 \leq 4$	.79 عند تربيع عددين سالبين تغير اتجاه المتراجحة لان الدالة مربع متناقصة على المجال السالب .
.80 $(-2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$	.80 $(-2x-1)^2 = [-(2x+1)]^2 = (2x+1)^2$
.81 إذا كان : $-2 < x < 3$ فإن : $4 < x^2 < 9$	.81 إذا كان : $-2 < x < 3$ فإن : $0 < x^2 < 9$.
.82 إذا كان $\alpha < \beta$ فإن : $\cos \alpha < \cos \beta$ و	.82 عند تركيب الدوال ينبغي الاستفادة من اتجاه تغيراتها فإن كانت متزايدة نحافظ على اتجاه المتراجحة وان كانت متناقصة نقلب

	إتجاه المتراجحة ، راجع منحنيات الدوال الجيبية .
.83 $\overrightarrow{AM} . \vec{u} = \overrightarrow{AH} . \vec{u}$ معناه $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH}$	.83 لا نختزل الأشعة .
.84 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH}$ معناه $M = H$	.84 لا يجوز الاختزال .
.85 $\vec{u} . \vec{v} = 0$ معناه : $\vec{u} = 0$ أو $\vec{v} = 0$	.85 $\vec{u} . \vec{v} = 0$ معناه الشعاعان $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ متعامدان .

المساحات :



حالة خاصة : مساحة المثلث المتقايس الأضلاع

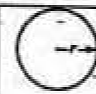
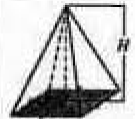
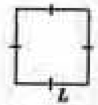
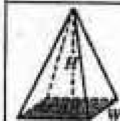
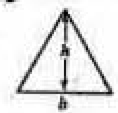
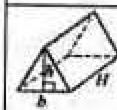
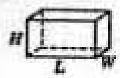
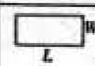


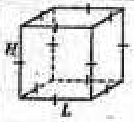
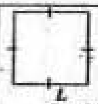
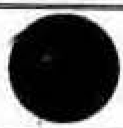
$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

حكمة :

إن أحسنتم أحسنتم لأنفسكم وإن أسأتم فلها فإذا جاء وعد الآخرة ليسوءوا وجوهكم وليدخلوا المسجد كما دخلوه أول مرة وليتبروا ما علوا تتبيرا ⑦ الإسراء

الأحجام والمساحات :

 مخروط	 مساحة القاعدة : $A=\pi r^2$	الحجم : $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع $V=\frac{1}{3}A\times H=\frac{1}{3}\pi r^2\times H$
 هرم بقاعدة مربعة	 المساحة : $A=L^2$	الحجم : $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع $V=\frac{1}{3}A\times H=\frac{1}{3}L^2\times H$
 هرم بقاعدة مستطيلة	 مساحة القاعدة : $A = L\times W$	الحجم : $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع $V=\frac{1}{3}A\times H=\frac{1}{3}(L\times W)\times H$
 هرم بقاعدة مثلثية	مساحة القاعدة $A=\frac{1}{2}b\times h$ 	الحجم : $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع $V=\frac{1}{3}A\times H=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}b\times h\right)\times H$ $=\frac{1}{6}b\times h\times H$
اسطوانة 	 $A=\pi r^2$	الحجم : مساحة القاعدة × الارتفاع $V=A\times H=\pi r^2\times H$
 الموشور الثلاثي	 $A=\frac{1}{2}b\times h$	الحجم : مساحة المثلث × الارتفاع $V=A\times H=\left(\frac{1}{2}b\times h\right)\times H$ $=\frac{1}{2}b\times h\times H$
 متوازي المستطيلات	 $A = L\times W$	الحجم : مساحة القاعدة × الارتفاع $V=A\times H=(L\times W)\times H$

 مكعب L=H	 مساحة القاعدة : $A=L^2$	الحجم : مساحة القاعدة × الارتفاع $V=A\times H=L^2\times H$ $=L^2\times L=L^3$
 كرة نصف قطرها r		حجم الكرة : $V=\frac{4}{3}\pi r^3$