بكالوريا 2011 . الشعبة : رياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول : (4.5 نقطة)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب :

$z_A = 1-i$ ، $z_B = -1+i$ و $z_C = \sqrt{3}(1+i)$.

1) اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة : z_A ، z_B و z_C .

2) أ- احسب الطويلة و عمدة للعدد المركب $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم فسّر هندسيا النتائج المحصل عليها .

ب- حدّد طبيعة المثلث ABC .

3) عيّن لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معيّنا .

4) T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = (-1+i)z + 1 - 3i$.

أ- عيّن طبيعة التحويل T و عناصره المميزة .

ب- استنتج طبيعة التحويل $T \circ T$ و عناصره المميزة .

التمرين الثاني : (4.5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) نعتبر النقط : $A(1;0;2)$ ، $B(1;1;4)$ و $C(-1;1;1)$.

أ- أثبت أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا .

ب- بيّن أن الشعاع $\vec{n}(3;4;-2)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) حيث :

$(P_1):\ 3x+4y-2z+1=0$ و $(P_2):\ 2x-2y-z-1=0$

أ- بيّن أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان .

ب- عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) .

جـ- تحقق أن النقطة $O(0;0;0)$ لا تنتمي إلى (Δ) .

د- احسب المسافتين $d\left(O\,;\left(P_1\right)\right)$ و $d\left(O\,;\left(P_2\right)\right)$ واستنتج المسافة $d\left(O\,;\left(\Delta\right)\right)$.

التمرين الثالث : (4 نقاط)

$\left(u_n\right)$ متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق :

$$\begin{cases} u_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases} \quad \text{حيث :} \quad \begin{cases} m = PPCM\left(u_3\,;u_5\right) \\ d = PGCD\left(u_3\,;u_5\right) \end{cases}$$

1) عيّن الحدّين u_3 و u_5 ثم استنتج u_0 .

2) اكتب u_n بدلالة n ، ثم بيّن أن : 2010 حدّ من حدود $\left(u_n\right)$ وعيّن رتبته .

3) عيّن الحدّ الذي ابتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من $\left(u_n\right)$ يساوي 10080

4) n عدد طبيعي غير معدوم .

أ- احسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n}$.

ب- استنتج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث :

$S_1 = u_0 + u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n}$ و $S_2 = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1}$

التمرين الرابع : (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (3x+4)e^x$.

$\left(c_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ- احسب f' ، f'' ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $f^{(n)}(x) = (3x+3n+4)e^x$ حيث : f' ، f'' ، ... ، $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f .

ب- استنتج حل المعادلة التفاضلية : $y'' = (3x+16)e^x$

2) أ- بيّن أن : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ وفسّر هذه النتيجة هندسيا .

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكل جدول تغيّراتها .

3) أ- اكتب معادلة للمماس $\left(\Delta\right)$ للمنحنى $\left(c_f\right)$ في النقطة ω التي فاصلتها $-\dfrac{10}{3}$.

ب- بيّن أن ω هي نقطة انعطاف للمنحنى $\left(c_f\right)$.

جـ- ارسم (Δ) و (c_f) على المجال $]-\infty\,;0]$.

4) أ- x عدد حقيقي من المجال $]-\infty\,;0]$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_{-1}^{x} te^t dt$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty\,;0]$.

ب- λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$.

احسب بدلالة λ المساحة $\mathrm{A}(\lambda)$ للحيز من المستوي المحدد بالمنحني (c_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$ ، $x=-\frac{4}{3}$ و $x=\lambda$ ثم جد $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} \mathrm{A}(\lambda)$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

1) نعتبر المعادلة : (E) ... $13x-7y=-1$ حيث : x و y عددان صحيحان.

حل المعادلة (E) .

2) عيّن الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث : $\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$

3) ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و 13 .

4) ليكن العدد الطبيعي b المكتوب في نظام التعداد ذي الأساس 9 كما يلي : $\overline{\alpha 00\beta 086}$ حيث : α و β عددان طبيعيان مع $\alpha \neq 0$.

عيّن α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91 .

التمرين الثاني : (5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقط : $A(1;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ ، $C(0;0;3)$ و $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)$

(D) المستقيم الذي يشمل النقطة A وشعاع توجيهه $\vec{u}\left(-1;1;\frac{3}{2}\right)$

و (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة C وشعاع توجيهه $\vec{v}\left(\frac{1}{2};1;-3\right)$

1) اكتب تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (D) و (Δ) ثم ادرس الوضع النسبي لهما

2) بيّن أن : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ ، ما ذا تستنتج بالنسبة للنقطة G ؟

3) عيّن شعاعا ناظميا $\overrightarrow{n}$ للمستوي (ABC) ثم اكتب معادلة له .

4) احسب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC) .

5) H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (D) .

أ- جد إحداثيات النقطة H .

ب- استنتج المسافة بين النقطة B والمستقيم (D) .

التمرين الثالث : (4 نقطة)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية :

1) أ- الشكل المثلثي للعدد المركب $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ هو $-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

ب- $a^{2011}+\overline{a}=0$ حيث : $\overline{a}$ مرافق a .

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$:

أ- التحويل T الذي كتابته المركبة $z'=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$ دوران زاويته $-\frac{\pi}{4}$ ومركزه مبدأ المعلم .

ب- مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg(z-i)=-\frac{\pi}{4}$ هي المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ذات اللاحقة i وشعاع توجيهه $\overrightarrow{w}$ لاحقته $1+i$.

3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ :

$u_0=\frac{1}{12}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{6}$.

أ- $u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$

ب- (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ- (u_n) متباعدة .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

1) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0\,;\,+\infty[$ بـ :

$$g(x)=x^2+\ln x^2-1$$

أ- ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ثم شكل جدول تغيّراتها .

ب- احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0\,;\,+\infty[$.

2) f الدالة المعرفة على المجال $]0\,;\,+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\ln x$.

و (c_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ- بيّن أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0\,;\,+\infty[$ وأن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$.

- استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكل جدول تغيّراتها .

ب- (δ) المنحني الممثل للدالة $x\mapsto \ln x$ على المجال $]0\,;\,+\infty[$.

- ادرس وضعية (c_f) بالنسبة إلى (δ) ثم جد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\ln x$ ، ما ذا تستنتج؟

- ارسم (δ) و (c_f) .

3) أ- x عدد حقيقي من المجال $[1\,;\,+\infty[$.

باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\ln t\,dt$.

- تحقق أن $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $[1\,;\,+\infty[$

- استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $[1\,;\,+\infty[$.

ب- α عدد حقيقي أكبر تماما من 1 .

احسب بدلالة α المساحة $\mathrm{A}(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (c_f) و (δ)

والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=\alpha$ ، ثم احسب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathrm{A}(\alpha)$.

حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

1) كتابة z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي :

لدينا : $z_A = 1-i$ ومنه : $|z_A| = |1-i| = \sqrt{2}$

وبالتالي : $z_A = 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

ولدينا : $z_B = -1+i$ ومنه : ومنه : $|z_B| = |-1+i| = \sqrt{2}$

ومنه : $z_B = -1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$

(لاحظ أن : $z_B = -1+i = -(1-i) = -z_A$)

ولدينا : $z_C = \sqrt{3}(1+i)$ ومنه : $|z_C| = |\sqrt{3}(1+i)| = \sqrt{3}\times\sqrt{2} = \sqrt{6}$

ومنه : $z_C = \sqrt{3}(1+i) = \sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{6}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) أ- حساب الطويلة و عمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$:

لدينا : $$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-1+i\ -1+i}{\sqrt{3+i\sqrt{3}-1+i}} = \frac{-2+2i}{\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}+1\right)}$$

$$= \frac{-2+2i}{\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}+1\right)} \times \frac{\sqrt{3}-1-i\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}-1-i\left(\sqrt{3}+1\right)}$$

ومنه : $$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{4+4i\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

وبالتالي : $$\begin{cases} \left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

● التفسير الهندسي للنتائج المحصل عليها :

نعلم أن : $\dfrac{AB}{AC}=\left|\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|$ و $\arg\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AB}\right)$

وبالتالي : $\dfrac{AB}{AC}=1$ أي : $AB=AC$ و $\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AB}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$

ب- تحديد طبيعة المثلث ABC :

من $AB=AC$ و $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AB}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}$ نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

3) تعيين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معيّنا :

نعلم أن المثلث ABC متقايس الأضلاع ، لكي يكون الرباعي $ACBD$ معيّنا يكفي أن يكون القطران $[AB]$ و $[CD]$ متناصفان في النقطة O

وهذا يعني أن النقطة D هي نظيرة النقطة C بالنسبة إلى O

ومنه : $z_D=-z_C=-\sqrt{3}(1+i)$

4) أ- تعيين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة :

لدينا : $z'=(-1+i)z+1-3i$ وبالتالي فإن العبارة المركبة للتحويل T

من الشكل $z'=az+b$ مع $a=-1+i$ و $b=1-3i$ وبما أن :

$|a|=\sqrt{2}$ نستنتج أن T هو تشابه مباشر : نسبته $k=|a|=\sqrt{2}$ ، زاويته $\theta=\arg(a)=\dfrac{3\pi}{4}$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة z_Ω حيث :

$z_\Omega=\dfrac{b}{1-a}$ ومنه : $z_\Omega=\dfrac{b}{1-a}=\dfrac{1-3i}{2-i}\times\dfrac{2+i}{2+i}=1-i=z_A$

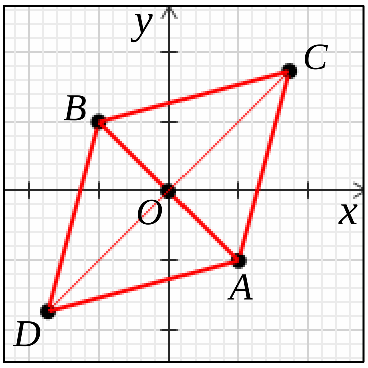
أي أن مركز التشابه T هو النقطة A .

ب- استنتاج طبيعة التحويل $T\circ T$ وعناصره المميزة :

تذكير : إذا كان $S(\Omega;k;\theta)$ و $S'(\Omega;k';\theta')$ تشابهين غير مباشرين فإن المركب $S\circ S'$ هو تشابه غير مباشر حيث : $S\circ S'=S''(\Omega;kk';\theta+\theta')$

وعليه فإن $T\circ T$ هو تشابه غير مباشر مركزه النقطة A ، نسبته $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

وزاويته $\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{2}$.



التمرين الثاني :

1) أ- إثبات أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا :

تذكير : ● A ، B و C تعيّن مستويا معناه : A ، B و C ليست في استقامية .

● A ، B و C ليست في استقامية معناه : الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا .

● $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا معناه : لا يوجد عدد حقيقي t حيث : $\overrightarrow{AC} = t\,\overrightarrow{AB}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}(0\,;1\,;2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2\,;1\,;\,-1)$

واضح أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأن مثلا : $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{-2}$

ب- تبيان أن $\overrightarrow{n}(3\,;4\,;-2)$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$:

لدينا : $\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = 3\times 0 + 4\times 1 - 2\times 2 = 4-4 = 0$ ومنه : $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB}$

و لدينا : $\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = 3\times(-2) + 4\times 1 - 2\times(-1) = 0$ ومنه : $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AC}$

● استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

$\overrightarrow{n}(3\,;4\,;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) وبالتالي فإن معادلته من الشكل : $3x+4y-2z+d=0$ ، وبما أن $A \in (ABC)$ فإن :

$3\times 1 + 4\times 0 - 2\times 2 + d = 0$ ومنه : $d = 1$

إذن : معادلة للمستوي (ABC) هي $3x+4y-2z+1=0$

2) أ- تبيان أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان :

$\overrightarrow{n_1}(3;\,4;\,-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_1)

$\overrightarrow{n_2}(2\,;-2\,;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_2)

لدينا : $\overrightarrow{n_1}\,.\,\overrightarrow{n_2} = 3\times 2 + 4\times(-2) - 2\times(-1) = 0$ ومنه : $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$

إذن : المستويان (P_1) و (P_2) متعامدان .

ب- تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) :

لدينا : $\begin{cases} 3x+4y-2z+1=0 \\ 2x-2y-z-1=0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} z=2x-2y-1 \\ 3x+4y-2z+1=0 \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} z=2x-2y-1 \\ 3x+4y-2(2x-2y-1)+1=0 \end{cases}$

وبعد التبسيط نحصل على الجملة : $\begin{cases} z=2x-2y-1 \\ -x+8y+3=0 \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} x=8y+3 \\ z=2(8y+3)-2y-1=14y+7 \end{cases}$

وبوضع $y=t$ نحصل على الجملة : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=8t+3 \\ y=t \\ z=14t+5 \end{cases}$

تمثل هذه الجملة الأخيرة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) . (توجد ثلاثيات أخرى)

جـ- التحقق أن النقطة $O(0;0;0)$ لا تنتمي إلى (Δ) :

من الجملة : $\begin{cases} 0=8t+3 \\ 0=t \\ 0=14t+5 \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} t=-\frac{3}{8} \\ t=0 \\ t=-\frac{5}{14} \end{cases}$ و هذا مستحيل

نستنتج أن النقطة $O(0;0;0)$ لا تنتمي إلى (Δ) .

د- حساب المسافتين $d(O;(P_1))$ و $d(O;(P_2))$:

تذكير : المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0;y_0;z_0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A;(P))$ حيث :

$$\boxed{d(A;(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

وباستعمال المساواة المؤطرة نجد :

$$d_1 = d\left(O\,;(P_1)\right) = \frac{|0+0+0+1|}{\sqrt{9+16+4}} = \frac{1}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{29}$$

$$d_2 = d\left(O\,;(P_2)\right) = \frac{|0+0+0-1|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{3}$$

- استنتاج المسافة $d_3 = d\left(O\,;(\Delta)\right)$:

نعلم أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان و (Δ) مستقيم تقاطعهما .

النقطة O لا تنتمي إلى (P_1) ولا تنتمي إلى (P_2) .

المسافة بين النقطة O والمستقيم (Δ) هي الطول OH حيث H هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (Δ) .

لتكن O' المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (P_2) ، وبالتالي فإن المثلث $OO'H$ قائم في O' ، وحسب مبرهنة فيثاغورث :

$$d_3^{\ 2} = OH^2 = d_1^{\ 2} + d_2^{\ 2} = \left(\frac{\sqrt{29}}{29}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{38}{261}$$

إذن : $d_3 = d\left(O\,;(\Delta)\right) = \sqrt{\frac{38}{261}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{38}{29}}$

التمرين الثالث :

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق :

$\begin{cases} u_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases}$ حيث : $\begin{cases} m = PPCM\,(u_3\,;u_5) \\ d = PGCD\,(u_3\,;u_5) \end{cases}$

1) تعيين الحدّين u_3 و u_5 :

تذكير : a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

* إذا كان $PGCD\,(a\,;b) = d$ فإنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما بحيث : $a = d \times a'$ و $b = d \times b'$.

* $PGCD\,(a\,;b) \times PPCM\,(a\,;b) = a \times b$ أي $m \times d = a \times b$

لدينا : $m \times d = a \times b$ ومنه : $m \times d = da' \times db'$ إذن : $m = da'b'$

بوضع $u_3 = a$ و $u_5 = b$ تكتب المساواة : $m + d = 42$ كما يلي :

$da'b' + d = 42$ ومنه : $d\,(a'b' + 1) = 42$ نستنتج أن : d يقسم 42 ... (1)

ولدينا : u_3 ، u_4 و u_5 بهذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية حسابية

وحسب خاصية الوسط الحسابي لمتتالية حسابية فإن $u_3+u_5=2u_4$

ومنه : $u_3+u_5=30$ وبالتالي : $da'+db'=30$

ومنه : $d(a'+b')=42$ ، نستنتج أن : d يقسم 30 ... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : d يقسم $PGCD(30;42)$ أي : d يقسم 6

ومنه : $d\in\{1;2;3;6\}$

نسمي (E) الجملة الآتية : $\begin{cases} d(a'b'+1)=42 \\ d(a'+b')=30 \end{cases}$

الحالة 1 : $d=1$

(E) تكافئ $\begin{cases} a'b'+1=42 \\ a'+b'=30 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a'b'=41 \\ a'+b'=30 \end{cases}$ الجملة مستحيلة

الحالة 2 : $d=2$

(E) تكافئ $\begin{cases} a'b'+1=21 \\ a'+b'=15 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a'b'=20 \\ a'+b'=15 \end{cases}$ الجملة مستحيلة

الحالة 3 : $d=3$

(E) تكافئ $\begin{cases} a'b'+1=14 \\ a'+b'=10 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a'b'=13 \\ a'+b'=10 \end{cases}$ الجملة مستحيلة

الحالة 4 : $d=6$

(E) تكافئ $\begin{cases} a'b'+1=7 \\ a'+b'=5 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a'b'=6 \\ a'+b'=5 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a'=2 \\ b'=3 \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} a=d\times a'=6\times 2=12 \\ b=d\times b'=6\times 3=18 \end{cases}$. إذن : $\begin{cases} u_3=12 \\ u_5=18 \end{cases}$

- استنتاج قيمة u_0 :

أساس المتتالية (u_n) هو $r=u_5-u_4=18-15=3$

ولدينا : $u_3=u_0+3r$ ومنه : $u_0=u_3-3r=12-3\times 3=3$

إذن : $u_0=3$

2) كتابة u_n بدلالة n : $u_n=u_0+n\times r=3+3n$

- تبيان أن 2010 حدّ من حدود المتتالية (u_n) :

من المساواة : $2010=3+3n$ نجد : $n=669$ وهو عدد طبيعي .

نستنتج أن العدد 2010 هو حدّ من حدود المتتالية (u_n) ورتبته 670 .

3) تعيين الحدّ الذي ابتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) هو 10080 :

نفرض أن الحدّ الذي نبحث عنه هو u_p ، وحسب المعطيات فإن

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + u_{p+4} = 10080 \quad \dots \ (*)$$

لكن : $u_{p+1} = u_p + r$ ، $u_{p+2} = u_p + 2r$ ، $u_{p+3} = u_p + 3r$

و $u_{p+4} = u_p + 4r$

تكتب عندئذ المساواة $(*)$ كما يلي : $5u_p + 10r = 10080$

ومنه : $u_p = \dfrac{10080 - 10r}{5} = \dfrac{10080 - 30}{5} = 2010$. إذن : $u_p = 2010$

4) أ- حساب المجموع S_n :

المجموع $=\dfrac{\text{عدد الحدود}}{2}$ (الحدّ الأول من المجموع + الحدّ الأخير منه)

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n} = \frac{2n+1}{2}(u_0 + u_{2n})$$

ولدينا : $u_0 = 3$ و $u_{2n} = u_0 + 2n \times r = 3 + 6n$

ومنه : $S_n = 3(n+1)(2n+1)$

ب- استنتاج المجموعين S_1 و S_2 :

S_1 هو مجموع $n+1$ حدّا الأولى من متتالية حسابية حدّها الأول $u_0 = 3$ وأساسها $r' = 2r = 6$.

$$S_1 = u_0 + u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n} = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_{2n})$$

$$= \frac{n+1}{2}(3 + 3 + 6n) = 3(n+1)^2$$

S_2 هو مجموع n حدّا الأولى من متتالية حسابية حدّها الأول $u_1 = 6$ وأساسها

$r' = 2r = 6$

$$S_2 = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1} = \frac{n}{2}(u_1 + u_{2n-1})$$

$$= \frac{n}{2}(6 + 6 + 6(n-1)) = 3n(n+1)$$

ملاحظة : يمكن حساب S_1 وبملاحظة أن $S_1 + S_2 = S_n$ نستنتج S_2 .

التمرين الرابع :

1) أ- حساب f' ، f'' :

تذكير : $(uv)' = u'v + v'u$

$$f'(x) = (3x+4)' e^x + (e^x)'(3x+4) = (3x+7)e^x$$

$$f''(x) = (3x+7)' e^x + (e^x)'(3x+7) = (3x+10)e^x$$

• البرهان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ فإن $f^{(n)}(x) = (3x+3n+4)e^x$:

نسمي p_n الخاصية " $f^{(n)}(x) = (3x+3n+4)e^x$ "

• التحقق من صحة p_1 :

الطرف الأول يساوي $f^{(1)}(x) = f'(x)$

الطرف الثاني يساوي $(3x+3\times1+4)e^x = (3x+7)e^x$

ومنه : الطرف الأول يساوي الطرف الثاني

إذن : p_1 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $f^{(n)}(x) = (3x+3n+4)e^x$

ونبرهن صحة p_{n+1} أي : $f^{(n+1)}(x) = (3x+3(n+1)+4)e^x$

لدينا :
$$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]' = \left[(3x+3n+4)e^x\right]'$$

$$= (3x+3n+4)' e^x + (e^x)'(3x+3n+4)$$

$$= \cdots = (3x+3(n+1)+4)e^x$$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ فإن $f^{(n)}(x) = (3x+3n+4)e^x$.

ب- استنتاج حل المعادلة التفاضلية $y'' = (3x+16)e^x$:

لدينا : $y'' = (3x+16)e^x$

ومنه $y' = (3x+16-3)e^x + c = (3x+13)e^x + c$ (c ثابت حقيقي)

وبالتالي : $y=(3x+13-3)e^{x}+cx+c'=(3x+10)e^{x}+cx+c'$
حيث c و c' ثابتان حقيقيان .
إذن : حلول المعادلة التفاضلية $y''=(3x+16)e^{x}$ هي الدوال y حيث :
$y=(3x+10)e^{x}+cx+c'$ (c و c' ثابتان حقيقيان)
2) أ- تبيان أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$:
لدينا : $f(x)=(3x+4)e^{x}=3xe^{x}+4e^{x}$
ونعلم أن : $\lim_{x\to-\infty} e^{x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ ومنه : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$
التفسير الهندسي للنتيجة : محور الفواصل مستقيم مقارب للمنحني (c_f) بجوار $-\infty$
ب- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f :
من السؤال 1- أ- وجدنا أن $f'(x)=(3x+7)e^{x}$ وبالتالي فإن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $(3x+7)$ ومنه النتائج التالية :

$f'(x)=0$ يكافئ $x=-\frac{7}{3}$
$f'(x)<0$ يكافئ $x<-\frac{7}{3}$
$f'(x)>0$ يكافئ $x>-\frac{7}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

إذن : الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty\,;\,-\frac{7}{3}\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{7}{3}\,;\,+\infty\right[$.
- جدول تغيّرات الدالة f :

$f\left(-\frac{7}{3}\right)=-3e^{-\frac{7}{3}}$
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-3e^{-\frac{7}{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ- كتابة معادلة للمماس (Δ) للمنحني (c_f) في النقطة ω التي فاصلتها $-\frac{10}{3}$:
تذكير : معادلة مماس المنحني الممثل لدالة f عند النقطة ذات الفاصلة a هي :
$y=f'(a).(x-a)+f(a)$

وعليه فإن معادلة المماس (Δ) هي :

$$y=-3e^{-\frac{10}{3}}\left(x+\frac{10}{3}\right)-6e^{-\frac{10}{3}}=-3e^{-\frac{10}{3}}x-16e^{-\frac{10}{3}}$$

ب- تبيان أن ω هي نقطة انعطاف للمنحني (c_f) :

تذكير : f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I ، x_0 عدد حقيقي من I .
إذا انعدمت الدالة المشتقة f'' عند x_0 مغيّرة إشارتها فإن النقطة $M_0(x_0\,;f(x_0))$ هي نقطة انعطاف للمنحني الممثل للدالة f .

الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و $f''(x)=(3x+10)e^x$

$f''(x)=0$ يكافئ $3x+10=0$ ومنه : $x=-\frac{10}{3}$

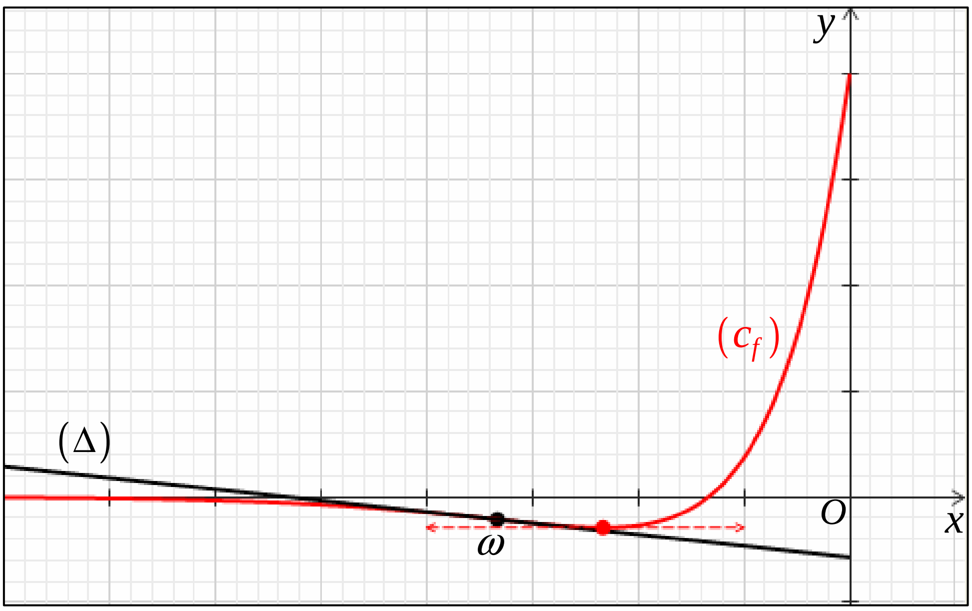
$f''(x)>0$ يكافئ $x>-\frac{10}{3}$

$f''(x)<0$ يكافئ $x<-\frac{10}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{10}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

الدالة f'' تنعدم عند $x_0=-\frac{10}{3}$ مغيّرة إشارتها وبالتالي فإن النقطة ω هي نقطة انعطاف للمنحني (c_f) .

جـ- رسم (Δ) و (c_f) على المجال $]-\infty\,;0]$:



4) أ- حساب $\int_{-1}^{x} te^{t}dt$:

تذكير بطريقة المكاملة بالتجزئة : لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث أن الدالتين المشتقتين لهما u' و v' مستمرتان على I .

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I ، لدينا :

$$\boxed{\int_{a}^{b} u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} u'(x)v(x)dx}$$

نضع : $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{t} \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = e^{t} \end{cases}$

وبالتالي :

$$\int_{-1}^{x} te^{t}dx = \left[te^{t}\right]_{-1}^{x} - \int_{-1}^{x} e^{t}dx$$
$$= \left[(t-1)e^{t}\right]_{-1}^{x} = (x-1)e^{x} + \frac{2}{e}$$

- استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0]$:

لتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0]$

لدينا : $f(x) = (3x+4)e^{x} = 3xe^{x} + 4e^{x}$

ومنه : $F(x) = 3(x-1)e^{x} + 4e^{x} + k = (3x+1)e^{x} + k$

إذن : $F(x) = (3x+1)e^{x} + k$ حيث k ثابت حقيقي .

ب- حساب $\mathrm{A}(\lambda)$:

$$\mathrm{A}(\lambda) = -\int_{\lambda}^{-\frac{4}{3}} f(x)dx = -\int_{\lambda}^{-\frac{4}{3}} (3x+4)e^{x}dx =$$
$$= -\left[(3x+1)e^{x}\right]_{\lambda}^{-\frac{4}{3}} = (3\lambda+1)e^{\lambda} + 3e^{-\frac{4}{3}}$$

إذن : $\mathrm{A}(\lambda) = (3\lambda+1)e^{\lambda} + 3e^{-\frac{4}{3}} u.a$

- حساب $\lim_{\lambda \to -\infty} \mathrm{A}(\lambda)$:

لدينا : $A(\lambda)=(3\lambda+1)e^{\lambda}+3e^{-\frac{4}{3}}=3\lambda e^{\lambda}+e^{\lambda}+3e^{-\frac{4}{3}}$

ونعلم أن : $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} e^{\lambda}=0$ و $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} 3\lambda e^{\lambda}=0$

ومنه : $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)=3e^{-\frac{4}{3}}$

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1) حل المعادلة (E) :

طريقة أولى : (استعمال مبرهنة غوص)

- تعيين حل خاص للمعادلة (E) :

الثنائية $(1\,;2)=(x_0\;;\;y_0)$ حل خاص للمعادلة (E)

- حل المعادلة (E) :

لدينا : $\begin{cases} 13x-7y=-1 \\ 13x_0-7y_0=-1 \end{cases}$ ومنه : $13(x-x_0)-7(y-y_0)=0$

وبالتالي : $13(x-x_0)=7(y-y_0)$ ... $(*)$

من المساواة $(*)$ نستنتج أن 7 يقسم الجداء $13(x-x_0)$

وبما أن 7 و 13 أوليان فيما بينهما وحسب مبرهنة غوص فإن 7 يقسم $x-x_0$

ومنه : $x-x_0=7k$ وبالتالي : $x=7k+1$ وبالتعويض في المعادلة (E)

نجد : $y=13k+2$

إذن : حلول المعادلة(E)هي الثنائيات $(x\,;y)$ حيث : $(k\in\mathbb{Z})$ $\begin{cases} x=7k+1 \\ y=13k+2 \end{cases}$

طريقة ثانية : (استعمال طريقة الموافقة)

تكتب المعادلة (E) باستعمال الموافقة بترديد 7 كما يلي : $13x\equiv-1\,[7]$

ونعلم أن : $13\equiv-1\,[7]$ وبالتالي : $-x\equiv-1\,[7]$ ومنه : $x\equiv1\,[7]$

وعليه : $x=7k+1$ وبالتعويض في المعادلة (E) نجد : $y=13k+2$

2) تعيين الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث $\begin{cases} a\equiv-1[7] \\ a\equiv0[13] \end{cases}$:

لدينا : $\begin{cases} a\equiv-1[7] \\ a\equiv0[13] \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a=7\lambda-1 \\ a=13\lambda' \end{cases}$ حيث λ و λ' عددان صحيحان

وبالتالي : $7\lambda-1=13\lambda'$ أي : $13\lambda'-7\lambda=-1$

وحسب السؤال السابق نستنتج أن : $(k\in\mathbb{Z})$ $\begin{cases} \lambda'=x=7k+1 \\ \lambda=y=13k+2 \end{cases}$

وبالتعويض في $a=7\lambda-1$ أو في $a=13\lambda'$ نجد : $a=91k+13$
إذن : $a=91k+13$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

3) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 7 :

$9^0\equiv 1\,[7]$ ، $9^1\equiv 2\,[7]$ ، $9^2\equiv 4\,[7]$ ، $9^3\equiv 1\,[7]$

نستنتج أن : $9^{3k}\equiv 1\,[7]$ ، $9^{3k+1}\equiv 2\,[7]$ ، $9^{3k+2}\equiv 4\,[7]$

إذن : بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 7 دورية ودورها 3 نلخصها في الجدول الآتي : (في هذا الجدول يدلّ k على عدد طبيعي)

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
البواقي	1	2	4

- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 :

$9^0\equiv 1\,[13]$ ، $9^1\equiv 9\,[13]$ ، $9^2\equiv 3\,[13]$ ، $9^3\equiv 1\,[13]$

نستنتج أن : $9^{3k'}\equiv 1\,[13]$ ، $9^{3k'+1}\equiv 9\,[13]$ ، $9^{3k'+2}\equiv 3\,[13]$

إذن : بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 دورية ودورها 3 نلخصها في الجدول الآتي : (في هذا الجدول يدلّ k' على عدد طبيعي)

n	$3k'$	$3k'+1$	$3k'+2$
البواقي	1	9	3

4) تعيين α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91 :

بما أن $b=\overline{\alpha 00\beta 086}^{\,9}$ و $\alpha\neq 0$ فإن $1\le\alpha\le 8$ و $0\le\beta\le 8$

$$b=\overline{\alpha 00\beta 086}^{\,9}=6+8\times 9+0\times 9^2+\beta\times 9^3+0\times 9^4+0\times 9^5+\alpha\times 9^6$$
$$=6+8\times 9+\beta\times 9^3+\alpha\times 9^6$$

لدينا : $b\equiv 0[91]$ أي : $b\equiv 0[7\times 13]$ ومنه : $\begin{cases} b\equiv 0[7] \\ b\equiv 0[13]\end{cases}$

وباستعمال نتائج السؤال (3) نحصل على الجملة : $\begin{cases}\alpha+\beta\equiv -1[7] \\ \alpha+\beta\equiv 0[13]\end{cases}$

ومنه : $(\alpha;\beta)\in\{(5;8),(6;7),(7;6),(8;5)\}$

ملاحظة : لتعيين α و β ، يمكن الاستعانة بالجدول الآتي :

β \ α	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11	12	13
6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	9	10	11	12	13	14	15	16

التمرين الثاني :

1) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (D) :

تكون $M(x;y;z)$ نقطة من (D) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث : $\overrightarrow{AM}=t\,\vec{u}$. ومنه التمثيل الوسيطي الآتي :

$$\begin{cases} x=-t+1 \\ y=t \\ z=\frac{3}{2}t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) :

تكون $M(x;y;z)$ نقطة من (Δ) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t' بحيث : $\overrightarrow{CM}=t\,\vec{v}$. ومنه التمثيل الوسيطي الآتي :

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}t' \\ y=t' \\ z=-3t'+3 \end{cases} \quad (t'\in\mathbb{R})$$

- دراسة الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (Δ) :

لدينا : $\vec{u}\left(-1;1;\frac{3}{2}\right)$ و $\vec{v}\left(\frac{1}{2};1;-3\right)$ وبالتالي فإن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا ، وعليه فإن المستقيمين (D) و (Δ) إما من نفس المستوي

ومتقاطعان وإما ليسا من نفس المستوي .

للبحث عن نقط تقاطع (D) و (Δ) نقوم بحل الجملة :

$$\begin{cases} -t+1=\frac{1}{2}t' \\ t\quad =t' \\ \frac{3}{2}t\quad =-3t'+3 \end{cases}$$

بحل الجملة : $\begin{cases} -t+1=\frac{1}{2}t' \\ t\quad =t' \\ \frac{3}{2}t\quad =-3t'+3 \end{cases}$ نجد : $t=t'=\frac{2}{3}$ ومنه : $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{2}{3} \\ z=1 \end{cases}$

إذن : $(D)\cap(\Delta)=\left\{G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)\right\}$

2) تبيان أن $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$:

لدينا : $\overrightarrow{GA}\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-1\right)$ ، $\overrightarrow{GB}\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3};-1\right)$ و $\overrightarrow{GC}\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};2\right)$

وبما أن : $\begin{cases} \frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0 \\ -\frac{2}{3}+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=0 \\ -1-1+2=0 \end{cases}$ فإن $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

- الاستنتاج : نستنتج أن النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC .

3) تعيين شعاع ناظمي $\vec{n}$ للمستوي (ABC) وكتابة معادلة ديكارتية له :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;2;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;0;3)$

واضح أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأن مثلا : $\frac{-1}{-1}\neq\frac{0}{3}$

وبالتالي فإن النقط A ، B و C ليست في استقامية ، فهي تعيّن مستويا (ABC) .

إذا كان $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) فإن : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\perp\vec{n} \\ \overrightarrow{AC}\perp\vec{n} \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{n}=0 \\ \overrightarrow{AC}.\vec{n}=0 \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} -a+2b=0 \\ -a+3c=0 \end{cases}$ وبحل هذه الجملة مع

فرض $a=6$ نجد : $\vec{n}(6;3;2)$.

تكون عندئذ معادلة للمستوي (ABC) من الشكل $6x+3y+2z+d=0$

ولدينا : $A\in(ABC)$ ومنه : $6\times1+3\times0+2\times0+d=0$ ينتج : $d=-6$

إذن : معادلة للمستوي (ABC) هي $\boxed{6x+3y+2z-6=0}$

4) حساب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC) :

تذكير : المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0;y_0;z_0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A;(P))$ حيث :

$$\boxed{d(A;(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

وباستعمال المساواة المؤطرة نجد :

$$d(O;(ABC))=\frac{|0+0+0-6|}{\sqrt{36+9+4}}=\frac{6}{\sqrt{49}}=\frac{6}{7}$$

5) أ- إيجاد إحداثيات النقطة H :

نفرض أن إحداثيات النقطة H هي $(x\ ;y\ ;z)$

بما أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (D) فإن

$\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{BH}\\ H\in(D)\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}\vec{u}.\overrightarrow{BH}=0\\ H\in(D)\end{cases}$ وبحل الجملة

$$\begin{cases}-x+(y-2)+\frac{3}{2}z=0\\ x=-t+1\\ y=t\\ z=\frac{3}{2}t\end{cases}$$

نجد : $t=\frac{12}{17}$ وبالتعويض في الجملة : $\begin{cases}x=-t+1\\ y=t\\ z=\frac{3}{2}t\end{cases}$

نجد : $H\left(\frac{5}{17};\frac{12}{17};\frac{18}{17}\right)$

ب- استنتاج المسافة بين النقطة B والمستقيم (D) :

تذكير : $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتان من الفضاء .

$$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

المسافة بين النقطة B والمستقيم (D) هي BH .

لدينا: $B\,(0;2;0)$ و $H\left(\frac{5}{17};\frac{12}{17};\frac{18}{17}\right)$ ومنه: $BH=\sqrt{\frac{833}{289}}=\frac{7}{17}\sqrt{17}$

التمرين الثالث :

1) أ- خطأ

لدينا : $|a|=\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=1$ و $\arg(a)=\frac{3\pi}{4}$

وبالتالي فإن الشكل المثلثي للعدد المركب a هو $\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\sin\frac{3\pi}{4}$

ب- صحيح

تذكير بدستور موافر : θ عدد حقيقي كيفي و n عدد صحيح .

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

لدينا :

$$a^{2011}=\cos\frac{3\times2011\pi}{4}+i\,\sin\frac{3\times2011\pi}{4}$$

$$=\cos\left(1508\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\,\sin\left(1508\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}+i\,\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ولدينا : $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه : $\overline{a}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

وبالتالي : $a^{2011}+\overline{a}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

2) أ- خطأ

العبارة المركبة للتحويل T من الشكل $z'=az$ حيث : $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

ومن السؤال -1- أ- وجدنا أن : $|a|=\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=1$ و $\arg(a)=\frac{3\pi}{4}$

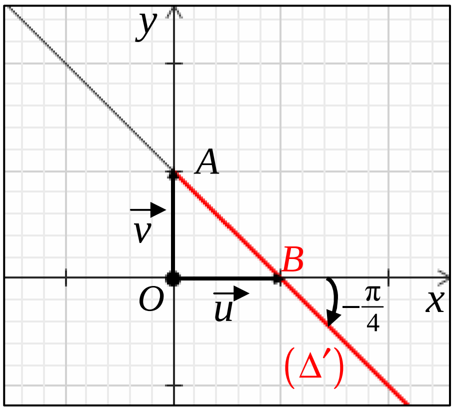
نستنتج أن التحويل T دوران زاويته $\frac{3\pi}{4}$ ومركزه مبدأ المعلم .

ب- خطأ

تذكير : $\arg(z-i)=\arg(z_M-z_A)=(\vec{u};\overrightarrow{AM})\ [2\pi]$

$\arg(z-i)=-\frac{\pi}{4}$ معناه : $(\vec{u};\overrightarrow{AM})\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

إذن : مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg(z-i)=-\frac{\pi}{4}$ هي نصف المستقيم ($]AB$ الذي يشمل النقطة B ذات اللاحقة 1 وشعاع توجيهه $\vec{w}'$ لاحقته $1-i$. (مجموعة النقط M هي نصف مستقيم مفتوح مبدؤه A)



3) أ- صحيح

نستعمل البرهان بالتراجع لإثبات أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$$

نسمي p_n الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$ "

- التحقق من صحة p_0 :

الطرف الأول يساوي $u_0=\frac{1}{12}$

الطرف الثاني يساوي $-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^0+\frac{2}{3}=-\frac{7}{12}+\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$

ومنه : الطرف الأول يساوي الطرف الثاني وبالتالي فإن p_0 صحيحة

- نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$

ونبرهن صحة p_{n+1} أي : $u_{n+1}=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+\frac{2}{3}$

لدينا : $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{6}$ ومنه : $u_{n+1}=\frac{3}{4}\left[-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}\right]+\frac{1}{6}$

وبالتالي : $u_{n+1}=-\frac{7}{12}\times\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+\frac{2}{3}$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

- إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$

ب- خطأ

من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+\frac{2}{3}+\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{2}{3}$$
$$=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n\left[\frac{3}{4}-1\right]=\frac{7}{48}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

وبما أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{7}{48}\left(\frac{3}{4}\right)^n>0$ فإن : $u_{n+1}-u_n>0$

وبالتالي : (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ- خطأ

تذكير : إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$ وبالتالي : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$

لدينا : $u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$ ونعلم أن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$

وبالتالي : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{2}{3}$ وعليه فإن المتتالية (u_n) متقاربة .

التمرين الرابع :

1) أ- دراسة اتجاه تغيّر الدالة g :

من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ ، $g'(x)=\frac{2(x^2+1)}{x}>0$

وبالتالي فإن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

- جدول تغيّرات الدالة g :

نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x^2=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

ولدينا : $\lim\limits_{x\to 0} \ln x^2=-\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

ب- احسب $g(1)$: $g(1)=0$

- استنتاج إشارة $g(x)$ في المجال $]0;\ +\infty[$:
  - $g(x)=0$ يكافئ $x=1$
  - $g(x)<0$ يكافئ $x\in\,]0;1[$
  - $g(x)>0$ يكافئ $x\in\,]1;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) أ- تبيان أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;\ +\infty[$:

الدالة $x\mapsto 1-\dfrac{1}{x^2}$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ (دالة ناطقة) وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، الدالة $x\mapsto \ln x$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ (دالة لوغاريتمية نيبيرية)

نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;\ +\infty[$.

- تبيان أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;\ +\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$:

تذكير : $(uv)'=u'v+v'u$

$$f'(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)'\times\ln x + (\ln x)'\times\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\frac{2}{x^3}\times\ln x + \frac{1}{x}\times\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\frac{2\ln x}{x^3} + \frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}=\frac{2\ln x+x^2-1}{x^3}$$

ونعلم أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0\,;\,+\infty[$ ، $\ln x^2=2\ln x$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x من $]0\,;\,+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$

- استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ ومنه النتائج الآتية :

- $f'(x)=0$ يكافئ $x=1$
- $f'(x)<0$ يكافئ $x\in]0\,;1[$
- $f'(x)>0$ يكافئ $x\in]1\,;+\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0\,;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

- جدول تغيّرات الدالة f :

- لدينا : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\ln x=-\infty$

ومنه : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=+\infty$

- ولدينا : $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\ln x=\ln x-\dfrac{\ln x}{x^2}$

ونعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1)=0$

ب- دراسة وضعية (c_f) بالنسبة إلى (δ) :

طريقة : لدراسة وضعية المنحني (c_f) بالنسبة إلى المنحني (δ) نقوم بحساب الفرق $f(x)-\ln x$ وندرس إشارته .

لدينا : $f(x)-\ln x=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\ln x-\ln x=-\dfrac{\ln x}{x^2}$

إشارة الفرق $f(x)-\ln x$ من نفس إشارة $-\ln x$ ومنه النتائج الآتية :

- $f(x)-\ln x=0$ يكافئ $x=1$
- $f(x)-\ln x>0$ يكافئ $x\in]0;1[$
- $f(x)-\ln x<0$ يكافئ $x\in]1;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-\ln x$		$+$	0	$-$	

- إذا كان $x=1$ فإن المنحنيين (c_f) و (δ) يتقاطعان في النقطة $H(1;0)$.
- إذا كان $x\in]0;1[$ فإن (c_f) يقع فوق (δ) .
- إذا كان $x\in]1;+\infty[$ فإن (c_f) يقع تحت (δ) .

- إيجاد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\ln x$:

نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ (نتائج التزايد المقارن للدالتين $x\mapsto\ln x$ $x\mapsto x$)

ونعلم أيضا أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\times\dfrac{\ln x}{x}=0\times0=0$

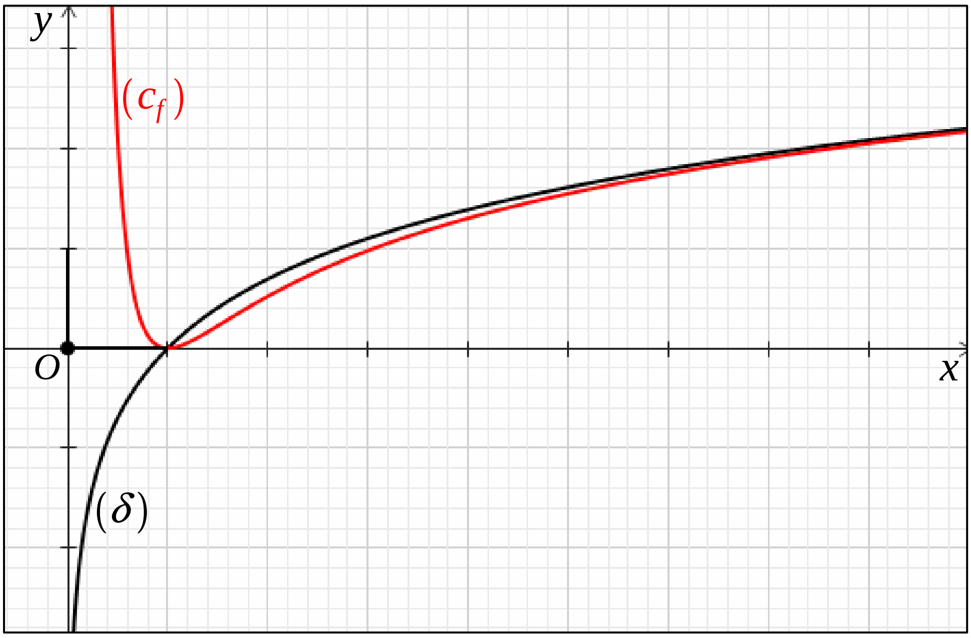
إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\ln x=0$

● الاستنتاج :

من السؤال 2- ب- وجدنا أن : $f(x)-\ln x=-\frac{\ln x}{x^2}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$

نستنتج أن المنحني (c_f) مقارب للمنحني (δ) في جوار $+\infty$.

● ارسم (δ) و (c_f) :



3) أ- حساب $\int_1^x \frac{1}{t^2}\ln t\,dt$:

تذكير بطريقة المكاملة بالتجزئة : لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث أن الدالتين المشتقتين لهما u' و v' مستمرتان على I .

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I ، لدينا :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

نضع : $\begin{cases} u(t)=\ln t \\ v'(t)=\frac{1}{t^2}\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} u'(t)=\frac{1}{t} \\ v(t)=-\frac{1}{t}\end{cases}$

وبالتالي :

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt=\left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x-\int_1^x \frac{-1}{t^2}dt$$

$$=\left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x-\left[\frac{1}{t}\right]_1^x=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+1$$

إذن : $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+1$

● التحقق أن $x\mapsto x\ln x-x$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $[1\ ;\ +\infty[$:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1\ ;\ +\infty[$ ، لدينا :

$$(x\ln x-x)'=(x\ln x)'-(x)'$$

$$=(x)'\times\ln x+(\ln x)'\times x-1$$

$$=\ln x+\frac{1}{x}\times x-1=\ln x$$

إذن : $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $[1\ ;\ +\infty[$.

● استنتاج F دالة أصلية للدالة f على المجال $[1\ ;\ +\infty[$:

لدينا : $f(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln x=\ln x-\frac{1}{x^2}\ln x$

ومنه : $F(x)=x\ln x-x+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}-1$

ب- حساب $\mathrm{A}(\alpha)$:

$$\mathrm{A}(\alpha)=\int_1^{\alpha}\left[\ln x-f(x)\right]dx=\int_1^{\alpha}\frac{1}{x^2}\ln x\,dx$$

$$=-\frac{\ln\alpha}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}+1$$

إذن : $\mathrm{A}(\alpha)=-\frac{\ln\alpha}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}+1\quad u.a$

● حساب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathrm{A}(\alpha)$:

نعلم أن : $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{\ln\alpha}{\alpha}=0$ وَ $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\alpha}=0$ ومنه : $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathrm{A}(\alpha)=1$

بكالوريا 2010 . الشعبة : رياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول : (4 نقاط)

1 نعتبر المعادلة : $(1)\ldots\ 7x+65y=2009$ حيث x و y عددان صحيحان .
أ- بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7 .
ب- حل المعادلة (1) .

2 ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9 .

3 عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد $2^{6n}+3n+2$ القسمة على 9 .

4 نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2^{6n}-1$.
أ- تحقق أن u_n يقبل القسمة على 9 .
ب- حل المعادلة : $(2)\ldots\ (7u_1)x+(u_2)y=126567$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان .
جـ- عيّن الثنائية $(x;y)$ حل (2) حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيان مع $y_0\geq 25$.

التمرين الثاني : (4.5 نقطة)

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط :
$A(2;0;0)$ ، $B(0;1;0)$ و $C(0;0;2)$.

1 بيّن أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .

2 جد معادلة للمستوي (ABC) .

3 جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) .

4 (P) المستوي الذي معادلته : $2x+2y+z-2=0$.
أ- بيّن أن المستويين (P) و (ABC) متقاطعان .
ب- بيّن أن المستوي (P) يشمل النقطتين B و C ، ماذا تستنتج ؟

5 عيّن (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :
$$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$$

التمرين الثالث : (4.5 نقطة)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3-3z^2+3z-9=0 \; ...(E)$

① أ- تحقق أن 3 حل للمعادلة (E) ، ثم عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث

من أجل كل عدد مركب z ، $z^3-3z^2+3z-9=(z-3)(az^2+bz+c)$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

② في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط

A ، B و C صور الأعداد المركبة $z_A=3$ ، $z_B=i\sqrt{3}$ و $z_C=-i\sqrt{3}$.

بيّن أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

③ D النقطة التي لاحقتها $z_D=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و E صورتها بالدوران الذي مركزه O

وزاويته $\frac{\pi}{3}$. عيّن z_E لاحقة النقطة E .

④ F النقطة التي لاحقتها $z_F=1-i\sqrt{3}$.

أ- احسب $\frac{z_F}{z_E}$ واستنتج أن المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان .

ب- عيّن z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعا .

التمرين الرابع : (7 نقطة)

I- g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(3-x)e^x-3$.

① ادرس تغيرات الدالة g .

② بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث

$2.82<\alpha<2.83$.

③ استنتج ، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

II- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3}{e^x-1} \; ; \; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① أ- بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$.

ب- اكتب معادلة لـ (T) مماس المنحني $\left(C_f\right)$ عند المبدأ O .

2 أ- بيّن أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 e^{-x} = 0$ ثم احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنه من أجل $x \neq 0$ فإن $g(x)$ $f'(x) = \dfrac{x^2}{(e^x - 1)^2}$.

جـ- تحقق أن $f(\alpha) = \alpha^2 (3 - \alpha)$ ثم عيّن حصرا له .

د- أنشئ جدول تغيّرات الدالة f .

3 أ- احسب $f(x) + x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لـ $\left(C_f\right)$ و (C) منحني الدالة $x \mapsto -x^3$.

ب- بيّن أن $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) + x^3\right) = 0$ وفسّر النتيجة هندسيا .

4 أنشئ في نفس المعلم المماس (T) والمنحنيين (C) و $\left(C_f\right)$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

1. برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^{3n}-1$ يقبل القسمة على 13 .
2. استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، يقبل كل من العددين $3^{3n+1}-3$ و $3^{3n+2}-9$ القسمة على 13 .
3. عيّن ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13 ، واستنتج باقي قسمة 2005^{2010} على 13 .
4. نضع ، من أجل كل عدد طبيعي p ، $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}$.

أ- من أجل $p=3n$ ، عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 .

ب- برهن أنه إذا كان $p=3n+1$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 .

جـ- عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p=3n+2$.

5. يكتب العددان الطبيعيان a و b في نظام العدّ ذي الأساس 3 كما يلي :

$a=\overline{1001001000}$ و $b=\overline{1000100010000}$

أ- تحقق أن العددين a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري .

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 13 .

التمرين الثاني : (5 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. نسمي A ، B و I النقط التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=1-4i$ ، $z_B=-1-2i$ و $z_I=1-2i$

أ- علم النقط A ، B و I .

ب- اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $Z=\dfrac{z_I-z_A}{z_I-z_B}$.

جـ- ما هو نوع المثلث IAB ؟

د- C صورة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 .

- احسب اللاحقة z_C للنقطة C .

هـ- D مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$.

- احسب اللاحقة z_D للنقطة D .

و- بيّن أن $ABCD$ مربع .

② عيّن وأنشئ (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \|$$

③ عيّن وأنشئ (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = 1$$

التمرين الثالث : (4 نقاط)

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط : $A(-1;2;1)$ ، $B(2;1;3)$ و $C(0;-1;2)$ ، ولتكن (P) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث : $AM = BM$.

① بيّن أن (P) هو المستوي الذي معادلته : $3x - y + 2z - 4 = 0$.

② عيّن معادلة للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A ويوازي المستوي (P) .

③ أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل C ويعامد (P) .

ب- عيّن إحداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (D) .

جـ- احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) .

④ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي (π) الذي يحوي المستقيم (AC) ويعامد المستوي (P) ، ثم استنتج معادلة له .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x - 1 - 2\ln x$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول هي $4\,cm$.

① احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا .

② أ- بيّن أن $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

ب- ادرس تغيرات الدالة g .

جـ- احسب $g(1)$.

د- برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما α حيث $3.5 < \alpha < 3.6$

هـ- استنتج إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

③ f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + x + x^2 \ln x \; ; \; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

أ- احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x)}{x}$ وفسّر النتيجة هندسيا .

ب- احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

جـ- بيّن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن $f'(x) = x\, g\left(\frac{1}{x}\right)$

- استنتج اتجاه تغيّر الدالة f .

د- شكل جدول تغيّرات الدالة f .

- بيّن أن : $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \dfrac{\alpha - 1}{2\alpha^2}$ واستنتج حصرا للعدد $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$

④ ارسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f على المجال $[0;3]$.

حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

1 أ- تبيان أنه إذا كانت $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7 :

تذكير بمبرهنة غوص : a ، b و c أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا قسم العدد a الجداء $b\times c$ وكان a أوليا مع b فإن a يقسم c .

لدينا : $7x+65y=2009$ ومنه : $65y=2009-7x$

وبالتالي : $65y=7(287-x)$ ، نستنتج أن 7 يقسم $65y$ وبما أن 7 أولي مع 65 وحسب غوص فإن 7 يقسم y وهذا يعني أن y مضاعف للعدد 7 .

إذن : إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7 .

ب- حل المعادلة (1) :

y مضاعف للعدد 7 معناه : يوجد عدد صحيح k بحيث $y=7k$ وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على : $x=287-65k$.

إذن : حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $\begin{cases} x=-65k+287 \\ y=7k \end{cases}$ $(k\in\mathbb{Z})$

2 دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9 :

$2^0\equiv1[9]$ ، $2^1\equiv2[9]$ ، $2^2\equiv4[9]$ ، $2^3\equiv8[9]$ ، $2^4\equiv7[9]$ ، $2^5\equiv5[9]$ ، $2^6\equiv1[9]$. نستنتج أن بواقي قسمة 2^n على 9 دورية ودورها 6 نلخصها في الجدول الآتي : (في هذا الجدول k عدد طبيعي)

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
$2^n\equiv$	1	2	4	8	7	5

3 تعيين قيم n بحيث يقبل العدد $2^{6n}+3n+2$ القسمة على 9 :

من السؤال 2 نستنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $2^{6n}\equiv1[9]$

تكتب عندئذ العلاقة : $2^{6n}+3n+2\equiv0[9]$ كما يلي : $1+3n+2\equiv0[9]$

ومنه : $3n\equiv6[9]$ ، وعليه : $n\equiv2[3]$ وبالتالي : $n=3\alpha+2$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$

إذن : يقبل العدد $2^{6n}+3n+2$ القسمة على 9 من أجل $n=3\alpha+2$ ، $\alpha\in\mathbb{N}$

4 أ- التحقق أن u_n يقبل القسمة على 9 :

من السؤال 2 نستنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $2^{6n}\equiv1[9]$

ومنه : $2^{6n}-1\equiv 0\,[9]$ أي : $u_n\equiv 0\,[9]$.

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n يقبل القسمة على 9 .

ب- حل المعادلة (2) :

لدينا : $u_1=2^6-1=63$ و $u_2=2^{12}-1=4095$

تكتب عندئذ المعادلة (2) كما يلي : $7\times 63\,x+4095\,y=126567$

وبقسمة الطرفين على 63 نحصل على المعادلة : $7x+65\,y=2009$ أي أن المعادلة (2) تكافئ المعادلة (1) . نستنتج أن لهما نفس مجموعة الحلول .

إذن : حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x\,;y)$ حيث : $\begin{cases} x=-65k+287 \\ y=7k \end{cases}$ $(k\in\mathbb{Z})$

جـ- تعيين الثنائية $(x\,;y)$ حل (2) حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيان مع $y_0\geq 25$:

لدينا : $x_0\geq 0$ و $y_0\geq 25$ ومنه : $-65k+287\geq 0$ و $7k\geq 25$

وبالتالي : $k\leq 4.41$ و $k\geq 3.57$ نستنتج أن $k=4$.

إذن : $(x\,;y)=(27\,;28)$.

التمرين الثاني : (4.5 نقطة)

1 تبيان أن النقط A ، B و C ليست في استقامية :

تذكير : • النقط A ، B و C ليست في استقامية معناه : الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا .

• $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا يعني وجود عدد حقيقي t حيث : $\overrightarrow{AC}=t\,\overrightarrow{AB}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-2\,;1;\,0)$ و $\overrightarrow{AC}(-2\,;0\,;2)$ وبالتالي فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا (لا يوجد عدد حقيقي t بحيث $\overrightarrow{AC}=t\,\overrightarrow{AB}$) .

إذن : النقط A ، B و C ليست في استقامية .

2 إيجاد معادلة للمستوي (ABC) :

بما أن النقط A ، B و C ليست في استقامية ، فإنها تعيّن مستويا (ABC) .

إذا كان $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) فإن : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\perp\vec{n} \\ \overrightarrow{AC}\perp\vec{n} \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n}=0 \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{n}=0 \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} -2a+b=0 \\ -2a+2c=0 \end{cases}$ وبحل هذه الجملة مع

فرض $c=1$ نجد : $\overrightarrow{n}(1;2;1)$.

تكون عندئذ معادلة للمستوي (ABC) من الشكل $x+2y+z+d=0$

ولدينا : $A\in(ABC)$ ومنه : $2+2\times0+0+d=0$ ينتج : $d=-2$

إذن : معادلة للمستوي (ABC) هي $\boxed{x+2y+z-2=0}$

③ إيجاد تمثيل وسيطي للمستقيم (BC) :

تكون $M(x;y;z)$ نقطة من (BC) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث :

$\overrightarrow{BM}=t\,\overrightarrow{BC}$. لدينا : $\overrightarrow{BC}(0;-1;2)$ ومنه التمثيل الوسيطي التالي :

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-t \\ z=2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

④ أ- تبيان أن المستويين (P) و (ABC) متقاطعان :

$\overrightarrow{u}(2;2;1)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\overrightarrow{n}(1;2;1)$ شعاع ناظمي لـ (ABC)

الشعاعان $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{n}$ غير مرتبطين خطيا (لا يوجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{n}$)

نستنتج أن المستويين (P) و (ABC) متقاطعان .

ب- تبيان أن المستوي (P) يشمل النقطتين B و C :

المستوي (P) يشمل النقطتين B و C إذا وفقط إذا كانت إحداثيات كل من B و C تحقق المعادلة $2x+2y+z-2=0$.

لدينا : $2\times0+2\times1+0-2=2-2=0$ ومنه : $B\in(P)$

ولدينا : $2\times0+2\times0+2-2=2-2=0$ ومنه : $C\in(P)$

إذن : المستوي (P) يشمل النقطتين B و C .

● الاستنتاج : المستقيم (BC) هو مستقيم تقاطع المستويين (P) و (ABC) .

⑤ تعيين المجموعة (E) :

$M\in(E)$ يكافئ $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$

لتكن G مركز ثقل المثلث ABC ومنه : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

ولدينا : $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})$

$=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=-\overrightarrow{AD}$

حيث $ABDC$ متوازي أضلاع (إحداثيات النقطة D هي $(-2;1;2)$) .

ومنه : $M \in (E)$ يكافئ $\|3\overrightarrow{MG}\| = \|-\overrightarrow{AD}\|$ وبالتالي : $GM = \frac{1}{3}AD$

إذن : (E) هي سطح الكرة التي مركزها النقطة $G\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ ونصف قطرها

$\frac{1}{3}AD = AG = \frac{\sqrt{21}}{3}$ (يمكن تعيين المجموعة (E) تحليليا أي بمعادلة) .

التمرين الثالث : (4.5 نقطة)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = 0 \ ...(E)$

1 أ- التحقق أن 3 حل للمعادلة (E) :

لدينا : $3^3 - 3\times3^2 + 3\times3 - 9 = 36 - 36 = 0$ ومنه : 3 حل للمعادلة (E) .

• تعيين a ، b و c : $z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = (z-3)(az^2 + bz + c)$

من أجل كل z من $\mathbb{C}$:

$$(z-3)(az^2+bz+c) = \cdots = az^3 + (b-3)z^2 + (c-3b)z - 3c$$

ومنه : $az^3 + (b-3)z^2 + (c-3b)z - 3c = z^3 - 3z^2 + 3z - 9$

نستنتج أن : $\begin{cases} a=1 \\ b-3=-3 \\ c-3b=3 \\ -3c=-9 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=3 \end{cases}$

إذن : من أجل كل z من $\mathbb{C}$ ، $(z-3)(z^2+3)=0$

ب- حل المعادلة (E) :

لدينا : $z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = 0$ يكافئ $(z-3)(z^2+3)=0$

ومنه : $z-3=0$ أو $z^2+3=0$

وبالتالي : $z=3$ أو $z^2 = -3 = 3i^2 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$

إذن : للمعادلة (E) ثلاثة حلول هي $z_1=3$ ، $z_2=i\sqrt{3}$ و $z_3=-i\sqrt{3}$.

2 تبيان أن المثلث ABC متقايس الأضلاع :

لدينا : $AB = |z_B - z_A| = |i\sqrt{3} - 3| = 2\sqrt{3}$

$$AC = |z_C - z_A| = |-i\sqrt{3} - 3| = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

ومنه : $AB = AC = BC$. إذن : المثلث ABC متقايس الأضلاع .

③ تعيين z_E لاحقة النقطة E :

تذكير : الكتابة المركبة للدوران الذي مركزه $M_0(z_0)$ وزاويته θ والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $\boxed{z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)}$

وعليه فإن الكتابة المركبة لهذا الدوران هي : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z$

ومنه : $z_E = e^{i\frac{\pi}{3}} z_D = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i$

④ أ- حساب $\dfrac{z_F}{z_E}$:

$$\frac{z_F}{z_E} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} - i} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} - i} \times \frac{-\sqrt{3} + i}{-\sqrt{3} + i} = i$$

• استنتاج أن المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان :

تذكير بالتفسير الهندسي لـ $\arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B}\right)$:

إذا كانت A ، B و M صور الأعداد المركبة z_A ، z_B و z على الترتيب حيث $z \neq z_B$ فإن : $\arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B}\right) \equiv (\overrightarrow{BM} ; \overrightarrow{AM})[2\pi]$

نعلم أن : $(\overrightarrow{OE} ; \overrightarrow{OF}) \equiv \arg\dfrac{z_F}{z_E}[2\pi]$ و $\arg\dfrac{z_F}{z_E} = \arg(i) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

ومنه : $(\overrightarrow{OE} ; \overrightarrow{OF}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ نستنتج أن $(OE) \perp (OF)$.

ب- تعيين z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعا :

لدينا : $z_E = -\sqrt{3} - i$ و $z_F = 1 - i\sqrt{3}$.

ونعلم أن : $(OE) \perp (OF)$ ، ومن جهة أخرى : $OE = OF = 2$

وبالتالي فإن المثلث OEF قائم في النقطة O ومتساوي الساقين ، نستنتج أن النقطة G هي نظيرة النقطة O بالنسبة إلى I منتصف القطعة $[EF]$.

لدينا : $z_I = \dfrac{z_E + z_F}{2} = \dfrac{z_O + z_G}{2}$

ومنه : $z_G = (z_E + z_F) = 1 - \sqrt{3} - i(\sqrt{3} + 1)$

التمرين الرابع :

الجزء I :

① دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات :

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x)e^x=-\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

و لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-x)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}3e^x-\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$

(لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$) ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$.

- اتجاه التغيّر :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=(3-x)'\times e^x+(e^x)'\times(3-x)=(2-x)e^x$

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $2-x$ ، نستنتج أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty\,;2]$ ومتناقصة تماما على المجال $[2\,;+\infty[$.

- جدول التغيّرات :

$g(2)=e^2-3$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	e^2-3	$\searrow$	$-\infty$

② تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α :

لدينا : $g(0)=(3-0)e^0-3=3-3=0$ ومنه 0 حل للمعادلة $g(x)=0$.

تذكير بمبرهنة القيم المتوسطة . إذا كان :

❶ g مستمرة على المجال $[a\,;b]$ ؛

❷ g رتيبة تماما على المجال $[a\,;b]$ ؛

❸ $g(a)\times g(b)<0$.

فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]a\,;b[$.

من جدول تغيرات g نلاحظ أنها مستمرة ومتناقصة تماما على $[2.82\,;2.83]$

زيادة على ذلك : $g(2.82)\approx 0.06$ و $g(2.83)\approx -0.08$

وبالتالي : $g(2.82)\times g(2.83)<0$

نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2.82<\alpha<2.83$.

إذن : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر $\alpha\in\left]2.82\,;2.83\right[$.

③ استنتاج إشارة $g(x)$:

- $g(x)=0$ يكافئ $x\in\{0;\alpha\}$
- $g(x)<0$ يكافئ $x\in\left]-\infty\,;0\right[\cup\left]\alpha\,;+\infty\right[$
- $g(x)>0$ يكافئ $x\in\left]0;\alpha\right[$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الجزء II :

① أ- تبيان أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$:

تذكير : القول أن f تقبل الاشتقاق عند a يعني أنه عندما يؤول x إلى a ، فإن نسبة تزايد f بين العددين a و x تؤول إلى عدد حقيقي L ، أي :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L$$

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{e^x-1}=$

ونعلم أن : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ وبالتالي :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}\times x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}\times x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{x}{e^x-1}}\times x=1\times 0=0$$

إذن : الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ وعددها المشتق عند 0 هو $f'(0)=0$

ب- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند المبدأ O:

تذكير: معادلة مماس المنحنى الممثل لدالة f عند النقطة ذات الفاصلة a هي :

$$y=f'(a).(x-a)+f(a)$$

لدينا : $f(0)=0$ و $f'(0)=0$ وبالتالي فإن معادلة المماس (T) هي $y=0$

2 أ- تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=0$:

تذكير : $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{u}=0$ وَ $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{u^n}=+\infty$ (n عدد طبيعي) .

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{e^x}{x^3}\right)}=0$.

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=0$.

● حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{e^x-1}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{e^x}{x^3}-\dfrac{1}{x^3}}=0$$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

● حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

ب- تبيان أنه من أجل $x\neq 0$ فإن $f'(x)=\dfrac{x^2}{(e^x-1)^2}g(x)$:

تذكير : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

من أجل $x\neq 0$:

$$f'(x)=\frac{(x^3)'(e^x-1)-(e^x-1)'\times x^3}{(e^x-1)^2}=\frac{3x^2(e^x-1)-x^3e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2[(3-x)e^x-3]}{(e^x-1)^2}=\frac{x^2}{(e^x-1)^2}g(x)$$

جـ- التحقق أن $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$:

لدينا : $g(\alpha)=0$ أي : $(3-\alpha)e^{\alpha}-3$ ومنه : $e^{\alpha}=\dfrac{3}{3-\alpha}$ وبالتالي :

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^3}{e^{\alpha}-1}=\frac{\alpha^3}{\frac{3}{3-\alpha}-1}=\frac{\alpha^3}{\frac{\alpha}{3-\alpha}}=\alpha^3\times\frac{3-\alpha}{\alpha}=\alpha^2(3-\alpha)$$

إذن : $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$.

- تعيين حصر للعدد $f(\alpha)$:

لدينا : $2.82<\alpha<2.83$ ومنه : $-2.83<-\alpha<-2.82$ (الضرب في -1)

وبإضافة العدد 3 لجميع الحدود ينتج : $3-2.83<3-\alpha<3-2.82$

وبالتالي : $0.17<3-\alpha<0.18$ ... (1)

ومن : $2.82<\alpha<2.83$ نحصل على : $(2.82)^2<\alpha^2<(2.83)^2$

وبالتالي : $7.95<\alpha^2<8.01$ ... (2)

من (1) و (2) وبالضرب طرف في طرف ينتج : $1.35<\alpha^2(3-\alpha)<1.44$

إذن : $1.35<f(\alpha)<1.44$

د- جدول تغيّرات الدالة f :

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ ، وبالتالي فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0]$ و $[\alpha;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3 أ- حساب $f(x)+x^3$:

من أجل $x\neq 0$: $f(x)+x^3=\dfrac{x^3}{e^x-1}+x^3=\dfrac{x^3e^x}{e^x-1}$

- استنتاج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C) منحنى الدالة $x\mapsto -x^3$:

إشارة الفرق $f(x)-(-x^3)$ أي : $f(x)+x^3$ هي إشارة الجداء $x(e^x-1)$
يمكن الاستعانة بجدول الإشارة للحصول على النتائج الآتية :

- إذا كان $x=0$ يكون $f(x)-(-x^3)=0$ ومنه (C) يقطع (C_f) في النقطة O
- إذا كان $x\neq 0$ يكون $f(x)-(-x^3)>0$ ومنه (C_f) يقع فوق (C) .

ب- تبيان أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x^3\right)=0$:

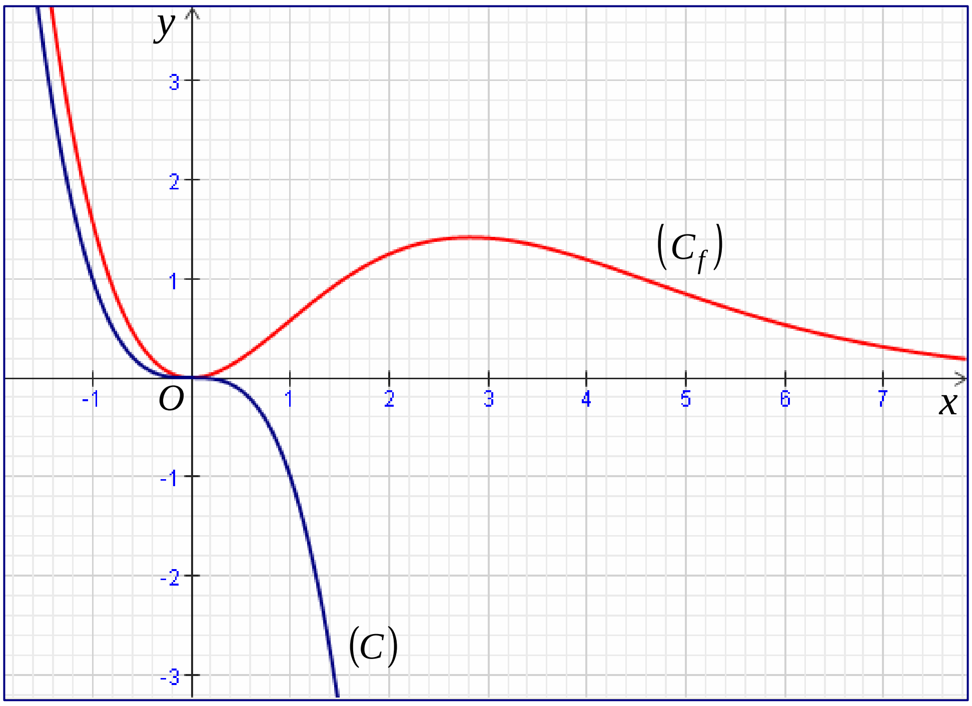
من أجل $x\neq 0$ ، لدينا : $f(x)+x^3=\dfrac{x^3}{e^x-1}+x^3=\dfrac{x^3e^x}{e^x-1}$

ونعلم أن $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3e^x}{e^x-1}=0$

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x^3\right)=0$.

- هندسيا : المنحني (C) هو منحني مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

4 رسم (C) و (C_f) :



حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

① البرهان أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n}-1\equiv 0[13]$:

لدينا : $3^{3n}=\left(3^3\right)^n=(27)^n$ ونعلم أن $27\equiv 1[13]$ ومنه : $(27)^n\equiv 1[13]$

وبالتالي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n}\equiv 1[13]$.

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n}-1\equiv 0[13]$.

② استنتاج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n+1}-3\equiv 0[13]$:

من السؤال ① وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n}-1\equiv 0[13]$.

ومنه : $3\times\left(3^{3n}-1\right)\equiv 3\times 0[13]$ وبالتالي : $3\times 3^{3n}-3\times 1\equiv 0[13]$

نستنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n+1}-3\equiv 0[13]$.

- استنتاج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n+2}-9\equiv 0[13]$:

من السؤال ① وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n}-1\equiv 0[13]$

ومنه : $9\times\left(3^{3n}-1\right)\equiv 9\times 0[13]$ وبالتالي : $3^2\times 3^{3n}-9\times 1\equiv 0[13]$

نستنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n+2}-9\equiv 0[13]$.

③ تعيين ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13 :

$3^0\equiv 1[13]$ ، $3^1\equiv 3[13]$ ، $3^2\equiv 9[13]$ ، $3^3\equiv 1[13]$. نستنتج أن بواقي قسمة 3^n على 13 دورية ودورها 3 ، نلخصها في الجدول الآتي :

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
البواقي	1	3	9

في هذا الجدول k عدد طبيعي

- استنتاج باقي قسمة 2005^{2010} على 13 :

لدينا : $2005=13\times 154+3$ ومنه : $2005\equiv 3[13]$

وبالتالي : $2005^{2010}\equiv 3^{2010}[13]$ ، لكن : $2010=3\times 670$ أي أن العدد 2010 من الشكل $3k$ ، نستنتج أن $2005^{2010}\equiv 1[13]$.

إذن : باقي قسمة 2005^{2010} على 13 هو 1 .

④ أ- تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 وذلك من أجل $p=3n$:

لدينا : $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}$ ومنه : $A_{3n+1}=3^{3n1}+3^{2(3n)}+3^{3(3n)}$

وبالتالي : $A_{3n}=3^{3n}+\left[3^{3n}\right]^2+\left[3^{3n}\right]^3$

وعليه : $A_{3n}\equiv 1+1^2+1^3\equiv 1+1+1[13]$ أي : $A_{3n}\equiv 3[13]$.

إذن : إذا كان $p=3n$ فإن باقي قسمة A_p على 13 هو 3 .

ب- البرهان أنه إذا كان $p=3n+1$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 :

لدينا : $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}$ ومنه : $A_{3n+1}=3^{3n+1}+3^{2(3n+1)}+3^{3(3n+1)}$

وبالتالي : $A_{3n+1}=3^{3n+1}+\left[3^{(3n+1)}\right]^2+\left[3^{(3n+1)}\right]^3$

وعليه : $A_{3n+1}\equiv 3+3^2+3^3\equiv 3+9+1\equiv 0[13]$ أي : $A_{3n+1}\equiv 0[13]$

إذن : إذا كان $p=3n+2$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 .

جـ- تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p=3n+2$:

لدينا : $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}$ ومنه : $A_{3n+2}=3^{3n+2}+3^{2(3n+2)}+3^{3(3n+2)}$

وبالتالي : $A_{3n+2}=3^{3n+2}+\left[3^{(3n+2)}\right]^2+\left[3^{(3n+2)}\right]^3$

وعليه : $A_{3n+2}\equiv 9+9^2+9^3\equiv 9+3+1[13]$ أي : $A_{3n+2}\equiv 0[13]$

إذن : إذا كان $p=3n+2$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 .

5 أ- التحقق أن العدد a يكتب على الشكل A_p في النظام العشري :

تذكير : القول أن عدد طبيعي N يكتب $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1 a_0}$ في النظام ذي الأساس x يعني :

$$N=\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1 a_0}=a_n\times x^n+a_{n-1}\times x^{n-1}+\cdots+a_2\times x^2+a_1\times x+a_0$$

وعليه : $a=\overline{1001001000}$

$$=0+0\times3^1+0\times3^2+1\times3^3+0\times3^4+0\times3^5+1\times3^6+0\times3^7+0\times3^8+1\times3^9$$

$$=1\times3^3+1\times3^6+1\times3^9=3^3+3^6+3^9=3^3+3^{2\times3}+3^{3\times3}=A_3$$

إذن : $a=A_3$.

- التحقق أن العدد b يكتب على الشكل A_p في النظام العشري :

$$b=\overline{1000100010000}$$
$$=0+0\times3^1+0\times3^2+0\times3^3+1\times3^4+0\times3^5+0\times3^6+0\times3^7+1\times3^8+0\times3^9$$
$$+\ 0\times3^{10}+0\times3^{11}+1\times3^{12}$$
$$=1\times3^4+1\times3^8+1\times3^{12}=3^4+3^8+3^{12}=3^4+3^{2\times4}+3^{3\times4}=A_4$$

إذن : $b=A_4$.

ب- استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 13 :

من السؤال (4) حصلنا على النتائج الآتية :

- إذا كان $p=3n$ فإن باقي قسمة A_p على 13 هو 3 .
- إذا كان $p=3n+1$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 .
- إذا كان $p=3n+2$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 .

وبالتالي : إذا كان p من مضاعفات العدد 3 فإن باقي قسمة A_p على 13 هو 3 ،
وإذا كان p ليس من مضاعفات العدد 3 فإن باقي قسمة A_p هو 0 .

نستنتج أن : $a=A_3\equiv3[13]$ وَ $b=A_4\equiv0[13]$.

التمرين الثاني :

(1) أ- تعليم النقط A ، B و I : انظر الشكل .

ب- كتابة العدد Z على الشكل الجبري :

$$Z=\frac{z_I-z_A}{z_I-z_B}=\frac{1-2i-1+4i}{1-2i+1+2i}=\frac{2i}{2}=i$$

جـ- طبيعة المثلث IAB :

لدينا : $\dfrac{z_I-z_A}{z_I-z_B}=i$ ونعلم أن : $|i|=1$ وَ $\arg(i)\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$

وبالتالي : $\left|\dfrac{z_I-z_A}{z_I-z_B}\right|=|i|=1$ و $\arg\left(\dfrac{z_I-z_A}{z_I-z_B}\right)\equiv\arg(i)\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$

ومنه : $\dfrac{AI}{BI}=1$ (أي : $AI=BI$) و $(\overrightarrow{BI};\overrightarrow{AI})\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

إذن : المثلث IAB قائم في النقطة I ومتساوي الساقين .

د- حساب اللاحقة z_C للنقطة C :

تذكير : الكتابة المركبة للتحاكي الذي مركزه $M_0(z_0)$ ونسبته k والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $\boxed{z' - z_0 = k(z - z_0)}$

ومنه : $z_C - z_A = 2(z_I - z_A)$ وبالتالي : $z_C = 2(z_I - z_A) + z_A = 1$

هـ- حساب اللاحقة z_D للنقطة D :

لدينا : D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$ وبالتالي فإن

$$z_D = \frac{z_A - z_B + z_C}{1-1+1} = 3-2i$$

و- تبيان أن $ABCD$ مربع :

لدينا : $z_I = 1-2i = \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{z_A + z_C}{2}$ وبالتالي فإن النقطة I هي منتصف كل من $[AC]$ و $[BD]$. نستنتج أن قطري الرباعي $ABCD$ متناصفان .

ومن السؤال (1 - جـ) وجدنا أن المثلث IAB قائم في النقطة I ومتساوي الساقين نستنتج من هذا أن قطري الرباعي $ABCD$ متعامدان ومتقايسان .

إذن : الرباعي $ABCD$ مربع (القطران متناصفان ومتعامدان ومتقايسان) .

2 تعيين وإنشاء المجموعة (Γ_1) :

$M \in (\Gamma_1)$ يكافئ $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$ ... (1)

لدينا : $\overrightarrow{MD} = (1-1+1)\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}$

ولدينا : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$ (النقطة I هي منتصف القطعة $[AC]$)

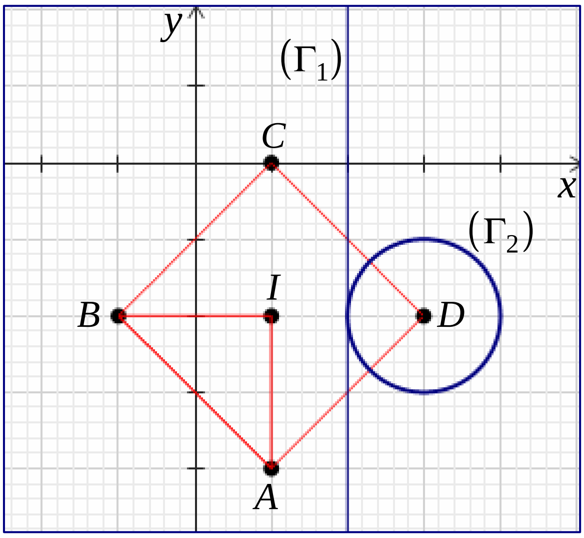
تكتب عندئذ المساواة (1) كما يلي : $MD = MI$

إذن : المجموعة (Γ_1) هي محور القطعة $[DI]$.

3 تعيين وإنشاء المجموعة (Γ_2) :

$M \in (\Gamma_2)$ يكافئ $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 1$ ومنه : $MD = 1$

إذن : المجموعة (Γ_2) هي الدائرة التي مركزها النقطة D ونصف قطرها 1 .



التمرين الثالث :

① تبيان أن (P) هو المستوي الذي معادلته $3x-y+2z-4=0$:

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء .

لدينا : $\overrightarrow{AM}(x+1;y-2;z-1)$ و $\overrightarrow{BM}(x-2;y-1;z-3)$

$M\in(P)$ يكافئ $AM=BM$ ومنه : $AM^2=BM^2$ وبالتالي :

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2$$

وبعد التبسيط نحصل على المعادلة $3x-y+2z-4=0$.

إذن : (P) هو المستوي الذي معادلته $3x-y+2z-4=0$.

طريقة أخرى : من المساواة $AM=BM$ نستنتج أن المجموعة (P) هي المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

كتابة معادلة للمستوى (P) :

لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ وبالتالي فإن إحداثيات النقطة I هي $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};2\right)$

ولتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء .

$M\in(P)$ يكافئ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{IM}$ ومنه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}=0$

لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;-1;2)$ و $\overrightarrow{IM}\left(x-\frac{1}{2};y-\frac{3}{2};z-2\right)$

من المساواة $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM}=0$ نجد : $3\left(x-\frac{1}{2}\right)+(-1)\left(y-\frac{3}{2}\right)+2(z-2)=0$

وبعد التبسيط نحصل على المعادلة : $3x-y+2z-4=0$.

إذن : (P) هو المستوي الذي معادلته $3x-y+2z-4=0$.

2 تعيين معادلة للمستوي (Q) :

بما أن المستوي (Q) يوازي المستوي (P) فإن $\vec{n}(3;-1;2)$ شعاع ناظمي لكل من (P) و (Q) . وبالتالي فإن معادلة للمستوي (Q) من الشكل :

$3x-y+2z+d=0$.

وبما أن $A\in(Q)$ فإن $3\times(-1)-2+2\times1+d=0$ ومنه : $d=3$

إذن : معادلة للمستوي (Q) هي $3x-y+2z+3=0$.

طريقة أخرى : لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء .

إذا كان $\vec{n}$ شعاعا ناظميا للمستوي (P) فإن $\vec{n}(3;-1;2)$.

لدينا : $M\in(Q)$ يكافئ $\vec{n}\perp\overrightarrow{AM}$ ومنه : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

وبالتالي : $3\times(x+1)-1\times(y-2)+2\times(z-1)$ أي $3x-y+2z+3=0$

إذن : معادلة للمستوي (Q) هي $3x-y+2z+3=0$.

3 أ- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (D) الذي يشمل C ويعامد (P) :

(D) يشمل C ويعامد (P) معناه : (D) يشمل C و $\vec{n}$ شعاع توجيه له .

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء .

تكون $M(x;y;z)$ نقطة من (D) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث :

$\overrightarrow{CM}=t\vec{n}$. ومنه التمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases}x=3t\\ y=-t-1\\ z=2t+2\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

ب- تعيين إحداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (D) :

للبحث عن إحداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (D) ، نقوم بحل الجملة الآتية :

$\begin{cases}x=3t\\ y=-t-1\quad(t\in\mathbb{R})\\ z=2t+2\\ 3x-y+2z+3=0\end{cases}$ ، وبحل هذه الجملة نجد : $t=-\frac{4}{7}$

ومنه : $E\left(-\frac{12}{7};-\frac{3}{7};\frac{6}{7}\right)$

جـ- حساب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) :

لدينا : $A(-1;2;1)$ و $E\left(-\frac{12}{7};-\frac{3}{7};\frac{6}{7}\right)$ ومنه : $\overrightarrow{AE}\left(-\frac{5}{7};-\frac{17}{7};-\frac{1}{7}\right)$

ومنه : $\overrightarrow{AE}.\vec{n}=-\frac{5}{7}\times 3-\frac{17}{7}\times(-1)-\frac{1}{7}\times 2=0$ وهذا يعني أن : $\overrightarrow{AE}\perp\vec{n}$

نستنتج أن النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) .

وبالتالي فإن المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) هي AE .

تذكير : إذا كان $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ و $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$ فإن

$$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

لدينا : $\overrightarrow{AE}\left(-\frac{5}{7};-\frac{17}{7};-\frac{1}{7}\right)$ ومنه : $AE=\|\overrightarrow{AE}\|=\sqrt{\frac{315}{49}}=\frac{3\sqrt{35}}{7}$

إذن : المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) هي $\frac{3\sqrt{35}}{7}$.

طريقة أخرى : لتكن $M(x;y;z)$ نقطة كيفية من المستقيم (D) .

- حساب AM^2 :

لدينا : $\overrightarrow{AM}(3t+1;-t-3;2t+1)$

ومنه : $AM^2=(3t+1)^2+(-t-3)^2+(2t+1)^2=14t^2+16t+11$

- استنتاج المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) :

المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) هي أقصر مسافة بين A و (D) .

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(t)=\sqrt{14t^2+16t+11}$

* دراسة اتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(t)=\frac{28t+16}{2\sqrt{14t^2+16t+11}}$

$(f'(t)=0)$ يكافئ $(28t+16=0)$ ومنه : $t=-\frac{4}{7}$

الدالة f متناقصة على $\left]-\infty;-\frac{4}{7}\right]$ ومتزايدة على $\left[-\frac{4}{7};+\infty\right[$ وتقبل قيمة صغرى من أجل $t=-\frac{4}{7}$. عندئذ تكون المسافة AM صغرى (أصغر ما يمكن)

ومنه : $f\left(-\frac{4}{7}\right)=\sqrt{14\left(-\frac{4}{7}\right)^2+16\left(-\frac{4}{7}\right)+11}=\frac{3\sqrt{35}}{7}$

إذن : المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) هي $\frac{3\sqrt{35}}{7}$.

④ تعيين تمثيل وسيطي للمستوي (π) :

المستوي (π) يحوي المستقيم (AC) ويعامد المستوي (P) ، نستنتج أن المستوي (π) يشمل النقطة A و $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{n}$ هما شعاعا توجيه له .

تكون $M(x;y;z)$ نقطة من (π) إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان t و t' بحيث $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{n}+t'\overrightarrow{AC}$. ومنه التمثيل الوسيطي التالي :

$$\begin{cases} x=3t+t'-1 \\ y=-t-3t'+2 \\ z=2t+t'+1 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}\ ;\ t'\in\mathbb{R})$$

● استنتاج معادلة للمستوي (π) :

لدينا : $\begin{cases} x=3t+t'-1 \\ y=-t-3t'+2 \\ z=2t+t'+1 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} t'=x-3t+1 \\ y=-t-3(x-3t+1)+2 \\ z=2t+(x-3t+1)+1 \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} t'=x-3t+1 \\ y=8t-3x-1 \\ z=-t+x+2 \end{cases}$ وعليه : $\begin{cases} t'=x-3t+1 \\ t=-z+x+1 \\ y=8(-z+x+2)-3x-1 \end{cases}$

أخيرا نحصل على المعادلة : $5x-y-8z+15=0$.

إذن : معادلة للمستوي (π) هي $5x-y-8z+15=0$.

التمرين الرابع :

① حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)$:

لدينا : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}(x-1)=-1$ ومنه : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=+\infty$

هندسيا : محور التراتيب هو مستقيم مقارب للمنحني (C_g) .

② أ- تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2\ln x}{x}\right)$ ، ونعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ وبالتالي : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

ب- دراسة تغيّرات الدالة g :

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $g'(x)=\frac{x-2}{x}$

الدالة g متزايدة تماما على $[2;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0;2]$.

- جدول تغيّرات الدالة g :

$g(2)=1-2\ln 2$

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

جـ- حساب $g(1)$: $g(1)=0$

د- البرهان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما α :

- لدينا : $g(1)=0$ وبالتالي فإن الحل الأول هو 1 .
- من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أنها مستمرة ومتزايدة تماما على $[3.5; 3.6]$

زيادة على ذلك : $g(3.5)\approx -0.005$ و $g(2.83)\approx 0.038$

وبالتالي : $g(3.5)\times g(3.6)<0$ ، نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $3.5<\alpha<3.6$.

هـ- استنتاج إشارة $g(x)$:

- $g(x)=0$ يكافئ $x\in\{1;\alpha\}$
- $g(x)<0$ يكافئ $x\in]1;\alpha[$
- $g(x)>0$ يكافئ $x\in]0;1[\cup]\alpha;+\infty[$

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- استنتاج إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$:

لدينا : $g(x)=0$ يكافئ $x\in\{1;\alpha\}$

وبالتالي فإن : $g\left(\frac{1}{x}\right)=0$ يكافئ $\frac{1}{x}\in\{1;\alpha\}$ ومنه : $x\in\left\{\frac{1}{\alpha};1\right\}$.

ولدينا : $g(x)<0$ يكافئ $x\in\left]1;\alpha\right[$

وبالتالي فإن : $g\left(\frac{1}{x}\right)<0$ يكافئ $\frac{1}{x}\in\left]1;\alpha\right[$ ومنه : $x\in\left]\frac{1}{\alpha};1\right[$

وعليه فإن : $g\left(\frac{1}{x}\right)>0$ يكافئ $x\in\left]0;\frac{1}{\alpha}\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1		$+\infty$
$g\left(\frac{1}{x}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3 أ- حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{f(x)}{x}$:

لدينا : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}(-x+1+x\ln x)$

ونعلم أن : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}(-x+1)=1$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}x\ln x=0$ ومنه : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{f(x)}{x}=1$.

- التفسير الهندسي لـ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{f(x)}{x}=1$:

المنحني (C_f) يقبل عند النقطة O نصف مماس على اليمين يوازي المنصف الأول

ب- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(-1+\frac{1}{x}+\ln x\right)=+\infty$

جـ- تبيان أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$ فإن $f'(x)=x\,g\left(\frac{1}{x}\right)$:

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=-2x+1+2x\ln x+\frac{1}{x}\times x^2$

$$=-x+1+2x\ln x=x\left(-1+\frac{1}{x}+2\ln x\right)$$

$$=x\left(\frac{1}{x}-1-2\ln\frac{1}{x}\right)=x\,g\left(\frac{1}{x}\right)$$

- استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، نستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على $\left[1\ ;\ \frac{1}{\alpha}\right]$ ومتزايدة تماما على كل من المجالين $\left[0\ ;\ \frac{1}{\alpha}\right]$ و $[1; +\infty[$.

د- جدول تغيّرات الدالة f :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	↘	0	↗	$+\infty$

• تبيان أن $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$:

لدينا : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ ... (1)

ولدينا : $g(\alpha)=0$ أي : $\alpha-1-2\ln\alpha=0$ ومنه : $\alpha-1+2\ln\frac{1}{\alpha}=0$

وبالتالي : $\ln\frac{1}{\alpha}=\frac{1-\alpha}{2}$ وبالتعويض في المساواة (1) ينتج :

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\times\frac{1-\alpha}{2}=\frac{-2+2\alpha+1-\alpha}{2\alpha^2}=\frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$$

إذن : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$

• استنتاج حصر للعدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$:

لدينا : $3.5<\alpha<3.6$ ومنه : $2.5<\alpha-1<2.6$ ... (1)

ولدينا : $3.5<\alpha<3.6$ ومنه : $(3.5)^2<\alpha^2<(3.6)^2$

وبالتالي : $24.5<2\alpha^2<25.92$ وعليه : $0.038<\frac{1}{2\alpha^2}<0.041$ ... (2)

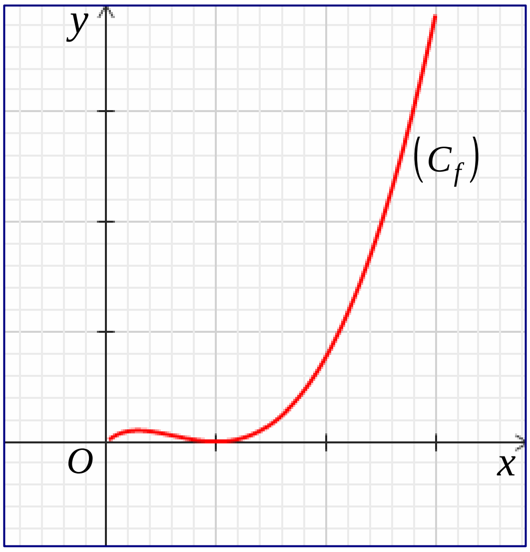
من (1) و (2) وبالضرب طرفا في طرف ينتج :

$2.6 \times 0.041 < \dfrac{\alpha-1}{2\alpha^2} < 2.5 \times 0.038$ وبالتالي :

$0.106 < \dfrac{\alpha-1}{2\alpha^2} < 0.095$ أي : $0.106 < f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) < 0.095$

إذن : $0.106 < f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) < 0.095$

4 رسم المنحني (C_f) على المجال $[0;3]$:



بكالوريا 2009 . الشعبة : رياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول : (4 نقاط)

x عدد طبيعي أكبر من 1 وَ y عدد طبيعي .

A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل $A=\overline{5566}$.

1 أ- أنشر العبارة $(5x^2+6)(x+1)$ ثم أوجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أن $A=(5x^2+6)(2+2y)$.

ب- احسب x و y إذا علمت أن x عدد أوّلي أصغر من 12 ، ثم اكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري .

2 أ- عيّن الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584 .

ب- عيّن الأعداد الطبيعية a و b حيث $a>b$ التي تحقق : $\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$

التمرين الثاني : (5 نقاط)

كيس به 10 كريات متماثلة لا نميّز بينها عند اللمس منها 4 بيضاء و 6 حمراء .

1 نسحب عشوائيا من الكيس 3 كريات في أن واحد .

أ- احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء .

ب- احسب احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء .

2 ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

- عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

3 نسحب من الكيس في آن واحد 3 كريات خمس مرات على التوالي وبإرجاع .

- احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط .

التمرين الثالث : (5 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقطتين $A(2;1;2)$ ، $B(0;2;-1)$ والمستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطي :

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

① أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

ب- أثبت أن (D) و (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي .

② نعتبر المستوي (P) الذي يشمل المستقيم (AB) ويوازي المستقيم (D) .

أ- بيّن أن الشعاع $\vec{n}(1;5;1)$ عمودي على المستوي (P) .

ب- اكتب معادلة للمستوي (P) .

جـ- بيّن أن المسافة بين نقطة M من (D) والمستوي (P) مستقلة عن موضع M.

د- عيّن تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطع المستوي (P) مع المستوي (yoz) .

التمرين الرابع: (6 نقاط)

① نعرّف الدالة العددية f على المجال $[1;5]$ بالعبارة : $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

(الوحدة على المحورين $3cm$) .

أ- ادرس تغيرات الدالة f .

ب- أنشئ المنحنى (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ في نفس المعلم .

② نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=5$ وبالعبارة

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{5}{u_n}\right)$$

أ- احسب u_1 و u_2 .

ب- استعمل المنحنى (C) والمستقيم (Δ) لتمثيل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل .

③ أ- برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \sqrt{5}$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما . ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (u_n)؟

④ أ- برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-\sqrt{5} \leq \frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)$.

ب- استنتج أن $\left(u_0-\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq u_n-\sqrt{5}$. ما هي $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ؟

حل الموضوع الأول

التمرين 1 :

① أ- نشر العبارة $(5x^2+6)(x+1)$:

$$(1)\ \ldots\ (5x^2+6)(x+1)=5x^3+5x^2+6x+6$$

ب- إيجاد علاقة تربط بين x و y :

من جهة ، لدينا : $(2)\ \cdots\ A=(5x^2+6)(2+2y)$

ومن جهة أخرى ، لدينا : $A=\overline{5566}=5x^3+5x^2+6x+6\ \cdots\ (3)$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $x+1=2+2y$ ومنه : $\boxed{x=2y+1}$

ب- حساب x و y :

لدينا : A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل $A=\overline{5566}$

وبالتالي فإن $x>6$ ، ونعلم أن x عدد أوّلي أصغر من 12

نستنتج أن : $x\in\{7;11\}$.

- عندما $x=7$ وبالتعويض في المعادلة $x=2y+1$ نجد : $y=3$.

- عندما $x=11$ وبالتعويض في المعادلة $x=2y+1$ نجد : $y=5$.

إذن : $(x;y)\in\{(7;3),(11;5)\}$.

- كتابة العدد A في نظام التعداد العشري :

- من أجل : $(x;y)=(7;3)$ نجد : $A=2008$

- من أجل : $(x;y)=(11;5)$ نجد : $A=7332$

② أ- تعيين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584 :

تحليل العدد 584 إلى جداء عوامل أولية : $584=2^3\times 73$

نستنتج أن مجموعة الأعداد المطلوبة هي $\{1;2\}$.

ب- تعيين الأعداد الطبيعية a و b التي تحقق الشروط :

تذكير : إذا كان $PGCD(a;b)=d$ فإنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما بحيث : $a=d\times a'$ و $b=d\times b'$.

نفرض أن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b أي $PGCD(a;b)=d$

يمكن كتابة الجملة $\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$ كما يلي : $\begin{cases} da'+db'=32 \\ (da')^2+(db')^2=584 \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} d(a'+b')=32 \\ d^2(a'^2+b'^2)=584 \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} d \mid 32 \\ d^2 \mid 584 \end{cases}$

وحسب السؤال 2 الفرع - أ- نستنتج أن : $d \in \{1;2\}$

- الحالة الأولى $d=1$:

تكتب الجملة $\begin{cases} d(a'+b')=32 \\ d^2(a'^2+b'^2)=584 \end{cases}$ عندئذ كما يلي : $\begin{cases} (a'+b')=32 \\ (a'^2+b'^2)=584 \end{cases}$

من $a'+b'=32$ ينتج $b'=32-a'$ وبالتعويض في $a'^2+b'^2=584$

نجد $2a'^2-64a'+440=0$ وبالقسمة على 2 ينتج $a'^2-32a'+220=0$

وبحل هذه المعادلة الأخيرة نحصل على : $a'=10$ أو $a'=22$

ومنه : $(a';b') \in \{(10;22),(22;10)\}$

وبالتالي : $(a;b) \in \{(10;22),(22;10)\}$

وبما أن $a>b$ نستنتج أن : $(a;b)=(22;10)$

- الحالة الثانية $d=2$:

بإتباع نفس الطريقة السابقة نجد : $(a';b') \in \{(5;11),(11;5)\}$

وبالتالي : $(a;b) \in \{(10;22),(22;10)\}$

وبما أن $a>b$ نستنتج أن : $(a;b)=(22;10)$

خلاصة : توجد ثنائية وحيدة $(a;b)$ حيث $a>b$ وتحقق $\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$

هي : $\boxed{(a;b)=(22;10)}$

التمرين الثاني :

1 أ- حساب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء :

نسمي A الحادثة : « الحصول على 3 كريات بيضاء »

ومنه : $P(A)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{4}{120}=\dfrac{1}{30}$

ب- حساب احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء :

نسمي B الحادثة : « الحصول على الأقل على كرية حمراء »

« الحصول على الأقل على كرية حمراء » معناه : « الحصول على : (كرية حمراء و كريتان غير حمراوين) أو (كريتان حمراوان و كرية غير حمراء) أو (ثلاث كريات حمراء) » .

ومنه : $P(B)=\dfrac{C_6^1 \times C_4^2 + C_6^2 \times C_4^1 + C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{36+60+20}{120}=\dfrac{116}{120}=\dfrac{29}{30}$

طريقة أخرى :

نسمي $\overline{B}$ الحادثة العكسية للحادثة B أي : $\overline{B}$ هي الحادثة : « الحصول على 3 كريات بيضاء » أي أن $\overline{B}$ هي الحادثة A ومنه : $P(\overline{B})=P(A)=\frac{1}{30}$.

إذن : $P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(A)=1-\frac{1}{30}=\frac{29}{30}$

2 أ- القيم التي يأخذها المتغيّر العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 .

- قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X :

$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$. $P(X=1)=\frac{C_4^1\times C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$

$P(X=2)=\frac{C_4^2\times C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$. $P(X=3)=P(A)=\frac{1}{30}$

إذن :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$	$\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$	$\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$	$\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$

- حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

$$E(X)=x_0P_0+x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3$$
$$=0\times\frac{20}{120}+1\times\frac{60}{120}+2\times\frac{36}{120}+3\times\frac{4}{120}=\frac{144}{120}=\frac{6}{5}=1.2$$

3 حساب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط :

سحب 3 كريات بيضاء من الكيس هي تجربة برنولي حيث أن المخرج S هو :

« الحصول على 3 كريات بيضاء » ومنه : $P=\frac{1}{30}$ ($P(S)=P(A)=\frac{1}{30}$) .

الخمس سحبات هي سحبات مستقلة ، و هذا يعني أننا أمام مخطط برنولي .

تذكير : $P(X=k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط هو $P(X=2)$ حيث :

$$P(X=2)=C_5^2P^2(1-P)^{5-2}=10\times\left(\frac{1}{30}\right)^2\times\left(\frac{29}{30}\right)^3=\frac{10\times 29^3}{30^5}\approx 0.01$$

التمرين الثالث :

① أ- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) :

تذكير : تكون $M(x;y;z)$ نقطة من (AB) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث : $\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}$. لدينا : $\overrightarrow{AB}(-2;1;-3)$ ومنه التمثيل الوسيطي التالي :
$$\begin{cases} x=2-2t \\ y=1+t \\ z=2-3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

ب- إثبات أن (D) و (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي :

$\vec{u}(3;-1;2)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D) و $\overrightarrow{AB}(-2;1;-3)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (AB) . الشعاعان $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطيا (لا يوجد عدد حقيقي t بحيث $\overrightarrow{AB}=t\,\vec{u}$) ، نستنتج أن المستقيمين (D) و (AB) غير متوازيين وهذا يعني أنهما إما من نفس المستوي ومتقاطعان ، وإما ليسا من نفس المستوي .

لنبيّن أن المستقيمين (D) و (AB) غير متقاطعين :

للبحث عن نقط تقاطع (D) و (AB) نقوم بحل الجملة :
$$\begin{cases} 2+3t=2-2t' \\ 1-t=1+t' \\ 2t=2-3t' \end{cases}$$

من المعادلتين الأولى والثانية لهذه الجملة نجد : $t=0$ و $t'=0$ وبتعويض هاتين القيمتين في المعادلة الثالثة نحصل على $2=0$ وهذا مستحيل .

نستنتج أن المستقيمين (D) و (AB) غير متقاطعين .

إذن : المستقيمان (D) و (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي .

② أ- تبيان أن الشعاع $\vec{n}(1;5;1)$ عمودي على المستوي (P) :

طريقة : لإثبات أن $\vec{n}$ عمودي على (P) يكفي إثبات أنه عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ باعتبارهما شعاعي توجيه للمستوي (P) .

لدينا : $\vec{n}(1;5;1)$ ، $\overrightarrow{AB}(-2;1;-3)$ و $\vec{u}(3;-1;2)$

ومنه : $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=1(-2)+5\times1+1(-3)=5-5=0$ وبالتالي : $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$

و $\vec{n}.\vec{u}=1\times3+5(-1)+1\times2=5-5=0$ وبالتالي : $\vec{n}\perp\vec{u}$

إذن : $\vec{n}$ عمودي على المستوي (P) أي أن $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) .

ب- كتابة معادلة للمستوي (P) :

$\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) وبالتالي فإن معادلة (P) من الشكل :

$x+5y+z+d=0$ حيث d عدد حقيقي .

وبما أن (AB) محتوى في (P) فإن $A\in(P)$ ومنه : $2+5\times1+2+d=0$

وبالتالي : $d=-9$.

إذن : معادلة للمستوي (P) هي : $\boxed{x+5y+z-9=0}$

جـ- تبيان أن المسافة بين نقطة M من (D) والمستوي (P) مستقلة عن موضع M:

تذكير : المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0; y_0; z_0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A;(P))$ حيث :

$$\boxed{d(A;(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

ومنه : $d(M;(P))=\dfrac{|2+3t+5(1-t)+2t-9|}{\sqrt{1+25+1}}=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

إذن : $d(M;(P))=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ وهي ثابتة لا تتعلق بموضع النقطة M .

د- تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) مع المستوي (yoz) :

معادلة للمستوي (yoz) هي : $x=0$

لدينا : $\begin{cases} x=0 \\ x+5y+z-9=0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x=0 \\ 5y+z-9=0 \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} x=0 \\ z=-5y+9 \end{cases}$

وبوضع $y=\lambda$ نحصل على تمثيل وسيطي لـ (Δ) : $\begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=-5\lambda+9 \end{cases} \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

التمرين الرابع :

1 أ- دراسة تغيرات الدالة f :

- $f(1)=3$ و $f(2)=\dfrac{9}{4}$
- حساب $f'(x)$: $f'(x)=\dfrac{x^2-5}{2x^2}$
- إشارة $f'(x)$:

x	1		$\sqrt{5}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

إذن : الدالة f متناقصة على $[1;\sqrt{5}]$ ومتزايدة على $[\sqrt{5};5]$.

• جدول تغيرات الدالة f على المجال $[1;5]$:

x	1		$\sqrt{5}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	3

ب- إنشاء المنحني (C) والمستقيم (Δ) : انظر الشكل .

② أ- حساب u_1 و u_2 : $u_1=3$ و $u_2=\frac{7}{3}$.

ب- تمثيل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل : انظر الشكل .
ننطلق من الفاصلة $u_0=5$ ، ترتيب النقطة من المنحني (C) الموافق لهذه الفاصلة يعطينا u_1 . نقوم بنقل العدد u_1 إلى محور الفواصل ومن أجل هذا ، نستعمل (Δ).
وبالتالي فإن u_2 هو ترتيب النقطة من المنحني (C) ذات الفاصلة u_1 .
نقوم بنقل العدد u_2 إلى محور الفواصل ومن أجل هذا ، نستعمل المستقيم (Δ).

③ أ- البرهان بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \sqrt{5}$:
نسمي p_n الخاصية " $u_n \geq \sqrt{5}$ "

• التحقق من صحة p_0 :
لدينا : $u_0 \geq \sqrt{5}$ أي : $5 \geq \sqrt{5}$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n \geq \sqrt{5}$
ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $u_{n+1} \geq \sqrt{5}$
من فرضية التراجع : $u_n \geq \sqrt{5}$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $[\sqrt{5}; 5]$
نستنتج أن : $f(u_n) \geq f(\sqrt{5})$ أي : $u_{n+1} \geq \sqrt{5}$) لأن : $f(\sqrt{5})=\sqrt{5}$ و $f(u_n)=u_{n+1}$) وعليه فإن : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \sqrt{5}$.

ب- تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$:
تذكير : (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$ معناه : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}-u_n \leq 0$

من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا : $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=-\dfrac{u_n^2-5}{2u_n}$

من السؤال 3 الفرع - أ- وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\geq\sqrt{5}$

ومنه : $u_n^2\geq\left(\sqrt{5}\right)^2$ أي : $u_n^2\geq 5$ ... (1)

كذالك : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n\geq\sqrt{5}$ ومنه : $u_n>0$

وبالتالي : $2u_n>0$ ... (2)

من (1) و (2) نستنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $-\dfrac{u_n^2-5}{2u_n}\leq 0$

أي : $u_{n+1}-u_n\leq 0$.

إذن : المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

طريقة أخرى :

تذكير : (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$ معناه : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1$

من السؤال 3 الفرع - أ- نستنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>0$

وبالتالي : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{5}{u_n^2}\right)$

ومن السؤال 3 الفرع - أ- وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\geq\sqrt{5}$

ومنه : $u_n^2\geq\left(\sqrt{5}\right)^2$ أي : $u_n^2\geq 5$ وبالتالي : $\dfrac{1}{u_n^2}\leq\dfrac{1}{5}$ ومنه : $\dfrac{5}{u_n^2}\leq\dfrac{5}{5}$

أي : $\dfrac{5}{u_n^2}\leq 1$ ومنه : $1+\dfrac{5}{u_n^2}\leq 1+1$ أي : $1+\dfrac{5}{u_n^2}\leq 2$

وأخيرا : $\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{5}{u_n^2}\right)\leq 1$ أي : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1$

إذن : المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

- تقارب المتتالية (u_n) :

تذكير : كل متتالية محدودة من الأعلى ومتزايدة أو محدودة من الأسفل ومتناقصة هي متتالية متقاربة .

من السؤال (3) الفرع - أ- وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \sqrt{5}$
وهذا يعني أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل .
ومن السؤال (3) الفرع - ب- وجدنا أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.
نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة (متناقصة ومحدودة من الأسفل).

(4) أ- البرهان أنه ، من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}-\sqrt{5} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{5}\right)$:

من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ،

$$u_{n+1} - \sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right) - \sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n} - 2\sqrt{5}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{5} + \frac{5}{u_n} - \sqrt{5}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{u_n} - \sqrt{5}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{5}\right) + \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{u_n} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{5}\right) - \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{u_n - \sqrt{5}}{u_n}\right)$$

ومن السؤال (3) الفرع - أ- وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \sqrt{5}$
ومنه : $\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{u_n - \sqrt{5}}{u_n}\right) \geq 0$. نستنتج أن : $u_{n+1}-\sqrt{5} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{5}\right)$.

إذن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}-\sqrt{5} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{5}\right)$.

ب- استنتاج أن $u_n - \sqrt{5} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{5}\right)$:

من السؤال السابق وجدنا أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ،

$$u_{n+1} - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{5}\right)$$

بالضرب طرف في طرف ثم اختزال الحدود المتشابهة نحصل على :

$$\begin{cases} u_1-\sqrt{5} \le \frac{1}{2}\left(u_0-\sqrt{5}\right) & : n=0 \text{ من أجل} \\ u_2-\sqrt{5} \le \frac{1}{2}\left(u_1-\sqrt{5}\right) & : n=1 \text{ من أجل} \\ u_3-\sqrt{5} \le \frac{1}{2}\left(u_2-\sqrt{5}\right) & : n=2 \text{ من أجل} \\ \vdots & \\ u_{n-1}-\sqrt{5} \le \frac{1}{2}\left(u_{n-2}-\sqrt{5}\right) & \\ u_n-\sqrt{5} \le \frac{1}{2}\left(u_{n-1}-\sqrt{5}\right) & \end{cases}$$

$$\boxed{u_n-\sqrt{5} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{5}\right)}$$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

تذكير بمبرهنة الحصر : (u_n) ، (v_n) وَ (w_n) ثلاث متتاليات عددية ، l عدد حقيقي .

إذا كان ابتداء من رتبة معيّنة ، $v_n \le u_n \le w_n$ وكانت $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

تذكير : إذا كان $-1<q<+1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

من السؤال 3 الفرع - أ- وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \ge \sqrt{5}$

وبالتالي : $u_n-\sqrt{5} \ge 0$.

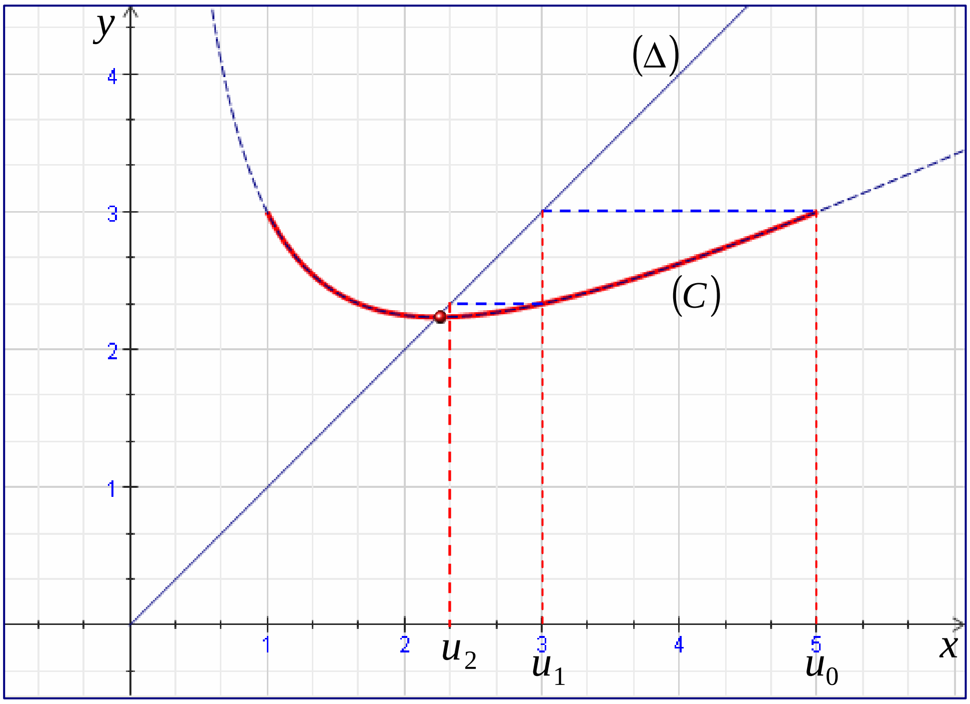
ومن السؤال 4 الفرع - ب- وجدنا أن : $u_n-\sqrt{5} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{5}\right)$

ومنه : $0 \le u_n-\sqrt{5} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{5}\right)$ وبما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

نستنتج أن : $0 \le \lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n-\sqrt{5}\right) \le 0$ وحسب مبرهنة الحصر نستنتج أن :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n-\sqrt{5}\right) = 0$. إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{5}$

• الرسم :



الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن 1 العدد المركب $f(z)$ حيث $f(z)=\frac{z-i}{z-1}$

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(45+45i)f(z)=23+45i-2z$$

2) لتكن M صورة العدد المركب z في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

أ- عيّن مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا تماما .

ب- احسب العدد المركب z_0 بحيث يكون $|f(z_0)|=1$ و $\arg(f(z_0))=\frac{3\pi}{2}$

3) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : 1 ، i و z_0 .

أ- ما نوع المثلث ABC ؟

ب- عيّن النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) واستنتج طبيعة الرباعي $ACBD$.

التمرين الثاني : (5 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بحدّها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=3u_n+2n+1$$

(v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n=u_n+\alpha n+\beta$

حيث α و β عددان حقيقيان .

1) عيّن α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها وحدّها الأول .

2) احسب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

3) احسب المجموعين S_n و S'_n حيث :

$$S'_n=u_0+u_1+\cdots+u_n \quad \text{و} \quad S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$$

4) أ- عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 .

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها u_n مضاعفا للعدد 5 .

التمرين الثالث : (4 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) حيث : $x+2y-z-2=0$ معادلة للمستوي (P_1)

و $\begin{cases} x=1+2\alpha+\beta \\ y=1+\alpha \\ z=5+\alpha+\beta \end{cases} ;(\alpha;\beta)\in \mathbb{R}^2$ تمثيل وسيطي للمستوي (P_2)

1. اكتب معادلة للمستوي (P_2) .
2. عيّن شعاعا ناظميا $\vec{n_1}$ للمستوي (P_1) وشعاعا ناظميا $\vec{n_2}$ للمستوي (P_2) .
3. بيّن أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان .
4. أ- $A(3;1;1)$ نقطة من الفضاء . احسب المسافة d_1 بين النقطة A والمستوي (P_1) ثم المسافة d_2 بين النقطة A والمستوي (P_2) .
ب- استنتج المسافة d_3 بين النقطة A والمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2)
5. أ- عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) بدلالة الوسيط الحقيقي λ .
ب- M نقطة كيفية من (Δ) . احسب AM^2 بدلالة λ مستنتجا ثانية المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس تغيّرات الدالة f .
2. أ- بيّن أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته $y=x$.
ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) .
3. أ- بيّن أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $1.3<x_0<1.4$.
ب- عيّن معادلة (Δ) مماس للمنحنى (C_f) عند نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .
جـ- ارسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم .

④ أوجد الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغيّر x .
⑤ g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة $g(x)=|f(x)|$
(C_g) منحنى الدالة g في المعلم السابق .
- بيّن كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه في نفس المعلم السابق .
⑥ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $g(x)=m^2$

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

① حل المعادلة $(45+45i)f(z)=23+45i-2z$:

لدينا : $(45+45i)f(z)=23+45i-2z$

ومنه : $(45+45i)\times\dfrac{z-i}{z-1}=23+45i-2z$

ومنه : $(45+45i)(z-i)=(23+45i-2z)(z-1)$

وبعد النشر والتبسيط والترتيب نحصل على المعادلة : $2z^2+20z+68=0$

وبالقسمة على 2 نجد : $z^2+10z+34=0$ ... (E)

مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=-36=36i^2=(6i)^2$.

بما أن المميز هو عدد حقيقي سالب فإن هذه المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما $z'=-5-3i$ وَ $z''=-5+3i$

إذن : المعادلة المعطاة تقبل حلين هما : $z'=-5-3i$ وَ $z''=-5+3i$.

② أ- تعيين مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا تماما :

● طريقة أولى :

تذكير : التفسير الهندسي لـ $\left|\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right|$ وَ $\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)$:

إذا كانت A ، B وَ M صور الأعداد المركبة z_A ، z_B وَ z على الترتيب حيث $z\neq z_B$ فإن :

$$\begin{cases}\left|\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right|=\dfrac{AM}{BM}\\ \arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)=(\overrightarrow{BM};\ \overrightarrow{AM})[2\pi]\end{cases}$$

لتكن النقطتان A وَ B صورتي العددين المركبين $z_A=1$ وَ $z_B=i$ على الترتيب

لدينا : $f(z)=\frac{z-i}{z-1}=\frac{z-z_B}{z-z_A}$

$(f(z))$ حقيقي سالب تماما) يكافئ $(\arg(f(z))\equiv\pi\,[2\pi]$ و $z\neq z_A$ و $z\neq z_B)$

ومنه : $(\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{BM})=\pi+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ وَ $M\neq A$ وَ $M\neq B$.

أي : $(\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB})=\pi+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ وَ $M\neq A$ وَ $M\neq B$.

إذن : مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا هي القطعة المستقيمة $[AB]$ ما عدا النقطتين A و B (أي : القطعة المفتوحة $]AB[$) .

- طريقة ثانية :

كتابة $f(z)$ على الشكل الجبري : نضع $z=x+iy$ حيث $(x;y)\in\mathbb{R}^2$.

$$f(z)=\frac{z-i}{z-1}=\frac{x+iy-i}{x+iy-1}=\frac{x+i(y-1)}{(x-1)+iy}\times\frac{(x-1)-iy}{(x-1)-iy}$$

$$=\frac{x^2+y^2-x-y+i(1-x-y)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2-x-y}{(x-1)^2+y^2}+\frac{(1-x-y)}{(x-1)^2+y^2}i$$

إذن : $f(z)=\frac{x^2+y^2-x-y}{(x-1)^2+y^2}+\frac{(1-x-y)}{(x-1)^2+y^2}i$

تذكير : $(f(z))$ حقيقي سالب تماما) يكافئ $(\mathrm{Im}(f(z))=0$ و $R\acute{e}(f(z))<0)$

ومنه : $\begin{cases}\frac{(1-x-y)}{(x-1)^2+y^2}=0\\ \frac{x^2+y^2-x-y}{(x-1)^2+y^2}<0\end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases}-x-y+1=0\\ x^2+y^2-x-y<0\\ (x-1)^2+y^2\neq 0\end{cases}$

وأخيرا : $\begin{cases}-x-y+1=0\\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2<\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\\ (x\,;\,y)\neq(1;0)\end{cases}$

- مجموعة النقط M من المستوي حيث $-x-y+1=0$ هي المستقيم (AB) .

- مجموعة النقط M من المستوي حيث $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2<\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ هي القرص الدائري (C) الذي مركزه النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطره $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- تقاطع (AB) و (C) هي القطعة المفتوحة $]AB[$.

إذن : مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا هي القطعة المستقيمة $[AB]$ ما عدا النقطتين A و B (أي : القطعة المفتوحة $]AB[$) .

ب- حساب z_0 بحيث يكون $|f(z_0)|=1$ و $\arg(f(z_0))=\frac{3\pi}{2}$:

بما أن : $|f(z_0)|=1$ و $\arg(f(z_0))=\frac{3\pi}{2}$ فإن : $f(z_0)=e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i$

وبحل المعادلة : $\frac{z_0-i}{z_0-1}=-i$ نجد : $\boxed{z_0=1+i}$

3 أ- طبيعة المثلث ABC :

$AB=|z_B-z_A|=|i-1|=\sqrt{2}$ ، $AC=|z_C-z_A|=|z_0-1|=|i|=1$

وَ $BC=|z_C-z_B|=|z_0-i|=|1|=1$.

نلاحظ أن : $AC^2+BC^2=AB^2$ وَ $AC=BC$ ، نستنتج أن المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين .

- طريقة ثانية : يمكن الوصول إلى نفس النتيجة بملاحظة أن :
$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0$ و $CA=CB$.

- طريقة ثالثة : المثلث ABC متساوي الساقين وَ قائما في C لأن :

$$\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=i \quad \text{و} \quad \begin{cases}|i|=1\\ \arg(i)\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]\end{cases} \quad \text{ومنه :} \quad \begin{cases}CB=CA\\ (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]\end{cases}$$

($\left|\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right|=\frac{CA}{CB}$ وَ $\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)=(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})$)

ب- تعيين النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) :

معادلة (AB) هي : $-x-y+1=0$ وبالتالي : $\overrightarrow{AB}(1;-1)$ شعاع توجيه له .

تكون النقطة D نظيرة للنقطة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) إذا وفقط إذا كان :
$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ وَ منتصف القطعة $[CD]$ تنتمي إلى المستقيم (AB) .

وبحل الجملة : $\begin{cases} 1(x_D-1)-1(y_D-1)=0 \\ -\dfrac{x_C+x_D}{2}-\dfrac{y_C+y_D}{2}+1=0 \end{cases}$ نحصل على : $\begin{cases} x_D=0 \\ y_D=0 \end{cases}$

إذن : $D(0;0)$ أي أن نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) هي النقطة O .

- استنتاج طبيعة الرباعي $ACBD$:

بما أن النقطتين C و D متناظرتين بالنسبة إلى المستقيم (AB) فإن $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$
أي أن قطري الرباعي $ACBD$ متعامدان ، وزيادة على ذلك فهما متقايسان لأن :
$AB=CD=\sqrt{2}$. نستنتج أن الرباعي $ACBD$ هو مربع .

التمرين الثاني :

1) تعيين α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية :

تذكير : تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث :
من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=q.v_n$

لدينا : $u_{n+1}=3u_n+2n+1$ ولدينا : $v_n=u_n+\alpha n+\beta$

ومنه : $v_{n+1}=u_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=3u_n+2n+1+\alpha n+\alpha+\beta$
$=3u_n+(\alpha+2)n+1+\alpha+\beta$

ومن جهة أخرى ، لدينا : $qv_n=qu_n+q\alpha n+q\beta$

وبالتالي : $3u_n+(\alpha+2)n+1+\alpha+\beta=qu_n+q\alpha n+q\beta$

بالمطابقة : $\begin{cases} 3=q \\ \alpha+2=q\alpha \\ 1+\alpha+\beta=q\beta \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} q=3 \\ \alpha+2=3\alpha \\ 1+\alpha+\beta=3\beta \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} q=3 \\ \alpha=1 \\ \beta=1 \end{cases}$

إذن : من أجل $\alpha=\beta=1$ تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=3$ وحدّها الأول $v_0=1$.

2) كتابة v_n بدلالة n : $v_n=v_0\times q^n=1\times 3^n=3^n$

- استنتاج u_n بدلالة n :

من المساواة : $v_n=u_n+n+1$ نستنتج أن : $u_n=v_n-n-1=3^n-n-1$

3) حساب المجموع S_n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right)$$

● حساب المجموع S'_n :

نضع : $u_n = v_n + (-n-1) = v_n + w_n$ حيث : $v_n = 3^n$ وَ $w_n = -n-1$

واضح أن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=3$ وحدّها الأول $v_0 = 1$.

كذلك : (w_n) متتالية حسابية أساسها $q' = -1$ وحدّها الأول $w_0 = -1$.

ومنه :
$$\begin{aligned} S'_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ &= (v_0 + w_0) + (v_1 + w_1) + \ldots + (v_n + w_n) \\ &= (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (w_0 + w_1 + \cdots + w_n) \end{aligned}$$

ونعلم أن : $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = S_n = \frac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right)$

وَ $w_0 + w_1 + \cdots + w_n = \frac{n+1}{2}(w_0 + w_n) = -\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

إذن : $S'_n = \frac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right) - \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} - (n+1)(n+2) - 1\right)$

4 أ- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 :

$3^0 \equiv 1[5]$ ، $3^1 \equiv 3[5]$ ، $3^2 \equiv 4[5]$ ، $3^3 \equiv 2[5]$ ، $3^4 \equiv 1[5]$.

من العلاقة : $3^4 \equiv 1[5]$: نستنتج أن $(3^4)^k \equiv 1^k[5]$ أي : $3^{4k} \equiv 1[5]$ مع $k \in \mathbb{N}$

$3^{4k+1} \equiv 3[5]$ ، $3^{4k+2} \equiv 4[5]$ ، $3^{4k+3} \equiv 2[5]$

إذن : بواقي قسمة 3^n على 5 دورية ودورها 4 ونلخصها في الجدول الآتي :

في هذا الجدول يدلّ k على عدد طبيعي .

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
البواقي	1	3	4	2

ب- تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها u_n مضاعفا للعدد 5 :

لدينا : $u_n = 3^n - n - 1$ ومنه : $u_n \equiv 0[5]$ يكافئ $3^n - n - 1 \equiv 0[5]$

– إذا كان $n = 4k$: $3^{4k} - 4k - 1 \equiv 0[5]$ ومنه : $1 - 4k - 1 \equiv 0[5]$

أي : $-4k \equiv 0[5]$ وبالتالي : $k \equiv 0[5]$ ومنه : $k \equiv 5k'$ حيث : $k' \in \mathbb{N}$

في هذه الحالة يكون : $n = 20k'$ حيث : $k' \in \mathbb{N}$.

- إذا كان $n = 4k+1$: $3^{4k+1} - (4k+1) - 1 \equiv 0[5]$

ومنه : $3 - 4k - 2 \equiv 0[5]$ أي : $-4k \equiv -1[5]$ وبما أن : $-4 \equiv 1[5]$

و $-1 \equiv 4[5]$ ينتج : $k \equiv 4[5]$ ومنه : $k \equiv 5k' + 4$ حيث : $k' \in \mathbb{N}$

في هذه الحالة يكون : $n = 20k' + 17$ حيث : $k' \in \mathbb{N}$.

- إذا كان $n = 4k+2$: $3^{4k+2} - (4k+2) - 1 \equiv 0[5]$

ومنه : $4 - 4k - 3 \equiv 0[5]$ أي : $-4k \equiv -1[5]$ وبما أن : $-4 \equiv 1[5]$

و $-1 \equiv 4[5]$ ينتج : $k \equiv 4[5]$ ومنه : $k \equiv 5k' + 4$ حيث : $k' \in \mathbb{N}$

في هذه الحالة يكون : $n = 20k' + 18$ حيث : $k' \in \mathbb{N}$.

- إذا كان $n = 4k+3$: $3^{4k+3} - (4k+3) - 1 \equiv 0[5]$

ومنه : $2 - 4k - 4 \equiv 0[5]$ أي : $-4k \equiv 2[5]$ وبما أن : $-4 \equiv 1[5]$

ينتج : $k \equiv 2[5]$ ومنه : $k \equiv 5k' + 2$ حيث : $k' \in \mathbb{N}$

في هذه الحالة يكون : $n = 20k' + 11$ حيث : $k' \in \mathbb{N}$.

التمرين الثالث :

(1) كتابة معادلة للمستوي (P_2) :

لدينا : $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha + \beta \\ y = 1 + \alpha \\ z = 5 + \alpha + \beta \end{cases}$ أي : $\begin{cases} y = 1 + \alpha \\ x = 1 + 2\alpha + \beta \\ z = 5 + \alpha + \beta \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} \alpha = y - 1 \\ x = 1 + 2(y-1) + \beta \\ z = 5 + y - 1 + \beta \end{cases}$ أي : $\begin{cases} \alpha = y - 1 \\ \beta = x - 2y + 1 \\ z = 4 + y + x - 2y + 1 \end{cases}$

وبتبسيط المعادلة الثالثة نحصل على المعادلة : $x - y - z + 5 = 0$

إذن : معادلة للمستوي (P_2) هي : $x - y - z + 5 = 0$

(2) تعيين $\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$:

معادلة للمستوي (P_1) هي : $x + 2y - z - 2 = 0$ ومنه : $\overrightarrow{n_1}(1; 2; -1)$

معادلة للمستوي (P_2) هي : $x - y - z + 5 = 0$ ومنه : $\overrightarrow{n_2}(1; -1; -1)$

(3) تبيان أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان :

لدينا : $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=1\times1+2(-1)+(-1)(-1)=2-2=0$ ومنه : $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$

إذن : المستويان (P_1) و (P_2) متعامدان .

4 أ- حساب d_1 و d_2 :

تذكير : المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0;y_0;z_0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A;(P))$ حيث :

$$\boxed{d(A;(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

ومنه :
$$\begin{cases} d_1=\dfrac{|3+2\times1-1-2|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3} \\ d_2=\dfrac{|3-1\times1-1+5|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3} \end{cases}$$

ب- استنتاج المسافة d_3 بين النقطة A والمستقيم (Δ) تقاطع (P_1) و (P_2) :

نعلم أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان و (Δ) مستقيم تقاطعهما . النقطة A لا تنتمي إلى (P_1) ولا تنتمي إلى (P_2) .

المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) هي الطول AH حيث H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) .

لتكن A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_2) ، وبالتالي فإن المثلث $AA'H$ قائم في A' ، وحسب مبرهنة فيثاغورث :

$$d_3^2=AH^2=d_1^2+d_2^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2=\frac{114}{9}$$

إذن : $d_3=\dfrac{\sqrt{114}}{3}$

5 أ- تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) بدلالة الوسيط الحقيقي λ :

لدينا : $\begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ x-y-z+5=0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x=z-2y+2 \\ (z-2y+2)-y-z+5=0 \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} x=z-2y+2 \\ y=\dfrac{7}{3} \end{cases}$ وأخيرا : $\begin{cases} x=z-2\times\dfrac{7}{3}+2=z-\dfrac{8}{3} \\ y=\dfrac{7}{3} \end{cases}$

وبوضع $z=\lambda$ نحصل على التمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases} x=\lambda-\frac{8}{3} \\ y=\frac{7}{3} \\ z=\lambda \end{cases} \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

ب- حساب AM^2 بدلالة λ :

لدينا : $\overrightarrow{AM}(x-3\,;y-1;\,z-1)$

ومنه :
$$AM^2=(x-3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$$
$$=\left(\lambda-\frac{8}{3}-3\right)^2+\left(\frac{7}{3}-1\right)^2+(\lambda-1)^2$$
$$=2\lambda^2-\frac{40}{3}\lambda+\frac{314}{9}$$

● استنتاج ثانية المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) :

المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) هي أقصر مسافة بين A و (Δ) ، هذه المسافة هي AH حيث H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) .

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(\lambda)=2\lambda^2-\frac{40}{3}\lambda+\frac{314}{9}$

* دراسة اتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(\lambda)=4\lambda-\frac{40}{3}$

($f'(\lambda)=0$) يكافئ ($4\lambda-\frac{40}{3}=0$) ومنه : $\lambda=\frac{10}{3}$

الدالة f متناقصة على $]-\infty;\frac{10}{3}]$ ومتزايدة على $[\frac{10}{3};+\infty[$ وتقبل قيمة صغرى من أجل $\lambda=\frac{10}{3}$. عندئذ تكون المسافة AM صغرى (أصغرية) .

النقطة الموافقة لهذه القيمة الصغرى هي $H\left(\frac{2}{3};\frac{7}{3};\frac{10}{3}\right)$.

وبالتالي فإن : $AH=\sqrt{\left(\frac{2}{3}-3\right)^2+\left(\frac{7}{3}-1\right)^2+\left(\frac{10}{3}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{114}}{3}$

إذن : $AH=\frac{\sqrt{114}}{3}$ (لاحظ أن $d_3=AH=\frac{\sqrt{114}}{3}$)

التمرين الرابع :

(1) دراسة تغيّرات الدالة f :

- النهايات : $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- حساب $f'(x)$: $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}$
- إشارة $f'(x)$: من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x) > 0$.

إذن : الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

- جدول التغيرات :

x	-1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

(2) أ- تبيان أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته $y = x$:

- بما أن : $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$ نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x = -1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f).
- تذكير : إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي : $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ وكانت $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$.

لدينا : $f(x) = x - \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$ وهي من الشكل $f(x) = ax + b + \varphi(x)$

وبما أن $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{\sqrt{x+1}} = 0$ نستنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب- دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) والمستقيم (D) :

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f(x)-x=-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$ وبالتالي فإن إشارة الفرق $f(x)-x$ هي إشارة $-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$. وبما أنه ، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}<0$ نستنتج أن المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم (D).

③ أ- تبيان أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $1.3<x_0<1.4$:

تذكير بمبرهنة القيم المتوسطة . إذا كان :

❶ f مستمرة على المجال $[a;b]$ ؛

❷ f رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ ؛

❸ $f(a)\times f(b)<0$.

تحليليا : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 من المجال $]a;b[$.

هندسيا : المنحني الممثل للدالة f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]a;b[$.

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أنها مستمرة ومتزايدة تماما على $[1.3;1.4]$ ، زيادة على ذلك : $f(1.3)=-0.01$ و $f(1.4)=0.10$ وبالتالي : $f(1.3)\times f(1.4)<0$. نستنتج أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث : $1.3<x_0<1.4$.

ب- تعيين معادلة (Δ) مماس للمنحني (C_f) عند نقطة تقاطعه مع محور التراتيب :

تذكير : معادلة مماس المنحني الممثل لدالة f عند النقطة ذات الفاصلة a هي :

$$y=f'(a).(x-a)+f(a)$$

- تعيين نقطة تقاطع (C_f) مع محور التراتيب :

من أجل : $x=0$ نجد : $f(0)=-2$ وبالتالي (C_f) يقطع محور التراتيب في النقطة $B(0;-2)$.

- كتابة معادلة المماس (Δ) عند النقطة B :

معادلة (Δ) من الشكل : $y=f'(a).(x-a)+f(a)$ حيث : $f(a)=f(0)=-2$ و $f'(a)=f'(0)=2$ ومنه : $y=2(x-0)-2$.

إذن : معادلة المماس (Δ) هي $y=2x-2$.

جـ- رسم (Δ) و (C_f) : انظر الشكل .

④ إيجاد F الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغيّر x :

تذكير : إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I وكان ، من أجل كل x من I ، $u(x)>0$ تكون $2\sqrt{u}+c$ ($c\in\mathbb{R}$) دالة أصلية للدالة $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ على I .

لدينا : $f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ و $I=]-1;+\infty[$.

الدالة f مستمرة على $]-1;+\infty[$ وبالتالي فهي تقبل دوالا أصلية على هذا المجال

الدالة $u:x\mapsto x+1$ قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ ومن أجل كل x من هذا المجال : $u'(x)=1$ ، يمكن أن نكتب : $-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ على الشكل $-2\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$

ونعلم أن $2\sqrt{u}$ هي دالة أصلية للدالة $\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

إذن : مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]-1;+\infty[$ هي الدوال :

$F(x)=\frac{1}{2}x^2-2\times2\sqrt{x+1}+c$ حيث c ثابت حقيقي .

ونعلم أن $F(0)=0$ ومنه : $c=4$.

إذن : $F(x)=\frac{1}{2}x^2-4\sqrt{x+1}+4$

⑤ تبيان كيفية إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) :

تذكير : $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & ; f(x)\geq 0 \\ -f(x) & ; f(x)\leq 0 \end{cases}$

ومنه : $g(x)=\begin{cases} f(x) & ; x\in[x_0;+\infty[\\ -f(x) & ; x\in]-1;x_0] \end{cases}$

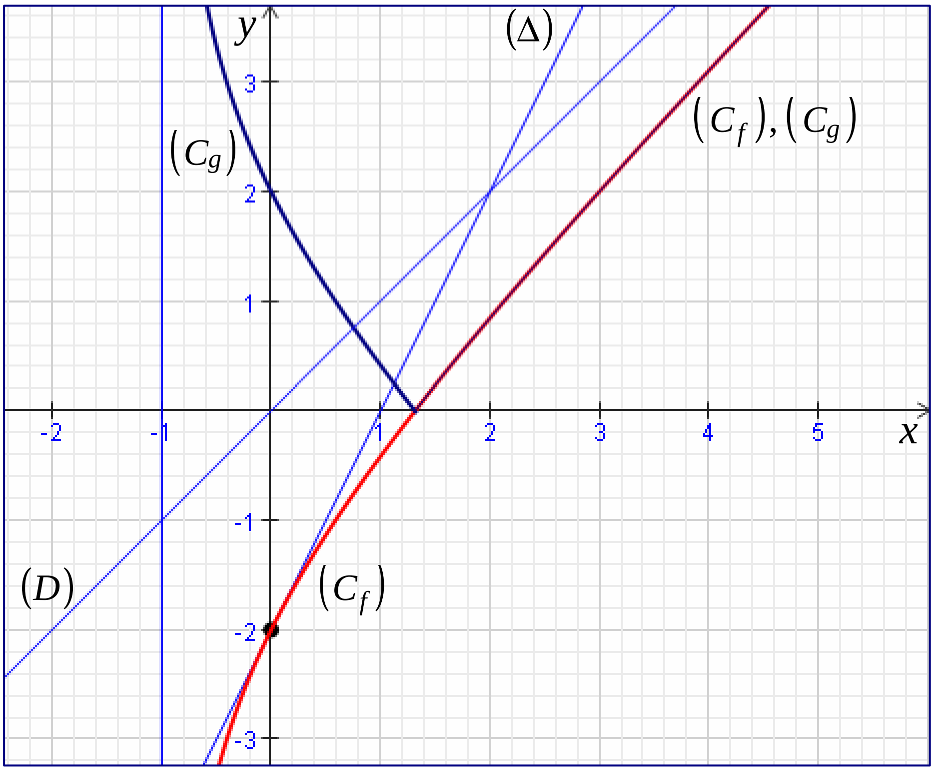
- إذا كان $x\in[x_0;+\infty[$ فإن $g(x)=f(x)$ ومنه : (C_g) ينطبق على (C_f) .
- إذا كان $x\in]-1;x_0]$ فإن $g(x)=-f(x)$ ومنه : (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل .

• رسم (C_g) : انظر الشكل .

6 المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة $g(x)=m^2$:

- إذا كان : $m^2=0$ أي : $m=0$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا موجبا .
- إذا كان : $m^2=2$ أي : $m\in\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما موجب والآخر معدوم .
- إذا كان : $0<m^2<2$ أي : $m\in\left]-\sqrt{2};\sqrt{2}\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين .
- إذا كان : $m^2>2$ أي : $m\in\left]-\infty;-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2};+\infty\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

● الرسم :



بكالوريا 2008 . الشعبة : رياضيات

الموضوع الأول

تمرين 1 : (5 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما $\sqrt{3}-i$ و $\sqrt{3}+3i$ على الترتيب .

1) اكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه O ويحوّل A إلى B ثم عيّن زاويته ونسبته .

2) نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يلي : $A_0 = A$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $A_{n+1} = S(A_n)$. نرمز إلى لاحقة A_n بالرمز z_n .

أ- أنشئ في المستوي المركب النقط A_0 ، A_1 و A_2 .

ب- برهن أن : $z_n = 2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

جـ- عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تنتمي من أجلها النقطة A_n إلى (OA_1)

3) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :

$u_0 = A_0A_1$ و $u_n = A_nA_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ- بيّن أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدّها الأول u_0 وأساسها q .

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n .

جـ- احسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

تمرين 2 : (4 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(0;2;1)$ ، $B(-1;1;-3)$ و $C(1;0;-1)$.

1) اكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة S التي مركزها C وتشمل النقطة A .

2) ليكن المستقيم (D) المعرف بالتمثيل الوسيطي :

$$\begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = 1+2\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = -3+2\lambda \end{cases}$$

أ- اكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل النقطة C ويعامد المستقيم (D) .

ب- احسب المسافة بين النقطة C والمستقيم (D) .

جـ- ما ذا تستنتج فيما يتعلق بالوضع النسبي لكل من المستقيم (D) وسطح الكرة S ؟

تمرين 3 : (5 نقاط)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $3x-21y=78$

1 أ- بيّن أن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب- أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x\,;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 5\,[7]$

- استنتج حلول المعادلة (E) .

2 أ- ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

ب- عيّن الثنائيات $(x\,;y)$ من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق :

$$5^x+5^y\equiv 3\,[7]$$

تمرين 4 : (6 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=3+\sqrt{x-1}$

يرمز (c) إلى منحنى f في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

(الوحدة على المحورين $2\,cm$) .

1 احسب $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ وفسّر النتيجة هندسيا .

- ادرس تغيّرات الدالة f .

- باستعمال منحنى الدالة " الجذر التربيعي " ، أنشئ المنحنى (c) .

- ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$.

2 نعرّف المتتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالآتي : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

أ- باستعمال (D) و (c) ، مثل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل .

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها .

3 أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$2\le u_n\le 5 \quad \text{و} \quad u_{n+1}>u_n$$

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة . احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

حل الموضوع الأول

التمرين 1 :

1) كتابة العبارة المركبة للتشابه S :

عبارة التشابه المباشر S من الشكل $z' = az + b$.

لدينا : $\begin{cases} S(O)=O \\ S(A)=B \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} z_O = az_O + b \\ z_B = az_A + b \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a = i\sqrt{3} \\ b = 0 \end{cases}$

إذن : العبارة المركبة للتشابه S هي : $z' = \sqrt{3}\, iz$

• عناصر التشابه المباشر S : مركزه O ، نسبته $k = \sqrt{3}$ وزاويته $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

ملاحظة : يمكن الحصول على نفس النتيجة السابقة باستعمال التعريف التالي :

العبارة المركبة للتشابه المباشر الذي مركزه $M_0(z_0)$ ، نسبته k $(k>0)$ وزاويته θ والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$

وبالتالي نحصل على : $z' = i\sqrt{3}\, z = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} z$

2) أ- إنشاء النقط A_0 ، A_1 و A_2 : انظر الشكل

من العلاقة $A_{n+1} = S(A_n)$ نستنتج أن :

$A_1 = S(A_0)$ ومنه : $z_1 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} z_0 = \sqrt{3} + 3i$. إذن : $A_1(\sqrt{3}\,;3)$

$A_2 = S(A_1)$ ومنه : $z_2 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} z_1 = -3\sqrt{3} + 3i$. إذن : $A_2(-3\sqrt{3}\,;3)$

ب- البرهان أن $z_n = 2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$:

من العلاقة $A_{n+1} = S(A_n)$ نستنتج أن :

$$z_1 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} z_0$$

$$z_2 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} z_1 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} z_0 = \left(\sqrt{3}\right)^2 e^{i\frac{2\pi}{2}} z_0$$

$$z_3 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} z_2 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} \times \left(\sqrt{3}\right)^2 e^{i\frac{2\pi}{2}} z_0 = \left(\sqrt{3}\right)^3 e^{i\frac{3\pi}{2}} z_0$$

....

ومنه التعميم التالي : $z_n = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} z_{n-1} = \left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{2}} z_0$

ومن الخاصية : $e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ وعلما أن : $z_0 = \sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

نستنتج أن : $z_n=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}z_{n-1}=\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{2}}z_0=\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{2}}\times 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

إذن : $z_n=\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{2}}\times 2e^{-i\frac{\pi}{6}}=2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

طريقة 2 : يمكن استعمال طريقة أخرى وذلك باستخدام النتيجة التالية :
من تعريف مركب التشابهات نستنتج أنه إذا كان S تشابها مباشرا مركزه النقطة O نسبته k وزاويته θ فإن مركب n مرة التشابه S هو تشابه مباشر له نفس المركز O ، نسبته k^n وزاويته $n\theta$.

طريقة 3 : يمكن استعمال البرهان بالتراجع للبرهان أن $z_n=2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

جـ- تعيين مجموعة الأعداد الطبيعية n :
لاحقة A_1 هي $z_1=\sqrt{3}+3i$ وبالتالي فإن معادلة المستقيم (OA_1) هي $y=\sqrt{3}x$

$[\ A_n\in(OA_1)\ ]$ يكافئ $[\ \arg(z_n)=\frac{\pi}{3}+k\pi\ ]$

ومنه : $\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+k\pi$ نستنتج أن : $n=2k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$

إذن : تنتمي النقطة A_n إلى المستقيم (OA_1) إذا كان n عددا طبيعيا فرديا

3 أ- إثبات أن (u_n) متتالية هندسية :

تذكير : (u_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث :
من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=q\times u_n$

لدينا : $u_n=A_nA_{n+1}$ ومنه : $u_{n+1}=A_{n+1}A_{n+2}$

حسب الخاصة المميزة للتشابه المباشر S فإن صورة الثنائية النقطية $(A_n\,,A_{n+1})$ هي ثنائية نقطية $(A_{n+1}\,,A_{n+2})$ بحيث : $A_{n+1}A_{n+2}=\sqrt{3}A_nA_{n+1}$

وبالتالي : $u_{n+1}=\sqrt{3}\,u_n$

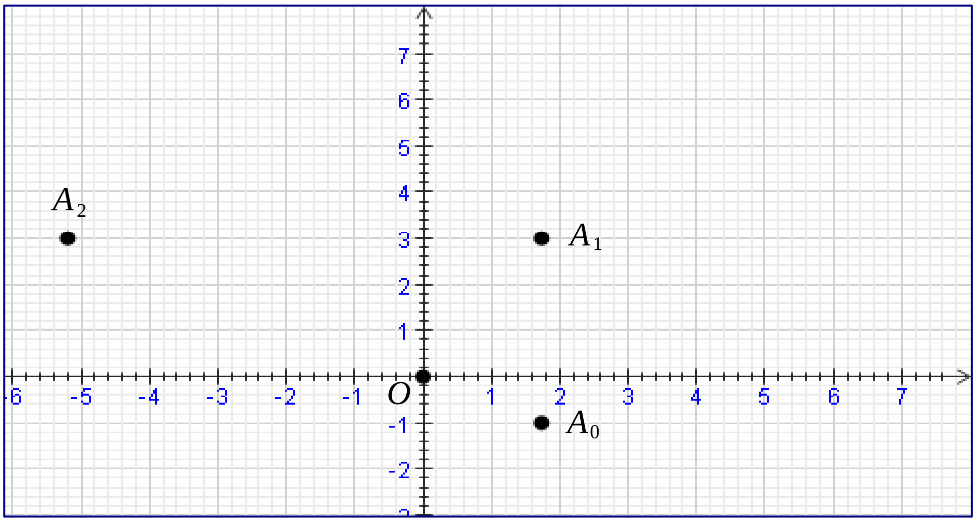
إذن : (u_n) متتالية هندسية حدّها الأول $u_0=A_0A_1=4$ وأساسها $q=\sqrt{3}$

ب- استنتاج عبارة u_n بدلالة n : $u_n=u_0\times q^n=4\left(\sqrt{3}\right)^n$

جـ- حساب المجموع S_n :

$$S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=-2\left(1+\sqrt{3}\right)\left[1-\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}\right]$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$: نعلم أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}=+\infty$ وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$



التمرين 2 :

1 كتابة المعادلة الديكارتية لسطح الكرة S :

معادلة S من الشكل : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

نصف قطر S هو : $r=CA=\sqrt{1+4+4}=3$

إذن : معادلة S هي $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$

2 أ- كتابة معادلة للمستوي (P) :

$\vec{n}(-1;2;2)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D) و هو شعاع ناظمي للمستوي (P)

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء .

$[\ M\in(P)\ ]$ يكافئ $[\ \vec{n}\perp\overrightarrow{CM}\ ]$ ومنه : $\vec{n}.\overrightarrow{CM}=0$

وبالتالي : $-1\times(x-1)+2\times y+2\times(z+1)=0$

إذن : معادلة (P) هي $-x+2y+2z+3=0$

طريقة أخرى : بما أن الشعاع $\vec{n}(-1;2;2)$ ناظمي للمستوي (P) فإن معادلة (P)

من الشكل : $-x+2y+2z+d=0$

ولأن $C\in(P)$ فإن $-1+2\times0+2\times(-1)+d=0$ ومنه : $d=3$

إذن : معادلة (P) هي $-x+2y+2z+3=0$

ب- حساب المسافة بين النقطة C والمستقيم (D) :

المسافة بين النقطة C والمستقيم (D) هي CH حيث H هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (D) .

لتعيين إحداثيات النقطة H نقوم بحل الجملة : $\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-3+2\lambda \\ -x+2y+2z+3=0 \end{cases}$ فنجد : $\lambda=0$

وبالتالي : $H(-1;1;-3)$ ومنه : $CH=\sqrt{4+1+4}=3$

إذن : المسافة بين النقطة C والمستقيم (D) هي $d(C;(D))=CH=3$

جـ- الوضع النسبي لكل من المستقيم (D) وسطح الكرة S :

بما أن بُعد النقطة C (مركز سطح الكرة) عن المستقيم (D) يساوي نصف قطر سطح الكرة S نستنتج أن المستقيم (D) مماس لسطح الكرة S .

التمرين 3 :

1 أ- تبيان أن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$:

تذكير : تقبل المعادلة $ax+by=c$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$ إذا وفقط إذا كان $\text{pgcd}(|a|;|b|)$ يقسّم العدد c .

نعلم أن : $\text{pgcd}(3;21)=3$. بما أن العدد 3 يقسّم العدد 78 ($78=3\times26$)

نستنتج أن المعادلة(E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب- إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن$x\equiv5[7]$:

لدينا : $21y\equiv0[7]$ و $78\equiv1[7]$ وعليه نكتب المعادلة (E) كما يلي :

$3x\equiv1[7]$ وحسب خواص الموافقة نكتب : $5\times3x\equiv5\times1[7]$ أي : $15x\equiv5[7]$

نستنتج أن : $x\equiv5[7]$

- استنتاج حلول المعادلة (E) :

من : $x\equiv5[7]$ نستنتج أن : $x=7k+5$ وبالتعويض في المعادلة (E) نجد :

$y=k-3$

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $\begin{cases} x=7k+5 \\ y=k-3 \end{cases}(k\in\mathbb{Z})$

2 أ- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 :

بواقي القسمة الإقليدية لـ 5^n على 7 دورية ودورها 6 نلخصها في الجدول الآتي :

n	$6m$	$6m+1$	$6m+2$	$6m+3$	$6m+4$	$6m+5$
البواقي	1	5	4	6	2	3

(في هذا الجدول m عدد صحيح)

ب- تعيين الثنائيات $(x;y)$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق $5^x+5^y\equiv3[7]$

نعلم أن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x\,;y)$ حيث : $\begin{cases} x=7k+5 \\ y=k-3 \end{cases} (k\in \mathbb{Z})$

في هذا السؤال $(x\,;y)\in \mathbb{N}^2$ وبالتالي $k-3\geq 0$ وبوضع $k'=k-3$ مع $k'\in \mathbb{N}$

تصبح حلول المعادلة (E) كما يلي : $\begin{cases} x=7k'+26 \\ y=k' \end{cases} (k'\in \mathbb{N})$

نعوض x و y في المعادلة $5^x+5^y\equiv 3\,[7]$ فنجد $5^{6(k'+4)+2}+5^{k'}\equiv 3\,[7]$

وبالتالي : $5^{k'}\equiv 6\,[7]$ وباستخدام بواقي قسمة 5^n على 7 نستنتج $k'=6m+4$

ومنه : $\begin{cases} x=42m+54 \\ y=6m+4 \end{cases} (m\in \mathbb{N})$ (يمكن الحصول على نفس النتيجة باتباع طرق أخرى)

التمرين 4 :

① حساب $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$:

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \underset{>}{\to} 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{x \underset{>}{\to} 1} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$$

• التفسير الهندسي لهذه النتيجة : المنحنى (c) يقبل على يمين النقطة ذات الفاصلة 1 نصف مماس يوازي محور التراتيب .

• دراسة تغيّرات الدالة f :

- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

- من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ (الدالة f متزايدة تماما)

- جدول تغيرات الدالة f :

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	3 $\nearrow$ $+\infty$

• إنشاء المنحنى (c) :

تذكير : التمثيل البياني للدالة $f:x\mapsto g(x+\lambda)+\lambda'$

إذا كان C_g و C_f التمثيلين البيانيين في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ للدالتين g و f على الترتيب فإن C_f هو صورة C_g بالانسحاب الذي شعاعه $-\lambda\vec{i}+\lambda'\vec{j}$.

(λ و λ' عددان حقيقيان)

لدينا : $f(x)=3+\sqrt{x-1}$ ومنه : $f(x)=g(x-1)+3$ حيث :
g هي الدالة ″ الجذر التربيعي ″
نستنتج أن المنحني (c) هو صورة منحنى الدالة ″ الجذر التربيعي ″ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(1;3)$.

② أ- تمثيل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل :
ننطلق من الفاصلة $u_0=2$ ، ترتيب النقطة من المنحني (c) الموافق لهذه الفاصلة يعطينا u_1 . نقوم بنقل العدد u_1 إلى محور الفواصل ومن أجل هذا ، نستعمل المستقيم (D) . وبالتالي فإن u_2 هو ترتيب النقطة من المنحني (c) ذات الفاصلة u_1 . نقوم بنقل العدد u_2 إلى محور الفواصل ومن أجل هذا ، نستعمل المستقيم (D)

ب- وضع تخمين حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها :
المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى وبالتالي فهي متقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (c) وَ (D) ، هذه الفاصلة توافق الحل l للمعادلة $f(x)=x$ ومنه : $l=5$

③ أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2\le u_n\le 5$:
نسمي p_n الخاصية ″ $2\le u_n\le 5$ ″

- التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $2\le u_0\le 5$ أي : $2\le 2\le 5$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

- نفرض أن p_n صحيحة أي : $2\le u_n\le 5$ ،

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $2\le u_{n+1}\le 5$
من فرضية التراجع : $2\le u_n\le 5$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$ نستنتج أن : $f(2)\le f(u_n)\le f(5)$ أي : $4\le u_{n+1}\le 5$ ومنه : $2\le u_{n+1}\le 5$
وعليه فإن : p_{n+1} صحيحة

طريقة أخرى : من فرضية التراجع : $2\le u_n\le 5$ وبإضافة العدد -1 إلى الحدود الثلاثة نجد : $1\le u_n-1\le 4$. وبما أن الدالة ″ الجذر التربيعي ″ متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ نستنتج أن : $1\le\sqrt{u_n-1}\le 2$ وبإضافة العدد 3 إلى الحدود الثلاثة نحصل على : $4\le 3+\sqrt{u_n-1}\le 5$ أي : $4\le u_{n+1}\le 5$ ومنه : $2\le u_{n+1}\le 5$ وعليه فإن : p_{n+1} صحيحة

- إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $2\le u_n\le 5$.

* البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} > u_n$:

نسمي p_n الخاصية " $u_{n+1} > u_n$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $u_1 > u_0$ أي : $4 > 2$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض صحة p_n أي : $u_{n+1} > u_n$ ونبرهن صحة p_{n+1} أي : $u_{n+2} > u_{n+1}$

من فرضية التراجع : $u_{n+1} > u_n$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$

نستنتج أن : $f(u_{n+1}) > f(u_n)$ أي : $u_{n+2} > u_{n+1}$

ومنه : p_{n+1} صحيحة .

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} > u_n$.

ب- استنتاج أن (u_n) متقاربة :

لدينا : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} > u_n$ نستنتج أن (u_n) متزايدة تماما

ولدينا : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $2 \leq u_n \leq 5$ نستنتج أن (u_n) محدودة من الأعلى

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة . (هذا ما يؤكد صحة المخمّنة السابقة) .

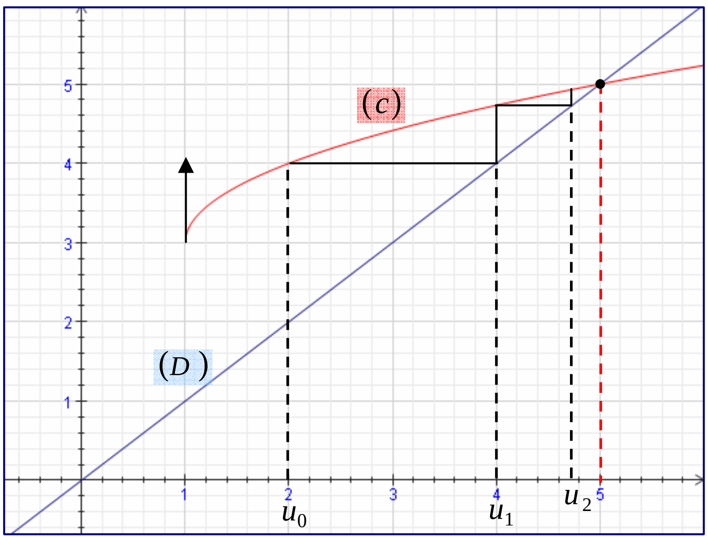
حساب $\lim_{n \to +\infty} u_n$:

نفرض أن (u_n) متقاربة نحو العدد الحقيقي l ومنه : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$

من العلاقة : $u_{n+1} = f(u_n)$ نستنتج أن : $l = 3 + \sqrt{l-1}$ وبحل هذه المعادلة

نجد : $l = 5$.

إذن : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 5$



الموضوع الثاني

تمرين 1 : (5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ المعرف كما يلي :

$$P(z)=2z^4-2iz^3-z^2-2iz+2$$

① بيّن أنه إذا كان a جذرا لكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{a}$ جذر له أيضا .

② تحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$.

③ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

④ اكتب الحلول على الشكل الأسي .

⑤ لتكن A ، B ، C و D النقط من المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ والتي لاحقاتها على الترتيب : $1+i$ ، $-1+i$ ، $\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i$ و $-\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i$ حيث m عدد حقيقي غير معدوم .

- عيّن m حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا .

تمرين 2 : (4 نقاط)

المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+1$$

① احسب u_1 ، u_2 و u_3 .

② المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$

- برهن بالتراجع أن (v_n) متتالية ثابتة .
- استنتج عبارة u_n بدلالة n .
- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

③ المتتالية العددية (w_n) المعرفة من أجل كل n من $\mathbb{N}$ بـ : $w_n=\frac{2}{3}n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

- احسب المجموع S حيث : $S=w_0+w_1+w_2+\cdots+w_n$

تمرين 3 : (4 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر

المستقيمين (Δ) و (Δ') المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين الآتيين :

$$\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=2+\frac{1}{2}\lambda \\ z=-2-2\lambda \end{cases} (\lambda\in\mathbb{R}) \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=6+\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=5+\alpha \end{cases} (\alpha\in\mathbb{R})$$

على الترتيب .

① بيّن أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي .

② M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (Δ') .

أ- عيّن إحداثيات النقطتين M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (Δ') .

ب- احسب الطول MN .

③ عيّن معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (Δ') .

④ احسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') والمستوي (P) . ما ذا تلاحظ ؟

تمرين 4 : (7 نقاط)

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x-1+\dfrac{4}{e^x+1}$

C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

① ادرس تغيرات الدالة f .

② بيّن أن C_f يقبل نقطة انعطاف ω واكتب معادلة لمماس C_f عند النقطة ω .

- أثبت أن ω مركز تناظر للمنحني C_f .

③ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]$.

- استنتج أن C_f يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما .

④ بيّن أن C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2.77;-2.76[$.

- احسب $f(1)$ و $f(-1)$ (تدوّر النتائج إلى 10^{-2}) ثم ارسم C_f ومستقيميه المقاربين .

II) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x)=-x+3-\dfrac{4}{e^x+1}$

وَ C_g منحنى الدالة g .

① بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x)=f(-x)$.

- استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول C_f إلى C_g .

2 أنشئ المنحنى C_g في نفس المعلم السابق (دون دراسة الدالة g)

حل الموضوع الثاني

التمرين 1 :

1 إثبات أنه إذا كان a جذرا لكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{a}$ جذر له أيضا :

a جذر لكثير الحدود $P(z)$ معناه : $P(a)=0$

ومنه : $2a^4-2ia^3-a^2-2ia+2=0 \quad ... (1)$

- من أجل $a=0$ نحصل على : $2=0$ و هذا مستحيل ، نستنتج أن $a\neq 0$.

- من أجل $a\neq 0$ وبقسمة طرفي المساواة (1) على العدد a^4 نحصل على :

$2-2i\times\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}-2i\times\frac{1}{a^3}+2\times\frac{1}{a^4}=0$ وبعد الترتيب نجد :

$2\left(\frac{1}{a}\right)^4-2i\left(\frac{1}{a}\right)^3-\left(\frac{1}{a}\right)^2-2i\left(\frac{1}{a}\right)+2=0$ ومنه : $P\left(\frac{1}{a}\right)=0$

إذن : إذا كان a جذرا لكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{a}$ جذر له أيضا .

2 التحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$: $P(1+i)=0$

$1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$ معناه : $P(1+i)=0$

3 حل المعادلة $P(z)=0$: العددان $1+i$ و $\frac{1}{1+i}$ جذران لـ $P(z)$ وبالتالي

يمكن كتابته على الشكل : $P(z)=[z-(1+i)]\left[z-\left(\frac{1}{1+i}\right)\right]\left(2z^2+\alpha z+\beta\right)$

وبعد النشر والترتيب والمطابقة مع $P(z)=2z^4-2iz^3-z^2-2iz+2$

نجد : $\alpha=3-i$ و $\beta=2$

ومنه : $P(z)=[z-(1+i)]\left[z-\left(\frac{1}{1+i}\right)\right]\left(2z^2+(3-i)z+2\right)$

مميز المعادلة $2z^2+(3-i)z+2=0$ هو : $\Delta=-8-6i=(1-3i)^2$

نستنتج أن حلّي المعادلة $2z^2+(3-i)z+2=0$ هما : $-1+i$ و $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

إذن : حلول المعادلة $P(z)=0$ هي : $1+i$ ، $-1+i$ ، $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ و $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

4 كتابة الحلول على الشكل الأسي :

- $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$
- $-1+i=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$
- $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}(1-i)=\frac{1}{2}\left(\overline{1+i}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\;e^{-i\frac{\pi}{4}}$
- $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}(-1-i)=\frac{1}{2}\left(\overline{-1+i}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\;e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

5 تعيين m حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا :

يكون الرباعي $ABCD$ مربعا إذا وفقط إذا كان متوازي أضلاع وكان قطراه $[AC]$ و $[BD]$ متناصفين ومتعامدين .

- الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع معناه : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ومنه : $Z_{\overrightarrow{AB}}=Z_{\overrightarrow{DC}}$
  [$Z_{\overrightarrow{AB}}=Z_{\overrightarrow{DC}}$] يكافئ [$-2=-m$] ومنه : $m=2$
- $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان معناه : $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$

وبالتالي : $\frac{-1+i+\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i}{2}=\frac{1+i-\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i}{2}$ ومنه : $m=2$

- $[AC]$ و $[BD]$ متعامدان معناه : $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ ومنه : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

لدينا : $\overrightarrow{AC}\left(-\frac{m}{2}-1;-\frac{m}{2}-1\right)$ و $\overrightarrow{BD}\left(\frac{m}{2}+1;-\frac{m}{2}-1\right)$

[$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$] يكافئ [$\left(-\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m}{2}+1\right)+\left(-\frac{m}{2}-1\right)\left(-\frac{m}{2}-1\right)=0$]

وبما أن : $-\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(\frac{m}{2}+1\right)+\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(\frac{m}{2}+1\right)=-\left(\frac{m}{2}+1\right)^2+\left(\frac{m}{2}+1\right)^2=0$

نستنتج أن القطرين $[AC]$ و $[BD]$ متعامدان مهما كان العدد الحقيقي غير المعدوم m

إذن : يكون الرباعي $ABCD$ مربعا من أجل $m=2$.

ملاحظة : توجد طرق أخرى باستعمال شروط أخرى حتى يكون $ABCD$ مربعا .

مثلا : يكون الرباعي $ABCD$ مربعا إذا كان متوازي أضلاع وفيه ضلعين متتابعين متعامدين ومتقايسين .

التمرين 2 :

1 حساب u_1 ، u_2 و u_3 :

$u_1=\frac{7}{3}$ ، $u_2=\frac{23}{9}$ و $u_3=\frac{73}{27}$

2 البرهان بالتراجع أن (v_n) متتالية ثابتة :

تذكير : [المتتالية(v_n) ثابتة] يكافئ [من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}-v_n=0$]

نسمي p_n الخاصية " $v_{n+1}-v_n=0$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $v_0=u_0+\left(\frac{2}{3}\right)^0=2+1=3$ و $v_1=u_1+\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{7}{3}+\frac{2}{3}=\frac{9}{3}=3$

من أجل $n=0$: $v_1-v_0=3-3=0$ وهي محققة. إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $v_{n+1}-v_n=0$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $v_{n+2}-v_{n+1}=0$

لدينا : $v_{n+2}=u_{n+2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$ و $v_{n+1}=u_{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

ومنه :
$$\begin{aligned}v_{n+2}-v_{n+1}&=\left[u_{n+2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\right]-\left[u_{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]\\&=\left[\frac{2}{3}u_{n+1}+1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\right]-\left[\frac{2}{3}u_n+1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]\\&=\frac{2}{3}\left[u_{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]-\frac{2}{3}\left[u_n+\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right]\\&=\frac{2}{3}v_{n+1}-\frac{2}{3}v_n=\frac{2}{3}\left(v_{n+1}-v_n\right)\end{aligned}$$

ومن فرضية التراجع : $v_{n+1}-v_n=0$ وبالتالي : $v_{n+2}-v_{n+1}=\frac{2}{3}\times 0=0$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=v_n$ وبالتالي فإن المتتالية (v_n) ثابتة

• استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

بما أن المتتالية (v_n) ثابتة فإن $v_n=v_{n-1}=\cdots=v_1=v_0=3$

من العلاقة : $v_n=u_n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$ نستنتج أن : $u_n=v_n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$ إذن : $u_n=3-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

• حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

تذكير : إذا كان $-1<q<+1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$ وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$

3 حساب المجموع S :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n=\frac{2}{3}n-\left(\frac{2}{3}\right)^n=x_n+y_n$ حيث :

• $x_n=\frac{2}{3}n$ ، (x_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{2}{3}$ وحدّها الأول $x_0=0$

• $y_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ، (y_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ وحدّها الأول $y_0=-1$

وبالتالي فإن المجموع S هو مجموع مجموعين (مجموع حدود متتالية حسابية + مجموع حدود متتالية هندسية)

إذن : $S=\frac{n(n+1)}{3}+3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1\right]$

التمرين 3 :

1 إثبات أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي :

$\vec{u}\left(1;\frac{1}{2};-2\right)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و $\vec{u'}(1;-2;1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ') . الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطيا (لا يوجد عدد حقيقي t بحيث $\vec{u'}=t\,\vec{u}$)

نستنتج أن المستقيمين (Δ) و (Δ') إما من نفس المستوي ومتقاطعان ، وإما ليسا من نفس المستوي . لنبيّن أن المستقيمين (Δ) و (Δ') غير متقاطعين :

للبحث عن نقط تقاطع (Δ) و (Δ') نقوم بحل الجملة :
$$\begin{cases}3+\lambda=6+\alpha\\ 2+\frac{1}{2}\lambda=1-2\alpha\\ -2-2\lambda=5+\alpha\end{cases}$$

من المعادلة الأولى والثانية نجد : $(\alpha;\lambda)=(-1;2)$ وبالتعويض في المعادلة الثالثة نحصل على المساواة : $-6=4$ وهذا مستحيل .

نستنتج أن المستقيمين (Δ) و (Δ') غير متقاطعين .

إذن : المستقيمان (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي .

② M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (Δ') .

أ- تعيين إحداثيات النقطتين M و N :

لدينا : $\overrightarrow{MN}\left(\alpha-\lambda+3;-2\alpha-\frac{1}{2}\lambda-1;\alpha+2\lambda+7\right)$

$[(MN)\perp(\Delta)]$ يكافئ $[\ \overrightarrow{MN}.\vec{u}=0\ ]$ ومنه : $8\alpha+21\lambda+46=0$

$[(MN)\perp(\Delta')]$ يكافئ $[\ \overrightarrow{MN}.\vec{u'}=0\ ]$ ومنه : $3\alpha+\lambda+6=0$

وبحل الجملة : $\begin{cases}8\alpha+21\lambda+46=0\\3\alpha+\lambda+6=0\end{cases}$ نجد : $\lambda=-\frac{18}{11}$ و $\alpha=-\frac{16}{11}$

نستنتج أن : $M\left(\frac{15}{11};\frac{13}{11};\frac{14}{11}\right)$ و $N\left(\frac{50}{11};\frac{43}{11};\frac{39}{11}\right)$

ب- حساب الطول MN :

تذكير : $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

$$MN=\sqrt{\frac{2725}{121}}=\frac{5\sqrt{110}}{11}$$

③ تعيين معادلة للمستوي (P) :

الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ هما شعاعان مستقلان خطيا و هما شعاعا توجيه للمستوي (P)

- إذا كان $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P) فإن : $\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{n}\\\vec{u'}\perp\vec{n}\end{cases}$

ومنه : $\begin{cases}\vec{u}.\vec{n}=0\\\vec{u'}.\vec{n}=0\end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases}a+\frac{1}{2}b-2c=0\\a-2b+c=0\end{cases}$

وبحل هذه الجملة مع فرض $c=5$ نحصل على $\vec{n}(7;6;5)$

تكون عندئذ معادلة المستوي (P) من الشكل $7x+6y+5z+d=0$

ولدينا : $A(3;2;-2)\in(\Delta)$ نستنتج أن : $A(3;2;-2)\in(P)$

وبالتالي : $7\times3+6\times2+5\times(-2)+d=0$ ومنه : $d=-23$

إذن : معادلة المستوي (P) هي $7x+6y+5z-23=0$

④ حساب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') و المستوي (P) :

تذكير : المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0;y_0;z_0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A;(P))$ حيث :

$$\boxed{d(A;(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

إذن : $d=\dfrac{|7(6+\alpha)+6(1-2\alpha)+5(5+\alpha)-23|}{\sqrt{7^2+6^2+5^2}}=\dfrac{50}{\sqrt{110}}\times\dfrac{\sqrt{110}}{\sqrt{110}}=\dfrac{5\sqrt{110}}{11}$

نلاحظ أن : $d=MN$

التمرين 4 :

الجزء I :

① دراسة تغيرات الدالة f :

- مجموعة التعريف : الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$

- النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- المشتقة : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=1-\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

- إشارة المشتقة : $[\ f'(x)=0\ ]$ يكافئ $[\ e^x-1=0\ ]$ ومنه : $x=0$ و $f(0)=1$

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x)>0$

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

② تبيان أن C_f يقبل نقطة انعطاف ω :

تذكير : إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على مجال مفتوح يشمل x_0 وإذا انعدمت دالتها المشتقة الثانية من أجل x_0 مغيرة إشارتها فإن النقطة $M_0(x_0\,;f(x_0))$ هي نقطة انعطاف للمنحني الممثل للدالة f .

لدينا : $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ ومنه : $f''(x)=\dfrac{4e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$

الدالة f'' تنعدم من أجل $x_0=0$ مغيرة إشارتها نستنتج أن النقطة $\omega(0\,;f(0))$

أي : $\omega(0\,;1)$ هي نقطة انعطاف للمنحني C_f .

• كتابة معادلة لمماس C_f عند النقطة ω :

تذكير : معادلة المماس عند النقطة $A(\,x_0\,;\,f(x_0)\,)$ من الشكل :

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

إذن : معادلة لمماس C_f عند النقطة ω هي : $y=1$

• إثبات أن ω مركز تناظر للمنحني C_f :

تذكير : تكون النقطة $\omega(\alpha\,;\beta)$ مركز تناظر للمنحني C_f إذا وفقط إذا كان :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $2\alpha-x\in\mathbb{R}$ و $f(x)+f(2\alpha-x)=2\beta$

وعليه : تكون $\omega(0\,;1)$ مركز تناظر للمنحني C_f إذا وفقط إذا كان :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$ و $f(x)+f(-x)=2$

واضح أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$ و $f(x)+f(-x)=\dots=2$

إذن : $\omega(0\,;1)$ مركز تناظر للمنحني C_f .

③ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{e^x+1}=0$

• حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]$: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{4}{e^x+1}-4\right]=0$

• الاستنتاج :

تذكير : إذا كانت f دالة حيث $f(x)=ax+b+g(x)$ وكانت $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$

فإن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f .

(نفس الملاحظة لما يؤول x إلى $-\infty$)

نستنتج أن C_f يقبل مستقيمين مقاربين معادلتاهما $y=x-1$ و $y=x+3$

④ تبيان أن C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2.77\,;-2.76[$:

تذكير بمبرهنة القيم المتوسطة : إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a\,;b]$

وكان $f(a)\times f(b)<0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b

بحيث $f(c)=0$.

وإذا كانت الدالة f رتيبة تماما على المجال $[a\,;b]$ يكون العدد c وحيدا .

f مستمرة ومتزايدة تماما على $[-2.77;-2.76]$ و $f(-2.77)\times f(-2.76)<0$

نستنتج أن المنحني C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 .

• حساب $f(1)$ و $f(-1)$: $f(1)=1.08$ و $f(-1)=0.92$

• الرسم : انظر الشكل

الجزء II :

① تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x)=f(-x)$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(-x)=-x-1+\frac{4}{e^{-x}+1}=-x-1+\frac{4}{\frac{1}{e^{x}}+1}$$

$$=-x-1+\frac{4}{\frac{1+e^{x}}{e^{x}}}=-x-1+4\times\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$$

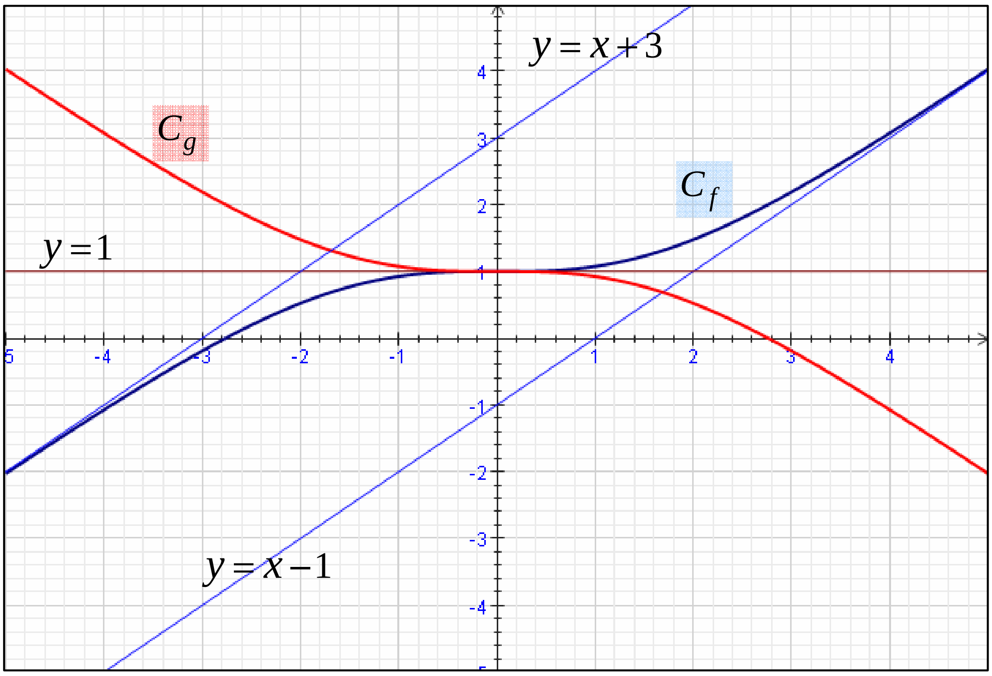
$$=-x-1+\frac{4e^{x}}{e^{x}+1}=g(x)$$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x)=f(-x)$

• الاستنتاج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول C_f إلى C_g .

من السؤال السابق نستنتج أن المنحني C_g هو صورة المنحني C_f بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب .

② رسم المنحني C_g : انظر الشكل



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2012

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $z^2-\sqrt{2}z+1=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=z_A+z_B$.

أ- اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة: z_A، z_B و $\frac{z_A}{z_B}$.

ب- عيّن لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

جـ- بيّن أن الرباعي $OA'C'B'$ مربع.

3) نسمي (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|z-z_A|=|z-z_B|$.

أ- بيِّن أن (Δ) هو محور الفواصل.

ب- بيِّن أن حلي المعادلة: $\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2=i$ عددان حقيقيان. (لا يطلب حساب الحلين)

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $2011x-1432y=31\ ...\ (1)$.

أ- أثبت أن العدد 2011 أولي.

ب- باستعمال خوارزمية إقليدس، عيّن حلا خاصا $\left(x_0;y_0\right)$ للمعادلة (1)، ثم حل المعادلة (1).

2) أ- عيّن، حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7.

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $2010^n+2011^n+1432^n\equiv 0[7]$.

3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث: α، β، γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (1).

عيّن α ، β و γ، ثم اكتب N في النظام العشري.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، النقط $A(3;0;0)$، $B(0;4;0)$ و $C(2;2;2)$.

1) بيِّن أن النقط A، B، C ليست في استقامية وأن الشعاع $\vec{n}(4;3;-1)$ عمودي على كل من الشعاعين: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقط A، B، C.

3) أ- بيِّن أنّ: $6x-8y+7=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P') مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $AM=BM$.

ب- بيِّن أنّ: $2x-4y-4z+3=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P'') مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $AM=CM$.

جـ- بيِّن أن (P') و (P'') يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

4) احسب إحداثيات النقطة ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2-xe^{x}$.

1) ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بيِّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$، ثم تحقق أن: $0,8<\alpha<0,9$.

3) عيِّن، حسب قيم x، إشارة $g(x)$.

II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x+2}{e^{x}+2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، (وحدة الطول $2cm$).

1) بيِّن أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

2) أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب- بيِّن أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

3) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ') و (Δ)، حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

4) أ- بيِّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{\left(e^{x}+2\right)^{2}}$، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

ب- بيِّن أن : $f(\alpha)=\alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

5- ارسم (Δ) ، (Δ') و (C_f).

6- ناقش، بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.

III) (U_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}=f(U_n)$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le U_n<\alpha$.

2) باستعمال (Δ) و (C_f) مثّل على محور الفواصل الحدود: U_0 ، U_1 و U_2، ثم خمّن اتجاه تغير (U_n).

3) برهن أن المتتالية (U_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$.

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، النقط A، B، C و D التي لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-2i$ و $z_D=\overline{z_C}$.

– بيّن أن النقط A، B، C و D تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها، ثم أنشئ النقط A، B، C و D.

3) نرمز بِـــ z_E إلى لاحقة النقطة E نظيرة النقطة B بالنسبة إلى المبدأ O .

أ– بيّن أن: $\dfrac{z_A-z_C}{z_E-z_C}=e^{i(-\frac{\pi}{3})}$.

ب– بيّن أن النقطة A هي صورة النقطة E بدوران R مركزه C يطلب تعيين زاويته.

جـ– استنتج طبيعة المثلث AEC.

د– H هو التحاكي الذي مركزه O ونسبته 2.

– عيّن طبيعة التحويل RoH وعناصره المميزة، ثم استنتج صورة الدائرة (γ) بالتحويل RoH.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، النقط $A(1;1;1)$، $B(1;-1;0)$ و $C(2;0;1)$.

1) بيّن أن النقط A ، B و C تعين مستويا (P_1) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

2) (P_2) المستوي الذي: $x-2y-2z+6=0$ معادلة ديكارتية له.

– بيّن أن (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

3) بيّن أن النقطة O هي مرجح الجملة: $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$.

4) أ– عيّن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{3}$.

ب– احسب إحداثيات D و E نقطتي تقاطع (S) و (Δ).

جـ– ما هي طبيعة المثلث ODE؟ ثم استنتج المسافة بين O و (Δ).

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 16$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 6u_n - 9$.

1) أ- احسب بواقي قسمة كل من الحدود u_0 ، u_1، u_2، u_3، u_4 على 7 .

ب- خمّن قيمة للعدد a وقيمة للعدد b بحيث: $u_{2k} \equiv a[7]$ و $u_{2k+1} \equiv b\,[7]$.

2) أ- برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+2} \equiv u_n\,[7]$.

ب- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k} \equiv 2\,[7]$، ثم استنتج أن: $u_{2k+1} \equiv 3\,[7]$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n - \frac{9}{5}$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- احسب، بدلالة n، كلا من u_n و S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) g هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; 3]$ كما يلي : $g(x) = 2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$.

1) ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكّل جدول تغيراتها.

2) بيّن أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقق: $-0{,}8 < \alpha < -0{,}7$.

3) عيّن، حسب قيم x، إشارة $g(x)$.

4) h هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; 3]$ بـ: $h(x) = [g(x)]^2$.

أ- احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

ب- عيّن إشارة $h'(x)$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة h .

II) f هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; 3]$ كما يلي: $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x+1)} \ ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند الصفر، ثم اكتب معادلة لِـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $]-1;0[\cup]0; 3]$ ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب- بيّن أن : $f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1)$ ، ثم عيّن حصرا لِـ $f(\alpha)$.

جـ- احسب $f(3)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ- بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]-1; 3]$ فإن: $x - \ln(x+1) \geq 0$.

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T).

4) عيّن معادلة للمستقيم (T') الموازي للمماس (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3 .

5) ارسم (T) ، (T') و (C_f).

6) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.

تصحيح اختبار مادة الرياضيات شعبة رياضيات : بكالوريا 2012

الموضوع الأول

التمرين الأول

1) لدينا $\Delta=\left(-\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times1=-2=\left(i\sqrt{2}\right)^2$ ومنه

$$z_1=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad z_2=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

2) **لدينا** $z_A=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad z_B=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ و $z_C=z_A+z_B=\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\frac{1-i}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

أ- $\boxed{z_A=e^{i\frac{\pi}{4}}},\quad \boxed{z_B=e^{-i\frac{\pi}{4}}}$ و $\boxed{\frac{z_A}{z_B}=\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{2}}}$

ب - **العبارة المركبة للدوران الذي مركزه** O وزاويته $\frac{\pi}{4}$ هي $z'=e^{i\frac{\pi}{4}}z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}z$ وعليه

$z_{A'}=e^{i\frac{\pi}{4}}z_A=e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{2}}\boxed{=i}$ و $z_{B'}=e^{i\frac{\pi}{4}}z_B=e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{-i\frac{\pi}{4}}=e^0=1$ و

$$z_{C'}=e^{i\frac{\pi}{4}}z_C=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}=\boxed{1+i}$$

جـ- لدينا $z_{C'}-z_{B'}=1+i-1=i=z_{A'}-z_O$ ومنه $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{B'C'}$ وهذا يعني أن الرباعي $OA'C'B'$ متوازي أضلاع كما أن $\frac{z_{A'}-z_O}{z_{B'}-z_O}=\frac{i-0}{1-0}=i$ وعليه $\left|\frac{z_{A'}-z_O}{z_{B'}-z_O}\right|=|i|=1$ و $arg\left(\frac{z_{A'}-z_O}{z_{B'}-z_O}\right)=arg(i)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ أي أن $OA'=OB'$ و $\left(\overrightarrow{OB'},\overrightarrow{OA'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

وعليه $OA'C'B'$ متوازي أضلاع فيه ضلعان متتاليان متقايسان وفيه زاوية قائمة فهو إذن مربع . يمكن أن نثبت كذلك أنه متوازي أضلاع قطراه متعامدان ومتناصفان .

طبعا يمكن أن يكون الإثبات باستعمال تقايس الأشعة والجداء السلمي .

3) أ- $|z-z_A|=|z-z_B|$ معناه $\left|x+iy-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right|=\left|x+iy-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right|$ أي أن

$$\left|\frac{\sqrt{2}(x+iy)-1-i}{\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{\sqrt{2}(x+iy)-1+i}{\sqrt{2}}\right|$$ وعليه

أي $\left|\sqrt{2}(x+iy)-1-i\right|=\left|\sqrt{2}(x+iy)-1+i\right|$

وبالتالي $\left|\sqrt{2}x-1+i\left(\sqrt{2}y-1\right)\right|=\left|\sqrt{2}x-1+i\left(\sqrt{2}y+1\right)\right|$

$\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+\left(\sqrt{2}y-1\right)^2=\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+\left(\sqrt{2}y+1\right)^2$ **أي أن** $\left(\sqrt{2}y-1\right)^2=\left(\sqrt{2}y+1\right)^2$

ومنه $\left(\sqrt{2}y-1\right)^2-\left(\sqrt{2}y+1\right)^2=0$ وبالتالي

$\left[\left(\sqrt{2}y-1\right)-\left(\sqrt{2}y+1\right)\right]\left[\left(\sqrt{2}y-1\right)+\left(\sqrt{2}y+1\right)\right]=0$ أي أن $-2\sqrt{2}y=0$ ومنه $y=0$

وهذا يعني أن (Δ) هو محور الفواصل.

ب- إذا كان $z=x+iy$ حلا للمعادلة $\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2=i$ **فإن** z **يحقق** $\left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|^2=|i|=1$ **أي** $|z-z_A|=|z-z_B|$ **وحسب السؤال 3)أ- نجد أن** $y=0$ ($Im\,z=0$) **ومنه** z **عدد حقيقي .**

<u>التمرين الثاني</u>

1) أ- لدينا $\sqrt{2011}\approx 44.844$ الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{2011}$ هي

43,41,37,31,29,23,19,17,13,11,7,5,3,2

واضح أن 2011 **لايقبل القسمة عل كل من 2 ، 3 و5 كما أن**

بقسمة 2011 على	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
يكون الباقي هو	2	9	9	5	16	10	10	27	13	2	33

ومنه 2011 **لا يقبل القسمة على كل من الأعداد** ***43,41,37,31,29,23,19,17,13,11,7,5,3,2*** **ومنه** 2011 **عدد أولي** .

ب- لدينا $2011=1432+579$ ، $1432=2\times 579+274$ ، $579=2\times 274+31$

أي $579=2011-1432$ ، $274=1432-2\times 579$ ، $31=579-2\times 274=579-2\times\left(1432-2\times 579\right)$

$$31=579-2\times 1432+4\times 579$$
$$=5\times 579-2\times 1432$$

ومنه $=5\times\left(2011-1432\right)-2\times 1432$

$$=5\times 2011-5\times 1432-2\times 1432$$
$$=5\times 2011-7\times 1432$$

أي أن $31=7\times 1432-5\times 2011$ **وهذا يعني أن** $(5;7)$ حل خاص للمعادلة (1) .

لدينا $\begin{cases}2011x-1432y=31\\ 2011\times 5-1432\times 7=31\end{cases}$ **ومنه** $2011(x-5)=1432(y-7)\cdots(*)$ **لدينا** 1432 يقسم $2011(x-5)$ **ولكن** 1432 **أولي مع** 2011 (**لأن** 2011 أولي فهو أولي مع كل عدد طبيعي ليس مضاعفا له وواضح أن 1432 **ليس مضاعفا لـ** 2011) **إذن حسب مبرهنة غوص** 1432 **يقسم** $x-5$ أي أنه يوجد عدد صحيح k **حيث** $x-5=1432k\cdots(**)$ **بتعويض** $(**)$ في $(*)$ **نجد أن** $y-7=2011k$ **أي أن حلول** المعادلة (1) **هي الثنائيات** $\left(1432k+5;\,2011k+7\right)$ **مع** $k\in\mathbb{Z}$.

2) أ- لدينا $2^1 \equiv 2[7]$, $2^2 \equiv 4[7]$, $2^3 \equiv 1[7]$ **ومنه** $\boxed{2^{3p} \equiv 1[7]}$ **حيث** $p \in \mathbb{N}$.

$\begin{cases} 2^{3p} \equiv 1[7] \\ 2^1 \equiv 2[7] \end{cases}$ **معناه** $\boxed{2^{3p+1} \equiv 2[7]}$ ، $\begin{cases} 2^{3p} \equiv 1[7] \\ 2^2 \equiv 4[7] \end{cases}$ **معناه** $\boxed{2^{3p+2} \equiv 4[7]}$ ، **وعليه**

إذا كان $n =$	$3p$	$3p+1$	$3p+2$
فإن باقي قسمة 2^n **على** 7 **هو**	1	2	4

لدينا $2011 = 7 \times 287 + 2$ **ومنه** $2011 \equiv 2[7]$ **ولدينا أيضا** $1432 \equiv 1[3]$ أي $1432^{2012} \equiv 1[3]$ **بعبارة أخرى** $1432^{2012} = 3q + 1$, $q \in \mathbb{N}$ **ومنه** $2011^{1432^{2012}} \equiv 2^{3q+1}[7]$ **ومما سبق** $2^{3p+1} \equiv 2[7]$ **أي أن** $2011^{1432^{2012}} \equiv 2[7]$ **ولكون** $0 \le 2 < 7$ **فإن باقي قسمة** $2011^{1432^{2012}}$ **على** 7 **هو** 2 .

ب- لدينا $\begin{cases} 2010 \equiv 1[7] \\ 2011 \equiv 2[7] \\ 1432 \equiv 4[7] \end{cases}$ **ومنه** $\begin{cases} 2010^n \equiv 1[7] \\ 2011^n \equiv 2^n[7] \\ 1432^n \equiv 4^n[7] \end{cases}$ **إذن** $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 1 + 2^n + 4^n [7]$

بما أن $4^n = 2^n \times 2^n$ **فإن :**

إذا كان $n = 3p$ **فإن** $1 + 2^n + 4^n \equiv 1+1+1[7]$ **وعليه** $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 3[7]$.

إذا كان $n = 3p+1$ **فإن** $1 + 2^n + 4^n \equiv 1+2+4[7]$ **وعليه** $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$.

إذا كان $n = 3p+2$ **فإن** $1 + 2^n + 4^n \equiv 1+4+16[7]$ **وعليه** $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$.

وعليه : قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$ **هي** $n = 3p+1$ **و** $n = 3p+2$ **حيث** $p \in \mathbb{N}$ **، أي هي كل الأعداد الطبيعية باستثناء مضاعفات 3 ، بعبارة أخرى هي المجموعة** $\mathbb{N} - 3\mathbb{N}$.

3)لدينا $N = \overline{2\gamma\alpha\beta}^{9} = 2 \times 9^3 + \gamma \times 9^2 + \alpha \times 9 + \beta$ **أي** $N = 1458 + 81\gamma + 9\alpha + \beta$

ولدينا $\begin{cases} 2\beta = \alpha + \gamma \\ (\beta; \gamma) = (1432k + 5; 2011k + 7) \\ 0 \le \alpha < 9, 0 \le \beta < 9, 0 \le \gamma < 9, \end{cases}$ **أي أن** $(\alpha; \beta; \gamma) = (3; 5; 7)$ **ويكون** $N = 2057$.

ملاحظة1 : من المفروض أن تكون المعطيات كما يلي $N = \overline{2\beta\gamma\alpha}^{9}$ **و** $(\alpha; \gamma)$ حل للمعادلة (1) **و** γ, β, α **بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية عندها يكون** $(\alpha; \beta; \gamma) = (5; 6; 7)$ **ونجد** $N = 2012$ **، وهذا مايعطي نسقا جماليا للتمرين . (يظهر أن هناك خطأ مطبعيا لكنه لايؤثر بأي شكل على المضمون الرياضياتي للسؤال) .**

ملاحظة2 : الجملة " متزايدة تماما " لا تمثل أي إضافة إلى المعطيات بل كان ينبغي إسقاطها .

ملاحظة 3 : الجملة " γ, β, α **بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما " مبهمة فهي تحتمل كون** $\alpha < \beta < \gamma$ **لمن يقرأ الرموز بالعربية و تحتمل** $\gamma < \beta < \alpha$ **لمن يقرأ بالفرنسية .**

التمرين الثالث :

1)لدينا $\overrightarrow{AB}(-3;4;0)$, $\overrightarrow{AC}(-1;2;2)$ نلاحظ أن $\frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}}=\frac{4}{2}=2 \neq 3=\frac{-3}{-1}=\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}}$ وهذا يعني أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ **غير مرتبطين خطيا ومنه النقط** A, B و C ليست في استقامية .

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=4\times(-3)+3\times 4+(-1)\times 0=-12+12=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=4\times(-1)+3\times 2+(-1)\times 2=-4+6-2=0$ ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

2)بما أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ **غير مرتبطين خطيا و الشعاع** $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ **فإن** $\vec{n}$ **شعاع ناظمي للمستوي** (P) وتكون معادلة له هي $4x+3y-z+d=0$ **مع** $d\in\mathbb{R}$ **. ولكون** $A\in(P)$ **فإن** $4\times3+3\times0-0+d=0$ **أي** $d=-12$ **ومنه معادلة ديكارتية للمستوي** (P) **هي** $\boxed{4x+3y-z-12=0}$.

3)أ- $M(x;y;z)\in(P')$ تكافيء $AM=BM$ **معناه** $AM^2=BM^2$ **أي** $(x-3)^2+y^2+z^2=x^2+(y-4)^2+z^2$ **وبالتالي** $x^2-6x+9+y^2=x^2+y^2-8y+16$ **وعليه** $6x-8y+7=0$ **وهي معادلة للمستوي** (P')**.**

ب- $M(x;y;z)\in(P'')$ تكافيء $AM=CM$ **معناه** $AM^2=CM^2$ **أي** $(x-3)^2+y^2+z^2=(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2$**وبالتالي**

$x^2-6x+9+y^2+z^2=x^2-4x+4+y^2-4y+4+z^2-4z+4$ **وعليه** $2x-4y-4z+3=0$

وهي معادلة للمستوي (P'')**.**

جـ- $M(x;y;z)\in(P')\cap(P'')$ **معناه** $\begin{cases}6x-8y+7=0\\2x-4y-4z+3=0\end{cases}$ **ومنه** $\begin{cases}6x-8y=-7\\2x-4y=4t-3\\z=t\end{cases}$ **بحل هذه الجملة نجد أن** $t\in\mathbb{R}$, $\begin{cases}x=-4t-\frac{1}{2}\\y=-3t+\frac{1}{2}\\z=t\end{cases}$**وهو تمثيل وسيطي للمستقيم** (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P') و (P'') .

4)الدائرة المحيطة بالمثلث ABC محتواة في المستوي (P) **وهذا يعني أن مركزها** ω **ينتمي إلى** (P) **، ومن جهة أخرى لدينا** $\omega A=\omega B=\omega C$ وهذا يعني أن $\omega\in(P')\cap(P'')$ **أي أن** $\omega\in(\Delta)$ **، إذن** $\omega\in(\Delta)\cap(P)$

لتكن $(x_0;y_0;z_0)$ إحداثيات ω **عندئذ :** $t\in\mathbb{R}$, $\begin{cases}x_0=-4t-\frac{1}{2}\\y_0=-3t+\frac{1}{2}\\z_0=t\\4x_0+3y_0-z_0-12=0\end{cases}$ **ومنه**

$4\left(-4t-\frac{1}{2}\right)+3\left(-3t+\frac{1}{2}\right)-t-12=0$ وبالتالي $-26t-\frac{25}{2}=0$ إذن $t=-\frac{25}{52}$ أي أن

$$\omega\left(\frac{37}{26};\frac{101}{52};-\frac{25}{52}\right)$$

التمرين الرابع : I)

1)من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $g'(x)=-e^x-xe^x=-(1+x)e^x$ **ومنه**

$g'(x)>0$ **معناه** $x<-1$ **والدالة** g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$

$g'(x)<0$ **معناه** $x>-1$ **والدالة** g متناقصة تماما على المجال $[-1;+\infty[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\nearrow$	$2+\frac{1}{e}$	$\searrow$	$-\infty$

2)من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أنه على المجال $]-\infty;-1]$ **تكون** $2<g(x)\le 2+\frac{1}{e}$ **وعليه** $g(x)=0$ **لا تقبل حلا على هذا المجال . على المجال** $[-1;+\infty[$ **الدالة** g **مستمرة ورتيبة تماما ولدينا** $g(-1)=2+\frac{1}{e}$ **و** $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ **مما** يعني (حسب مبرهنة القيم المتوسطة) أن المعادلة $g(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α **على هذا المجال وبالتالي على** $\mathbb{R}$. **باستعمال حاسبة نجد أن** $g(0.8)\times g(0.9)\simeq 0.22\times(-0.21)<0$ **وعليه** $0.8<\alpha<0.9$.

3)

x	$-\infty$		α		
إشارة $g(x)$		$+$	0	$-$	

II (1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}+\frac{2}{x}}=0$ ، **لأن** $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ **و** $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ **هندسيا**

تعني هذه النتيجة أن المستقيم الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) .

2)أ- لدينا $\lim_{x\to-\infty}2x+2=-\infty$ **و** $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ **ومنه** $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

ب- $f(x)-(x+1)=\dfrac{2x+2}{e^{x}+2}-(x+1)=\dfrac{2x+2-xe^{x}-2x-e^{x}-2}{e^{x}+2}=\dfrac{-xe^{x}-e^{x}}{e^{x}+2}$ وبما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=0$ وهذا يعني أن المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحني (C_f).

3)وجدنا أن $f(x)-(x+1)=\dfrac{-xe^{x}-e^{x}}{e^{x}+2}=-\dfrac{(x+1)e^{x}}{e^{x}+2}$ ومنه نستنتج أن

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
إشارة $f(x)-(x+1)$		$+$	0	$-$	

وعليه على المجال $]-\infty;-1[$ يكون (C_f) فوق (Δ').

على المجال $]-1;+\infty[$ يكون (C_f) تحت (Δ').

(C_f) و (Δ') يتقاطعان في النقة ذات الإحداثيين $(-1;0)$.

لدينا $f(x)-x=\dfrac{2-xe^{x}}{e^{x}+2}=\dfrac{g(x)}{e^{x}+2}$ ومن إشارة $g(x)$ المعينة سابقا نستنتج أن (C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $]-\infty;\alpha[$ ويقع تحت (Δ) على المجال $]\alpha;+\infty[$. (C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقة ذات الإحداثيين $(\alpha;\alpha)$

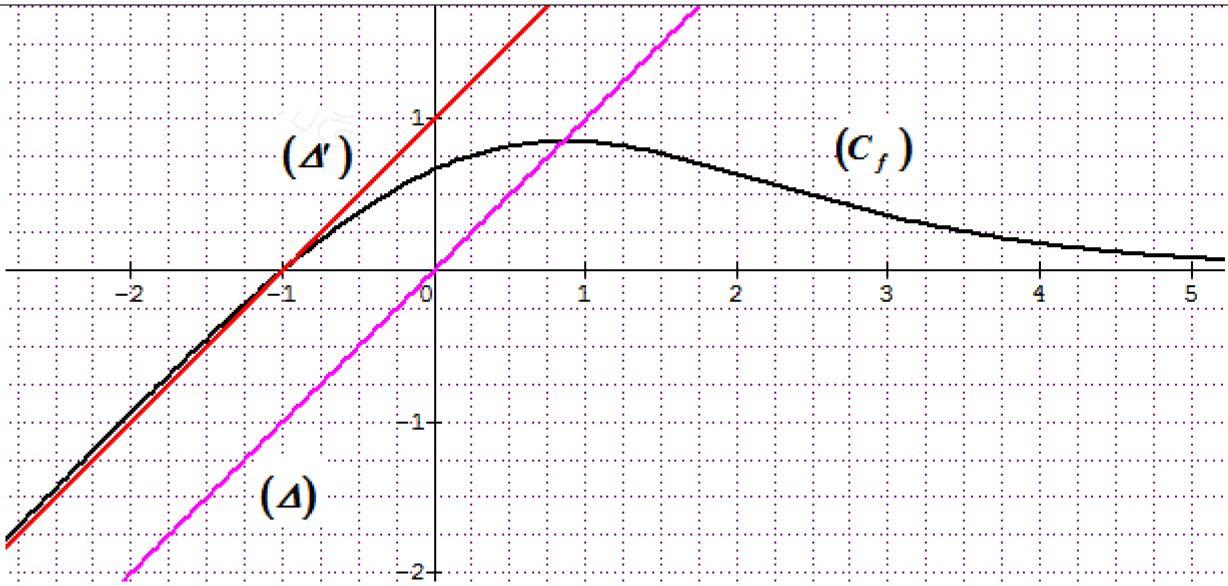
4)أ- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x)=\dfrac{2(e^{x}+2)-e^{x}(2x+2)}{(e^{x}+2)^{2}}=\dfrac{2e^{x}+4-2xe^{x}-2e^{x}}{(e^{x}+2)^{2}}$ أي أن $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{(e^{x}+2)^{2}}$ وعليه تكون إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$. ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

ب- لدينا $g(\alpha)=2-\alpha e^{\alpha}=0$ ومنه $e^{\alpha}=\dfrac{2}{\alpha}$ وعليه يكون $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha+2}{e^{\alpha}+2}=\dfrac{2\alpha+2}{\frac{2}{\alpha}+2}=\alpha$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	α	↘	0

5)

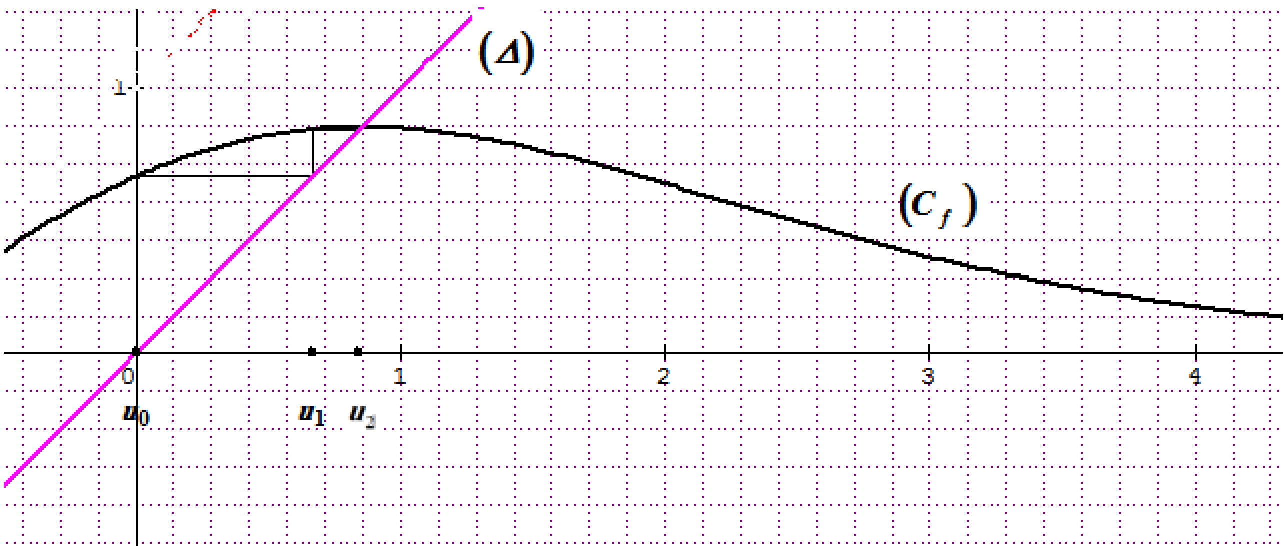


6) $f(x)=f(m)$ معناه $\begin{cases} y=f(x) \\ y=f(m) \end{cases}$ ومنه حلول المعادلة المعطاة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (d_m) الموازي لحامل محور التراتيب و الذي معادلة له $y=f(m)$. من جدول التغيرات ومن البيان نلاحظ أن
إذا كان $m\in]-\infty;-1]$ فإن $f(m)\in]-\infty;0]$ ، عندها المستقيم (d_m) يقطع (C_f) في نقطة واحدة وبالتالي المعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلا وحيدا في هذه الحالة .
إذا كان $m\in]-1;\alpha[$ فإن $f(m)\in]0;\alpha[$ ، والمعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلين متمايزين .
إذا كان $m=\alpha$ فإن $f(m)=f(\alpha)=\alpha$ والمعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلا مضاعفا ((d_α) مماس لـ (C_f))
إذا كان $m\in]\alpha;+\infty[$ فإن $f(m)\in]0;\alpha[$ ، والمعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلين متمايزين.

III)

1)لنثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le U_n<\alpha$
لدينا $0\le U_0=0<\alpha$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n=0$ ، نفرض الآن أن الخاصية $0\le U_n<\alpha$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n ، ونبرهن أن $0\le U_{n+1}<\alpha$. بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و $0\le U_n<\alpha$ فإن $f(0)\le f(U_n)<f(\alpha)$ أي أن $0\le \frac{2}{3}=f(0)\le U_{n+1}=f(U_n)<f(\alpha)=\alpha$ وبالتالي $0\le U_{n+1}<\alpha$
إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le U_n<\alpha$.

2)



من الشكل يظهر أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما .

3) من السؤال II (3) وجدنا أن $f\left(x\right)-x=\dfrac{g\left(x\right)}{e^{x}+2}$ وعليه

$$U_{n+1}-U_n=f\left(U_n\right)-U_n=\dfrac{g\left(U_n\right)}{U_n+2}$$

ومن إشارة $g\left(x\right)$ المعينة من السؤال I (3) ولكون $0\leq U_n<\alpha$ نستنتج أن $U_{n+1}-U_n>0$ وعليه المتتالية $\left(U_n\right)$ متزايدة تماما ، من جهة أخرى المتتالية $\left(U_n\right)$ محدودة من الأعلى بالعدد α إذن فهي متقاربة .

لتكن ℓ هي نهاية المتتالية $\left(U_n\right)$ ، لدينا $\lim U_{n+1}=\lim U_n=\ell$ ومنه $\ell-\ell=\dfrac{g\left(\ell\right)}{e^{\ell}+2}$ أي $g\left(\ell\right)=0$ ومن السؤال I (2) نجد أن $\ell=\alpha$.

المتتالية $\left(U_n\right)$ متقاربة نحو α .

تصحيح اختبار مادة الرياضيات شعبة رياضيات : بكالوريا 2012

الموضوع الثاني

التمرين الأول

1) $(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$ معناه $z^2+4=0$ أو $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

بالنسبة للمعادلة $z^2+4=0$ واضح أنها تقبل حلين هما $z_1=2i$ ، $z_2=-2i$

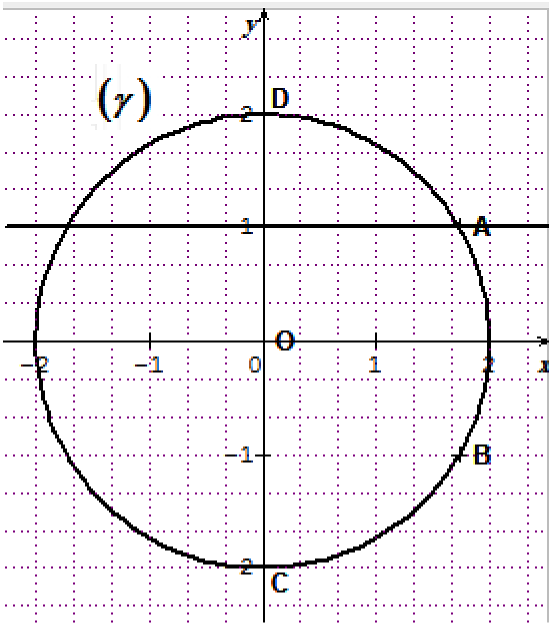
بالنسبة للمعادلة $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ ، نحسب المميز لدينا $\Delta=(-2\sqrt{3})^2-4\times1\times4=-4=(2i)^2$ ومنه

$z_3=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i$ ، $z_4=\frac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i$ ومنه

حلول المعادلة المعطاة هي $2i$ ، $-2i$ و $\sqrt{3}+i$ ، $\sqrt{3}-i$

2) **لدينا** $|z_A|=|\sqrt{3}+i|=2$ ، $|z_B|=|\overline{z_A}|=2$ و $|z_C|=|-2i|=2$ ، $|z_D|=|\overline{z_C}|=2$

إذن $|z_A|=|z_B|=|z_C|=|z_D|=2$ ومنه $OA=OB=OC=OD=2$ ، **إذن النقط** A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) التي مركزها O ونصف قطرها 2 .



لإنشاء النقطة A نرسم الدائرة (γ) والمستقيم الذي معادلة له $y=1$ عندئذ A **هي نقطة التقاطع التي فاصلتها موجبة .**

النقطة B **هي نظيرة** A **بالنسبة إلى حامل محور الفواصل .**

النقطتان C و D إحداثياتهما على الترتيب $(0;-2),(0;2)$.

3)أ- لدينا $\frac{z_A-z_C}{z_E-z_C}=\frac{\sqrt{3}+i+2i}{-\sqrt{3}+i+2i}=\frac{\sqrt{3}+3i}{-\sqrt{3}+3i}=\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

ب- من السؤال السابق نجد $(z_E-z_C)e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=z_A-z_C$ **وهذا يعني أن النقطة** A **هي صورة النقطة** E **بالدوران الذي مركزه** C وزاويته $-\frac{\pi}{3}$) **عبارته** $(z+2i)e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=z'+2i$ أو $z'=\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)z+\sqrt{3}-i$

جـ- من $\frac{z_A-z_C}{z_E-z_C}=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$ **نستنتج أن** $\left|\frac{z_A-z_C}{z_E-z_C}\right|=\left|e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right|=1$ و

ومنه $arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C}\right) = arg\, e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ أي $|z_A - z_C| = |z_E - z_C|$ أي $CA = CE$ و $ECA = \frac{\pi}{3}$

ومنه المثلث AEC متقايس الأضلاع .

د- التحويل $R \circ H$ هو تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

صورة الدائرة (γ) بالتحويل $R \circ H$ هي الدئرة (γ') التي مركزها O (مركز التشابه نقطة صامدة) ونصف قطرها 4 .

التمرين الثاني

1) لدينا $\overrightarrow{AC}(1;-1;0), \overrightarrow{AB}(0;-2;-1)$ **نفرض أن الشعاعين** $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ **مرتبطين خطيا ، عندئذ يوجد** $k \in \mathbb{R}$ **حيث** $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$ **أي** $\begin{cases} 1 = 0 \times k \\ -1 = -2k \\ 0 = -k \end{cases}$ **وهذا غير ممكن إذن** $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ **غير مرتبطين خطيا .**

وهذايعني أن النقط B, A **و** C ليست في استقامية فهي إذن تعين مستويا (P_1) . **الشعاعان** $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ **غير مرتبطين خطيا فهما يشكلان أساسا للمستوي** (P_1) **، وعليه لكل نقطة** $M(x;y;z)$ **من** (P_1) **يوجد عددان حقيقيان** λ, δ **حيث** $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \delta\overrightarrow{AC}$ **أي** $\begin{cases} x - 1 = 0 \times \lambda + \delta \\ y - 1 = -2\lambda - \delta \\ z - 1 = -\lambda + 0 \times \delta \end{cases}$ **أي**

$\begin{cases} x = 1 + \delta \\ y = 1 - 2\lambda - \delta \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ **وهو تمثيل وسيطي للمستوي** (P_1) .

2) $M(x;y;z) \in (P_1) \cap (P_2)$ **معناه** $\begin{cases} x = 1 + \delta \\ y = 1 - 2\lambda - \delta \\ z = 1 - \lambda \\ x - 2y - 2z + 6 = 0 \end{cases}$ **أي**

$\begin{cases} x = 1 + \delta \\ y = 1 - 2\lambda - \delta \\ z = 1 - \lambda \\ 1 + \delta - 2(1 - 2\lambda - \delta) - 2(1 - \lambda) + 6 = 0 \end{cases}$ **ومنه** $\begin{cases} x = 1 + \delta \\ y = 1 - 2\lambda - \delta \\ z = 1 - \lambda \\ \delta = -2\lambda - 1 \end{cases}$ **أي** $\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 2 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

وهو تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) **مستقيم تقاطع المستويين** $(P_1), (P_2)$.

3) **لدينا** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} + \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{i} - \vec{k} = \vec{0}$ وهذا يعني أن النقطة O هي مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$.

4) **أ- بما أن النقطة** O هي مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$ **فإن** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO}$ **وعليه** $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{3}$ **تكافيء** $\|\overrightarrow{MO}\| = 2\sqrt{3}$ **أي** $OM = 2\sqrt{3}$ **ومنه** (S) **هي سطح**

كرة مركزها O ونصف قطرها $2\sqrt{3}$ ، معادلة له هي $x^2+y^2+z^2=12$

ب- $M(x;y;z)\in(\Delta)\cap(S)$ معناه $\lambda\in\mathbb{R}$, $\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2 \\ z=1-\lambda \\ x^2+y^2+z^2=12 \end{cases}$ ومنه

أي $\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2 \\ z=1-\lambda \\ (-2\lambda)^2+2^2+(1-\lambda)^2=12 \end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2 \\ z=1-\lambda \\ (-2\lambda)^2+2^2+(1-\lambda)^2=12 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2 \\ z=1-\lambda \\ 5\lambda^2-2\lambda-7=0 \end{cases}$ ومنه $D(2;2;2)$ و $E\left(-\frac{14}{5};2;-\frac{2}{5}\right)$.

جـ- المثلث ODE متساوي الساقين $\left(OD=OE=2\sqrt{3}\right)$ لأن D و E نقطتان من (S) التي مركزها O ، إذن محور القطعة $[DE]$ يشمل O ، فإذا كانت F منتصف القطعة $[DE]$ فإن المسافة بين O و (Δ) هي المسافة OF ، لدينا $F\left(-\frac{2}{5};2;\frac{4}{5}\right)$ ومنه $OF=\sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2+(2)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{5}}$

المسافة بين O و (Δ) تساوي $\sqrt{\frac{24}{5}}$.

التمرين الثالث :

1)أ- لدينا $\boxed{u_0=16\equiv 2[7]}$ ، $u_1=6u_0-9\equiv 6\times 2-9[7]$, أي $\boxed{u_1\equiv 3[7]}$

$u_2=6u_1-9\equiv 6\times 3-9[7]$, أي $\boxed{u_2\equiv 2[7]}$ ، $u_3=6u_2-9\equiv 6\times 2-9[7]$, أي $\boxed{u_3\equiv 3[7]}$

$u_4=6u_3-9\equiv 6\times 3-9[7]$, أي $\boxed{u_4\equiv 2[7]}$.

ب- نلاحظ أن $\boxed{u_0\equiv 2[7]}$ ، $\boxed{u_2\equiv 2[7]}$ ، $\boxed{u_4\equiv 2[7]}$ نخمن أن $\boxed{u_{2k}\equiv 2[7]}$.

$\boxed{u_1\equiv 3[7]}$ ، $\boxed{u_3\equiv 3[7]}$ ، نخمن أن $\boxed{u_{2k+1}\equiv 3[7]}$. (أي $a=2$, $b=3$ المطلوبة في السؤال) .

2)أ- من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا $u_{n+2}=6u_{n+1}-9=6(6u_n-9)-9=36u_n-63$ ولكن $36\equiv 1[7]$ و $63\equiv 0[7]$ ومنه $u_{n+2}\equiv u_n[7]$.

ب- $\boxed{u_{2k}\equiv 2[7]?}$ الخاصية محققة من أجل $k=0$ لأنه لدينا $\boxed{u_{2\times 0}=u_0\equiv 2[7]}$ (من السؤال1)ب- ، نفرض الآن أنه من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k}\equiv 2[7]$ ونبين أن $u_{2(k+1)}\equiv 2[7]$

لدينا $u_{2(k+1)}=u_{2k+2}\equiv u_{2k}[7]$ حسب السؤال 2)أ- ومن فرض التراجع لدينا $u_{2k}\equiv 2[7]$ إذن ; $u_{2(k+1)}\equiv 2[7]$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k}\equiv 2[7]$.

لدينا $u_{2k+1} = 6u_{2k} - 9 \equiv 6\times 2 - 9[7]$ أي $u_{2k+1} \equiv 3[7]$.

3)أ- لدينا $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{9}{5} = 6u_n - 9 - \frac{9}{5} = 6u_n - \frac{54}{5} = 6\left(u_n - \frac{9}{5}\right) = 6v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية

أساسها 6 . وحدها الأول $v_0 = u_0 - \frac{9}{5} = 16 - \frac{9}{5} = \boxed{\frac{71}{5}}$.

ب- لدينا $v_n = \frac{71}{5}\times 6^n$ ومنه $\boxed{u_n = \frac{71}{5}\times 6^n + \frac{9}{5}}$ ،

ولكن $S_n = v_0 + \frac{9}{5} + v_1 + \frac{9}{5} + \ldots + v_n + \frac{9}{5} = v_0 + v_1 + \ldots + v_n + \frac{9}{5}(n+1)$

وعليه $v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0 \frac{6^{n+1}-1}{6-1} = \frac{71}{5}\times\frac{6^{n+1}-1}{5} = \frac{71}{25}\times 6^{n+1} - \frac{71}{25}$

$S_n = \frac{71}{25}\times 6^{n+1} - \frac{71}{25} + \frac{9}{5}(n+1) = \boxed{\frac{71}{25}\times 6^{n+1} + \frac{9}{5}n - \frac{26}{5}}$.

التمرين الرابع

I (1) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;3]$ لدينا $g'(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$ وعليه الدالة

g متناقصة تماما على المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};3\right]$.

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{2(x+1)\ln(x+1)-x}{x+1} = \lim\limits_{\substack{X\to 0\\ >}} \frac{2X\ln(X)-X+1}{X} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0$

$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\ln\left(-\frac{1}{2}+1\right) - \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1} = 1 - 2\ln 2$ ، $g(3) = 2\ln(3+1) - \frac{3}{3+1} = 4\ln 2 - \frac{3}{4}$

جدول تغيرات g

x	-1		$-\frac{1}{2}$		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-2\ln 2$	$\nearrow$	$4\ln 2 - \frac{3}{4}$

2) لدينا $g(0) = 2\ln(0+1) - \frac{0}{0+1} = 0$ إذن الصفر هو حل للمعادلة $g(x) = 0$ وهو الحل الوحيد على المجال

$\left[-\frac{1}{2};3\right]$ لأن الدالة g رتيبة تماما على هذا المجال . ومن جهة أخرى الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال

$\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ وبالتالي على المجال $]-0.8;-0.7[$ و $g(-0.8) = 2\ln(0.2) + \frac{0.8}{0.2} = 2\ln(0.2) + 4 \simeq 0.78$ و

$g(-0.7)=2\ln(0.3)+\dfrac{0.7}{0.3}\simeq -0.07$ أي $g(-0.8)\times g(-0.7)<0$ وحسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة

$g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-0.8;-0.7[$ وبالتالي على المجال $\left]-1;-\dfrac{1}{2}\right]$.

الخلاصة : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين هما الصفر والعدد α من المجال $]-0.8;-0.7[$.

3) إشارة $g(x)$

x	-1		α		0		3
إشارة $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4) أ- من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;3]$ لدينا $h'(x)=2g'(x)g(x)$.

ب- إشارة $h'(x)$

x	-1		α		$-\frac{1}{2}$		0		3
إشارة $g(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
إشارة $g'(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
إشارة $h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيرات الدالة h

x	-1		α		$-\frac{1}{2}$		0		3
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1-4\ln 2+4\ln^2(2)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$16\ln^2(2)-6\ln 2+\frac{9}{16}$

II) 1)

ليكن h عدد حقيقي غير معدوم $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{\dfrac{h^2}{\ln(h+1)}}{h}=\dfrac{h}{\ln(h+1)}$ ونعلم أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$

ومنه $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{\ln(h+1)}=1$ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=$ وعليه الدالة h قابلة للاشتقاق عند الصفر و $h'(0)=1$ ،

وتكون معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند الصفر هي $y=1\times(x-0)+0$ أي $\boxed{y=x}$

2) أ- من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;0[\cup]0;3]$ لدينا

$$f'(x)=\frac{2x\ln(x+1)-x^2\times\dfrac{1}{x+1}}{[\ln(x+1)]^2}=\frac{x\left(2\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}\right)}{[\ln(x+1)]^2}=\frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-1;\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;3]$.

ب- لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $2ln(\alpha+1)-\frac{\alpha}{\alpha+1}=0$ أي $ln(\alpha+1)=\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}$

ولدينا $f(\alpha)=\frac{\alpha^{2}}{ln(\alpha+1)}=\frac{\alpha^{2}}{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}}=2\alpha(\alpha+1)$

لدينا $\begin{cases}-0.8<\alpha<-0.7\\0.2<\alpha+1<0.3\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}1.4<-2\alpha<1.6\\0.2<\alpha+1<0.3\end{cases}$ وبالتالي $0.28<-2\alpha(\alpha+1)<0.48$ إذن

$-0.48<2\alpha(\alpha+1)<-0.28$ وأخيرا نجد أن $\boxed{-0.48<f(\alpha)<-0.28}$.

جـ- $f(3)=\frac{3^{2}}{ln(3+1)}=\boxed{\frac{9}{2ln2}}$ ، بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} ln(x+1)=\lim\limits_{\substack{X\to0\\>}} ln X=-\infty$ فإن $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=0}$.

جدول تغيرات الدالة f

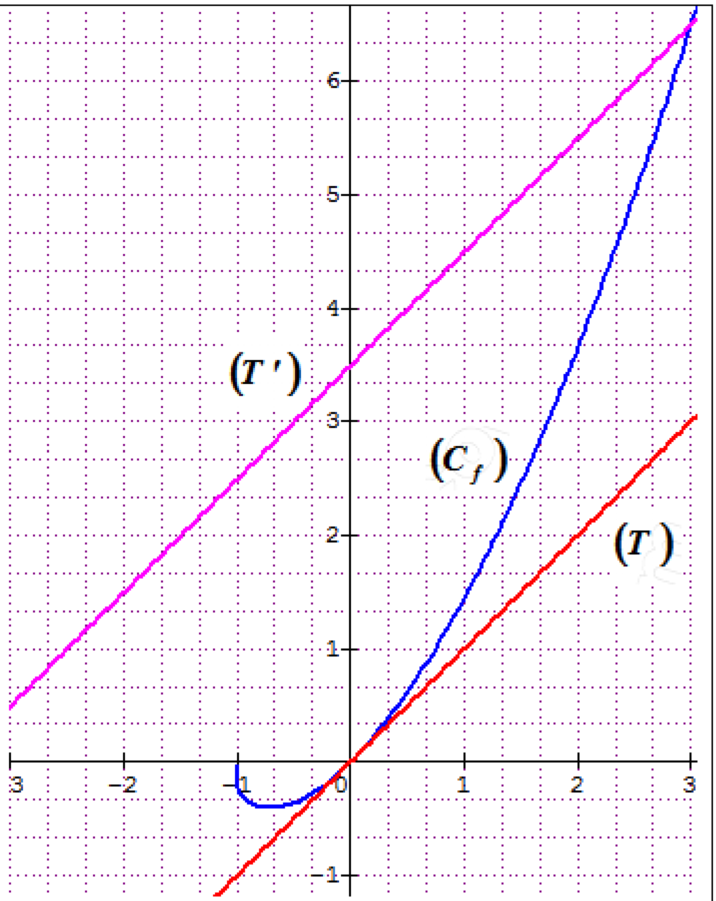
x	-1		α		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$\frac{9}{2ln2}$

3)أ- نعرف على $]-1;3]$ الدالة k بـ $k(x)=x-ln(x+1)$ ، عندئذ $k'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$ الدالة k متناقصة تماما على المجال $]-1;0]$ ومتزايدة تماما على $[0;3]$ ومنه $k(0)=0$ قيمة حدية صغرى للدالة k على $]-1;3]$ وبالتالي : من أجل كل x من المجال $]-1;3]$ ، $k(x)\geq0$ أي $x-ln(x+1)\geq0$.

ب- لدينا $f(x)-x=\frac{x^{2}}{ln(x+1)}-x=\frac{x(x-ln(x+1))}{ln(x+1)}$ وجدنا أن $x-ln(x+1)\geq0$ ولكون x و $ln(x+1)$ من نفس الإشارة ينتج أن $f(x)-x\geq0$ أي أن المنحني (C_f) يقع فوق المماس (T) .

4) (T') يوازي (T) معناه معامل توجيه (T') يساوي 1 ، ومنه معادلة لـ (T') هي $y=x+d$ مع $d\in\mathbb{R}$ ، (T') يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3 معناه النقطة ذات الإحداثيين $\left(3;\frac{9}{2ln2}\right)$ تنتمي إلى (T') أي $\frac{9}{2ln2}=3+d$ ومنه $d=\frac{9}{2ln2}-3$ أي أن $\boxed{y=x+\frac{9}{2ln2}-3}$ هي معادلة لـ (T') .

5)



6)حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$ ،

إذا كان $m\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]\frac{9}{2\ln 2}-3;+\infty\right[$ فإن المعادلة $f(x)=x+m$ لا تقبل حلا .

إذا كان $m=0$ فإن المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلا مضاعفا .

إذا كان $m\in\left]0;1\right[$ فإن المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلين متمايزين

إذا كان $m\in\left]1;\frac{9}{2\ln 2}-3\right]$ فإن المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلا واحدا .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة : جوان 2013

الشعبة : رياضيات

اختبار في مادّة : الرياضيات — المدّة : 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل: (06 نقاط)

I) a و b عددان حقيقيان موجبان تماما. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$،
النقط A ، B ، C و E التي لاحقاتها: $z_A = ae^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، $z_B = -a\sqrt{2}$ ، $z_C = \overline{z_A}$ و $z_E = be^{i\frac{3\pi}{2}}$ على الترتيب.

1. أ - اكتب على الشّكل الأسّي العدد المركّب $\dfrac{z_A - z_B}{z_A}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلّث OAB.

ب - حدّد طبيعة الرباعي $OABC$، ثمّ استنتج مساحته.

2. التشابه المباشر S ذو المركز O والنسبة $\dfrac{b}{a}$ والزاوية $\dfrac{3\pi}{4}$، يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$

أ- اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S، ثمّ تحقق أنّ $S(A) = E$.

ب - بيّن أنّ مساحة الرباعي $OEFG$ هي b^2 (مقدرة بوحدة المساحة)، حيث $S(B) = F$ و $S(C) = G$.

3. أ− احسب بدلالة a و b العبارة: $\left|z_C\right|^2 + \left|z_E\right|^2 - 2\left|z_C \times z_E\right| \cos\left[\arg\left(\dfrac{z_E}{z_C}\right)\right]$.

ب− استنتج قيمة CE^2 بدلالة a و b.

II) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن O، لاحقتها z_n .

نضع: $M_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $M_{n+1} = S(M_n)$.

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين، من أجل كل عدد طبيعي n، بـِ: $u_n = \left|z_n\right|$ و $v_n = \arg\left(z_n\right)$.

1. اكتب العدد المركّب $\dfrac{z_{n+1}}{z_n}$ على الشّكل الأسّي بدلالة a و b.

2. نفرض أنّ : $a < b$ و $\arg\left(\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right) \in \left]-\pi;\pi\right]$.

بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسية، والمتتالية (v_n) حسابية يُطلب تعيين أساس وحساب الحد الأوّل لكل منهما.

3. احسب، بدلالة a ، b و n المجموع T_n، حيث : $T_n = a + b + \dfrac{b^2}{a} + \dfrac{b^3}{a^2} + \ldots + \dfrac{b^n}{a^{n-1}}$، ثمّ $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

4. عيّن قيّم الأعداد الطبيعية n التي تكون من أجلها النقط O ، A و M_n في استقامية.

التمرين الثاني: (03 نقاط)

1. n عدد طبيعي . نعتبر العددين الصحيحين α و β ، حيث : $\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ و $\beta = n + 3$.

أ - بيّن أنّ: $PGCD(\alpha;\beta) = PGCD(\beta;10)$. (يرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر)

ب - ما هي القيّم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha;\beta)$ ؟

جـ - عيّن مجموعة قيّم العدد الطبيعي n ، بحيث يكون: $PGCD(\alpha;\beta) = 5$.

2. **أ -** ادرس، حسب قيّم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.

ب - عيّن مجموعة قيّم العدد الطبيعي n التي تحقّق الجملة التالية: $\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(0;0;1)$ ، $B(2;2;-1)$ ، $C(-2;-7;-7)$ و $D(-3;4;4)$

والمستوي $(\mathcal{P})$ المعرّف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x = 1 + 3\alpha + \beta \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = 4 + \alpha + \beta \end{cases}$ ؛ α و β وسيطان حقيقيان.

1. **أ -** بيّن أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب - تحقّق أنّ الشعاع $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ، ثمّ اكتب معادلة ديكارتية له.

2. **أ -** اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$، ثمّ بيّن أنّ المستويين (ABC) و $(\mathcal{P})$ متعامدان.

ب - بيّن أنّ تقاطع (ABC) و $(\mathcal{P})$ هو المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -7 + 4t \; ; \; t \in \mathbb{R} \\ z = -7 + 5t \end{cases}$

جـ - احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC)، والمسافة بين النقطة D والمستوي $(\mathcal{P})$، ثمّ استنتج المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ).

3. $(\mathcal{Q})$ المستوي الذي يشمل النقطة D والعمودي على كل من المستويين (ABC) و $(\mathcal{P})$.

أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{Q})$.

ب - بيّن أنّ المستويات الثلاثة (ABC) ، $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$ تتقاطع في نقطة واحدة H ، ثمّ عيّن إحداثيات H .

جـ - احسب بطريقة ثانية، المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ).

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I– 1. الدالة u معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $u(x)=e^x-3x+4-e$.

أ - ادرس اتجاه تغيّر الدالة u.

ب - بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $e^x-e>3x-4$.

2. الدالة v معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $v(x)=-3x^3+4x^2-1+\ln x$.

أ - بيّن أنّ: $v'(1)=0$. (يرمز v' إلى الدالة المشتقة للدالة v)

ب - أثبت أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $v(x)\leq 0$.

جـ - استنتج، أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $\dfrac{-1+\ln x}{x^2}\leq 3x-4$.

3. أثبت أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $e^x-e+\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0$.

II– الدالة f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=e^x-ex+\dfrac{\ln x}{x}$.

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب: $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3. احسب $f(1)$ ، ثمّ مثّل المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left]0;\dfrac{5}{2}\right]$.

(**نأخذ:** $f(2)\approx 2,3$ ، $f(1,64)\approx 1$ و $f\left(\dfrac{5}{2}\right)\approx 5,75$).

4. احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=\frac{1}{2}$ و $x=2$.

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل: (03 نقاط)

1. أ - عيّن الأعداد الطبيعية n التي تحقّق: $2n+27\equiv 0[n+1]$.

ب - عيّن الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية، حيث: $(b-a)(a+b)=24$.

جـ - استنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$.

2. α و β عددان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس خمسة على الشّكل $\alpha=\overline{10141}$ و $\beta=\overline{3403}$

أ - اكتب العددين α و β في النظام العشري.

ب - عيّن الثنائية $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية حيث: $\begin{cases} b^2-a^2=24 \\ \alpha a-\beta b=9 \end{cases}$.

3. أ - عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434، ثمّ استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478 .

ب - حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $2013x-1434y=27$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z، التالية: $z^2+z+1=0$.

2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$؛ النقط A ، B و M ذات اللاّحقات:

$z_A=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و z على الترتيب. (يرمز $\overline{z_A}$ إلى مرافق z_A)

أ - أُكتب z_A على الشّكل الأسّي.

ب - عيّن مجموعة النقط M من المستوي، حيث: $\arg\left[(z-z_A)^2\right]=\arg(z_A)-\arg(z_B)$.

3. أ - التحويل النقطي r، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث: $z'=z_A\cdot z+z_B\sqrt{3}$.

- ما طبيعة التحويل r؟ عيّن عناصره المميزة.

ب - التحاكي h، يرفق بكلّ نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث: $z'=-2z+3i$.

- عيّن نسبة ومركز التحاكي h .

جـ - نضع: $S=h\circ r$. (يرمز $\circ$ إلى تركيب التحويلين r و h).

- عيّن طبيعة التّحويل S، مبرزاً عناصره المميزة، ثمّ تحقّق أنّ عبارته المركّبة هي: $z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)+i$.

4. نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C ، D و E؛ حيث: $S(O)=C$ ، $S(C)=D$ و $S(D)=E$.

- بيّن أنّ النقط O ، Ω و E في استقامية.

5. أ - عيّن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث : $z=2e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$.

ب - عيّن (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$؛ النقطتين $A(-1;0;2)$ و $B(1;1;1)$

والمستقيم (Δ) المعرّف بالتمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x=2+\alpha \\ y=-2 \\ z=-1-\alpha \end{cases}$ حيث $(\alpha\in\mathbb{R})$.

1. أ **-** اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

ب - بيّن أنّ المستقيمين (AB) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

2. $(\mathcal{P})$ المستوي الذي يشمل (AB) ويوازي (Δ).

أ **-** اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي $(\mathcal{P})$.

ب - أثبت أنّ $x-y+z-1=0$، هي معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$.

3. لتكن N نقطة من المستقيم (Δ) و M نقطة من الفضاء إحداثياتها $(1+2\beta;1+\beta;1-\beta)$ مع $(\beta\in\mathbb{R})$.

أ **-** بيّن أنّ النقطة M تنتمي إلى المستقيم (AB).

ب - جد إحداثيات النقطتين M و N حتى تكون M المسقط العمودي للنقطة N على المستوي $(\mathcal{P})$.

جـ - تحقق أن المسافة بين N و $(\mathcal{P})$ هي $\frac{2}{\sqrt{3}}$، ثمّ احسب مساحة المثلث ABN.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I– الدالة g معرّفة على $\mathbb{R}$ بِـ : $g(x)=1+\left(x^2-1\right)e^{-x}$.

1. أ **-** احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب - ادرس اتجاه تغيّر الدالة g، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها. **(نأخذ:** $g(1-\sqrt{2})\simeq -0,25$ و $g(1+\sqrt{2})\simeq 1,43$**)**

2. أ **-** بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّين في $\mathbb{R}$، ثمّ تحقّق أنّ أحدهما معدوم والآخر α، حيث:

$-0,8<\alpha<-0,7$.

ب - استنتج إشارة $g(x)$؛ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II– الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ بِـ : $f(x)=x-(x+1)^2e^{-x}$

$\left(\mathcal{C}_f\right)$ منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. **(**وحدة الطول $2\,cm$**)**

1. أ **-** احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب - بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$، مقارب مائل للمنحنى $\left(\mathcal{C}_f\right)$ عند $+\infty$.

جـ - ادرس وضعية المنحنى $\left(\mathcal{C}_f\right)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

2. أ **-** بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$. **(**يرمز f' إلى الدالة المشتقة للدالة f **)**

ب - شكّل جدول تغيّرات الدالة f على $\mathbb{R}$. **(نأخذ:** $f(\alpha)\approx -0,9$**)**

3. أ **-** بيّن أنّ المنحنى $\left(\mathcal{C}_f\right)$ يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

ب - مثّل (Δ) والمماسين والمنحنى $\left(\mathcal{C}_f\right)$.

جـ - ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $(x+1)^2+me^x=0$.

4. الدالة H معرّفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $H(x)=\left(-x^2-4x-5\right)e^{-x}$.

أ - بيّن أن H دالة أصلية للدالة: $x\mapsto (x+1)^2 e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب - احسب بالسنتيمتر المربع ، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $\left(\mathcal{C}_f\right)$ والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$.

III− (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـِ: $u_0=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$.

(تذكّر أنّ العدد α يحقّق $g(\alpha)=0$)

1. برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1\le u_n\le\alpha$.

2. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

3. استنتج أنّ (u_n) متقاربة، ثمّ احسب نهايتها.

التمرين الأول :

(I 1. أ-لدينا $\dfrac{z_A - z_B}{z_A} = \dfrac{ae^{i\frac{3\pi}{4}} - (-a\sqrt{2})}{ae^{i\frac{3\pi}{4}}} = \dfrac{a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right)}{ae^{i\frac{3\pi}{4}}} = \dfrac{a\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{ae^{i\frac{3\pi}{4}}} = \dfrac{ae^{i\frac{\pi}{4}}}{ae^{i\frac{3\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \boxed{-i}$

$\dfrac{z_A - z_B}{z_A} = -i$ معناه $\left|\dfrac{z_A - z_B}{z_A}\right| = \left|\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_O}\right| = |-i| = 1$ و

$\arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_A}\right) = \arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_O}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_O - z_A}\right) = \arg(-i) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ أي أن $AB = AO$ و

$\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ وهذا يعني أن المثلث OAB قائم في A ومتساوي الساقين .

ب- $z_B - z_C = -a\sqrt{2} - \overline{z_A} = -a\sqrt{2} - ae^{-i\frac{3\pi}{4}} = a\left(-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ أي

$z_B - z_C = z_A = z_A - z_O$ وهذا يعني أن $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA}$ ومنه الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع ولأن أحد زوياه قائمة وفيه ضلعان متتابعان متقايسان ينتج أن $OABC$ مربع . مساحته هي $OA^2 = |z_A|^2 = \boxed{a^2}$

2. أ-العبارة المركبة للتشابه S هي $\boxed{z' = \frac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}}z}$. لدينا $\dfrac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}}z_A = \dfrac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}} \times ae^{i\frac{3\pi}{4}} = be^{i\frac{3\pi}{2}} = z_E$ ومنه $S(A) = E$.

ب- الرباعي $OEFG$ هو صورة المربع $OABC$ بالتشابه S وعليه مساحة $OEFG$ تساوي $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 \times a^2 = b^2$ لأن $\dfrac{b}{a}$ هي نسبة التشابه S.

3. أ-لدينا $|z_C| = \left|\overline{z_A}\right| = a$ و $|z_E| = b$ و $\dfrac{z_E}{z_C} = \dfrac{be^{i\frac{3\pi}{2}}}{ae^{-i\frac{3\pi}{4}}} = \dfrac{b}{a}e^{i\frac{9\pi}{4}} = \dfrac{b}{a}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه $\arg\left(\dfrac{z_E}{z_C}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ وعليه

$$|z_C|^2 + |z_E|^2 - 2|z_C \times z_E|\cos\left[\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right)\right] = a^2 + b^2 - 2a \times b \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{a^2 + b^2 - a \times b\sqrt{2}}$$

ب-لدينا $EC^2 = \overrightarrow{EC}^2 = \left(\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE}\right)^2 = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OE}^2 - 2\overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OE}$ أي

$EC^2 = \overrightarrow{EC}^2 = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OE}^2 - 2\left\|\overrightarrow{OC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OE}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OE}\right)$ ولدينا $\left|\overrightarrow{OC}\right| = |z_C| = a$ و

$\left|\overrightarrow{OE}\right| = |z_E| = b$ و $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OE}\right) = \arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right)$ وعليه

$$EC^2 = |z_C|^2 + |z_E|^2 - 2|z_C \times z_E|\cos\left[\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right)\right] = \boxed{a^2 + b^2 - a\times b\sqrt{2}}$$

II) 1. لدينا $\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{\frac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}}z_n}{z_n} = \boxed{\frac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$.

2. لدينا $\frac{b}{a} = \left|\frac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right| = \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ومنه : $u_{n+1} = \frac{b}{a}u_n$. ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{\frac{b}{a}}$ وحدها الأول $u_0 = |z_0| = |z_A| = \boxed{a}$.

$\frac{3\pi}{4} = \arg\left(\frac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = \arg(z_{n+1}) - \arg(z_n) = \arg\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right)$ أي $v_{n+1} - v_n = \frac{3\pi}{4}$ ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{3\pi}{4}$ وحدها الأول $v_0 = \arg(z_A) = \boxed{\frac{3\pi}{4}}$.

3. لدينا $T_n = a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \ldots + \frac{b^n}{a^{n-1}} = a\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} + \ldots + \frac{b^n}{a^n}\right)$ ومنه

$T_n = a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \ldots + \frac{b^n}{a^{n-1}} = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{b}{a}}$ أي

$T_n = a \times \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{b}{a}} = \boxed{a^2 \times \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{a - b}}$ ، بما أن $a < b$ فإن $\frac{b}{a} > 1$ و $a - b < 0$ وعليه $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} = +\infty$ و $\boxed{\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty}$.

4. النقط A, O و M_n في استقامية معناه $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM_n}\right) = k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$. أي أن $\arg\left(\frac{z_n}{z_0}\right) = k\pi$ وعليه $\arg(z_n) - \arg(z_0) = k\pi$ ومنه $v_n = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ ولكن $v_n = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}n$ أي $\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}n = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ وعليه $n = \frac{4}{3}k = 4m$ حيث $m \in \mathbb{N}$ أي أن مجموعة قيم n حتى تكون النقط A, O و M_n في استقامية هي مضاعفات العدد 4 .

<u>التمرين الثاني :</u>

1. أ-لدينا $\alpha = 2n^3 - 14n + 2 = (2n^2 - 6n + 4)(n+3) - 10$ أي أن $\alpha = 2n^3 - 14n + 2 = (2n^2 - 6n + 4)\beta - 10$

نضع $PGCD(\alpha, \beta) = d$ و $PGCD(\beta, 10) = d'$ عندئذ :

d يقسم كلا من α و β وبالتالي d يقسم $\left(2n^2-6n+4\right)\beta-\alpha=\boxed{10}$ أي d يقسم d' $\cdots(1)$ ،

d' يقسم كلا من 10 و β وبالتالي d' يقسم $\left(2n^2-6n+4\right)\beta-10=\boxed{\alpha}$ أي d' يقسم d $\cdots(2)$ ،

من (1) و (2) نستنتج أن $d=d'$ أي $PGCD(\alpha,\beta)=PGCD(\beta,10)$.

ب-قواسم العدد 10 هي $\{1;2;5;10\}$ ومنه $PGCD(\alpha,\beta)=PGCD(\beta,10)\in\boxed{\{1;2;5;10\}}$.

جـ-$PGCD(\alpha,\beta)=5$ معناه $PGCD(\beta,10)=5$ معناه $\begin{cases}\beta\equiv 0[5]\\ \beta\not\equiv 0[10]\end{cases}$ أي $\begin{cases}n+3\equiv 0[5]\\ n+3\not\equiv 0[10]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}n\equiv 2[5]\\ n\not\equiv 7[10]\end{cases}$ أي

$\begin{cases}n=5m+2\\ n\not\equiv 10s+7\end{cases}$ مع $m,s\in\mathbb{N}$.اي $\begin{cases}n=5m+2\\ 5m+2\not\equiv 10s+7\end{cases}$ أي $\begin{cases}n=5m+2\\ 5m\not\equiv 10s+5\end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases}n=5m+2\\ m\not\equiv 2s+1\end{cases}$ اي $\begin{cases}n=5m+2\\ m=2s\end{cases}$

وعليه $\boxed{n=10s+2}$

2.أ-لدينا $4^1\equiv 4[11],4^2\equiv 5[11],4^3\equiv 9[11],4^4\equiv 3[11],4^5\equiv 1[11]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا $4^{5k}\equiv 1[11]$ و $4^{5k+1}\equiv 4[11],4^{5k+2}\equiv 5[11],4^{5k+3}\equiv 9[11],4^{5k+4}\equiv 3[11]$ أي :

إذا كان $n=$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
فإن باقي قسمة 4^n على11 هو	1	4	5	9	3

ب- $\begin{cases}4^{5n}+4^n+n\equiv 0[11]\\ n\equiv 2[10]\end{cases}$ معناه $\begin{cases}4^n+n+1\equiv 0[11]\\ n=10k+2 \quad ,k\in\mathbb{N}\end{cases}$ لأن ($4^{5n}\equiv 1[11]$)تكافيء $\begin{cases}4^{10k+2}+10k+2+1\equiv 0[11]\\ n=10k+2 \quad ,k\in\mathbb{N}\end{cases}$

تكافيء $\begin{cases}\left(4^{5k+1}\right)^2+10k+2+1\equiv 0[11]\\ n=10k+2 \quad ,k\in\mathbb{N}\end{cases}$ تكافيء $\begin{cases}10k+19\equiv 0[11]\\ n=10k+2 \quad ,k\in\mathbb{N}\end{cases}$ (لأن $4^{5k+1}\equiv 4[11]$) تكافيء

$\begin{cases}-k+8\equiv 0[11]\\ n=10k+2 \quad ,k\in\mathbb{N}\end{cases}$ تكافيء $\begin{cases}k\equiv 8[11]\\ n=10k+2 \quad ,k\in\mathbb{N}\end{cases}$ تكافيء $\begin{cases}k=11p+8 \quad ,p\in\mathbb{N}\\ n=10k+2 \quad ,k\in\mathbb{N}\end{cases}$ ومنه

$n=10(11p+8)+2$ أي $\boxed{n=110p+82}$ مع $p\in\mathbb{N}$ وهي قيم n المطلوبة .

التمرين الثالث

1.أ- لدينا $\overrightarrow{AB}(2;2;-2),\overrightarrow{AC}(-2;-7;-8)$ نلاحظ أن : $\frac{2}{-7}=\frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}}\neq\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}}=-1=\frac{2}{-2}$ وهذا يعني أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ، وعليه النقط A,B و C ليست في استقامية فهي إذن تعين مستويا .

ب- لدينا $\vec{n}\bullet\overrightarrow{AB}=3\times 2+(-2)\times 2+1\times(-2)=0$ و $\vec{n}\bullet\overrightarrow{AC}=3\times(-2)+(-2)\times(-7)+1\times(-8)=0$ ومنه الشعاع $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وهما من المستوي (ABC) غير مرتبطين خطيا إذن الشعاع $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (ABC). وعليه معادلة لـ (ABC) هي $3x-2y+z+d=0$ مع $d\in\mathbb{R}$ وبتعويض إحداثيات A (مثلا) نجد معادلة لـ (ABC) هي $\boxed{3x-2y+z-1=0}$.

2.أ-لدينا $\begin{cases} x=1+3\alpha+\beta \\ y=1-2\alpha \\ z=4+\alpha+\beta \end{cases}$ معناه $\begin{cases} x=1+2\alpha+(\alpha+\beta)\cdots(1) \\ y=1-2\alpha \quad \cdots(2) \\ z-4=\alpha+\beta \quad \cdots(3) \end{cases}$ بتعويض (3) في (1) ثم بجمع الناتج مع (2) نجد أن $\boxed{x+y-z+2=0}$ وهي معادلة ديكارتية للمستوي $(\wp)$. لدينا $\vec{n}(3;-2;1),\vec{n'}(1;1;-1)$ شعاعان ناظميان للمستويين (ABC) و $(\wp)$ على الترتيب ، ولدينا $\vec{n}\bullet\vec{n'}=3\times1+(-2)\times1+1\times(-1)=3-2-1=0$ وهذا يعني أن المستويين (ABC) و $(\wp)$ متعامدان .

ب- المستويان (ABC) و $(\wp)$ متقاطعان وتقاطعهما مستقيم ، ولدينا

$3(-2+t)-2(-7+4t)+-7+5t-1=-6+3t+14-8t-7+5t-1=0$ ومنه المستقيم (Δ) محتوى في المستوي (ABC)

$-2+t-7+4t-(-7+5t)+2=-2+t+-7+4t+7-5t+2=0$ ومنه المستقيم (Δ) محتوى في المستوي $(\wp)$. وعليه المستويان (ABC) و $(\wp)$ متقاطعان وفق المستقيم (Δ).

جـ-لدينا $d\left(D,(ABC)\right)=\dfrac{|3\times(-3)-2\times4+4-1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}}=\dfrac{14}{\sqrt{14}}=\boxed{\sqrt{14}}$ و $d\left(D,(\wp)\right)=\dfrac{|-3+4-4+2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

ومنه $d\left(D,(\Delta)\right)=\sqrt{\left[d\left(D,(ABC)\right)\right]^2+\left[d\left(D,(\wp)\right)\right]^2}=\sqrt{14+\dfrac{1}{3}}=\boxed{\boxed{\sqrt{\dfrac{43}{3}}}=\boxed{\dfrac{\sqrt{129}}{3}}}$

3.أ-ليكن $\vec{n''}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (Q) عندئذ : $\begin{cases} \vec{n}\bullet\vec{n''}=0 \\ \vec{n'}\bullet\vec{n''}=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 3a-2b+c=0 \\ a+b-c=0 \end{cases}$ حلول هذه الجملة هي الثلاثيات $(a;4a;5a)$ ومنه $\vec{n''}(1;4;5)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (Q) وتكون معادلة له $x+4y+5z+d'=0$ وبالتعويض بإحداثيات النقطة D نجد أن معادلة للمستوي (Q) هي $\boxed{x+4y+5z-33=0}$.

ب-المستويان (ABC) و $(\wp)$ متقاطعان وفق المستقيم (Δ) العمودي على المستوي (Q) فهو يقطعه في نقطة وحيدة H ، وعليه المستويات الثلاثة (ABC) و $(\wp)$ و (Q) تتقاطع في نقطة وحيدة H إحداثياتها (x,y,z) تحقق :

$\begin{cases} x+4y+5z-33=0 \\ x=-2+t \\ y=-7+4t \\ z=-7+5t \end{cases}$ أي أن $\boxed{H\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{3};\dfrac{14}{3}\right)}$.

جـ-المستقيم (Δ) عمودي على المستوي $(\wp)$ وبالتالي على المستقيم (DH) $\left((DH)\subset(\wp)\right)$ وعليه H هي المسقط العمودي لـ D على (Δ) أي أن

$$d\left(D,(\Delta)\right)=HD=\sqrt{\left(-3-\frac{1}{3}\right)^2+\left(4-\frac{7}{3}\right)^2+\left(4-\frac{14}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{100}{9}+\frac{25}{9}+\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{129}{9}}=\boxed{\boxed{\frac{\sqrt{129}}{3}}=\boxed{\sqrt{\frac{43}{3}}}}$$

التمرين الرابع :

$I-1$.أ- من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا: $u'(x)=e^x-3$ وعليه إشارة $u'(x)$ هي :

x	0		$\ln 3$		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	

وعليه الدالة u متناقصة تماما على المجال $]0;\ln 3]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\ln 3;+\infty[$.

ب- للدالة u قيمة حدية صغرى هي $u(\ln 3)=e^{\ln 3}-3\ln 3+4-e=7-3\ln 3-e\simeq 0.986>0$ ومنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $u(x)>0$ أي $e^x-3x+4-e>0$ وعليه $\boxed{e^x-e>3x-4}$.

2.أ- من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا: $v'(x)=-9x^2+8x+\frac{1}{x}=\frac{-9x^3+8x^2+1}{x}$ ومنه $v'(1)=-9\times 1^2+8\times 1+\frac{1}{1}=0$.

ب- العدد 1 جذر لـ $v'(x)$ وبتحليل $v'(x)$ نجد : $v'(x)=-\frac{(x-1)(9x^2+x+1)}{x}$ ولكون $9x^2+x+1>0$ (مميزه $\Delta=-35<0$ و $9>0$) فإن إشارة $v'(x)$ عكس إشارة $x-1$ أي أن $v'(x)>0$ على المجال $]0;1[$ و $v'(x)<0$ على المجال $]1;+\infty[$ أي أن الدالة v متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ ومنه للدالة v قيمة حدية كبرى هي $v(1)=-3\times 1^3+4\times 1^2-1+\ln 1=0$ أي أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $v(x)\le 0$.

جـ- $v(x)\le 0$ معناه $-3x^3+4x^2-1+\ln x\le 0$ ومنه $-1+\ln x\le 3x^3-4x^2$ وعليه $-1+\ln x\le x^2(3x-4)$ ولكون $x\neq 0$ ينتج أن $\boxed{\frac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4}$.

3. من $e^x-e>3x-4$ و $\frac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4$ نستنتج أن $\frac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4<e^x-e$ أي أن $\frac{-1+\ln x}{x^2}<e^x-e$ ومنه $\boxed{e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}>0}$.

$II-1$. $\boxed{\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty}$ لأن $\lim_{x\xrightarrow{>}0} e^x-ex=1$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln x}{x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln\frac{1}{X}}{\frac{1}{X}}=\lim_{X\to+\infty}-X\ln X=-\infty$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty} e^x-ex=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x}-e\right)=+\infty$.

2. من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا $f'(x)=e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}>0$ (من السؤال $I-3$.) ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وجدول تغيراتها هو

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. لدينا $f(1)=e^1-e\times 1+\frac{\ln 1}{1}=\boxed{0}$.

تمثيل (C_f) (في الصفحة 6)

4. لتكن A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\frac{1}{2}$ و $x=2$

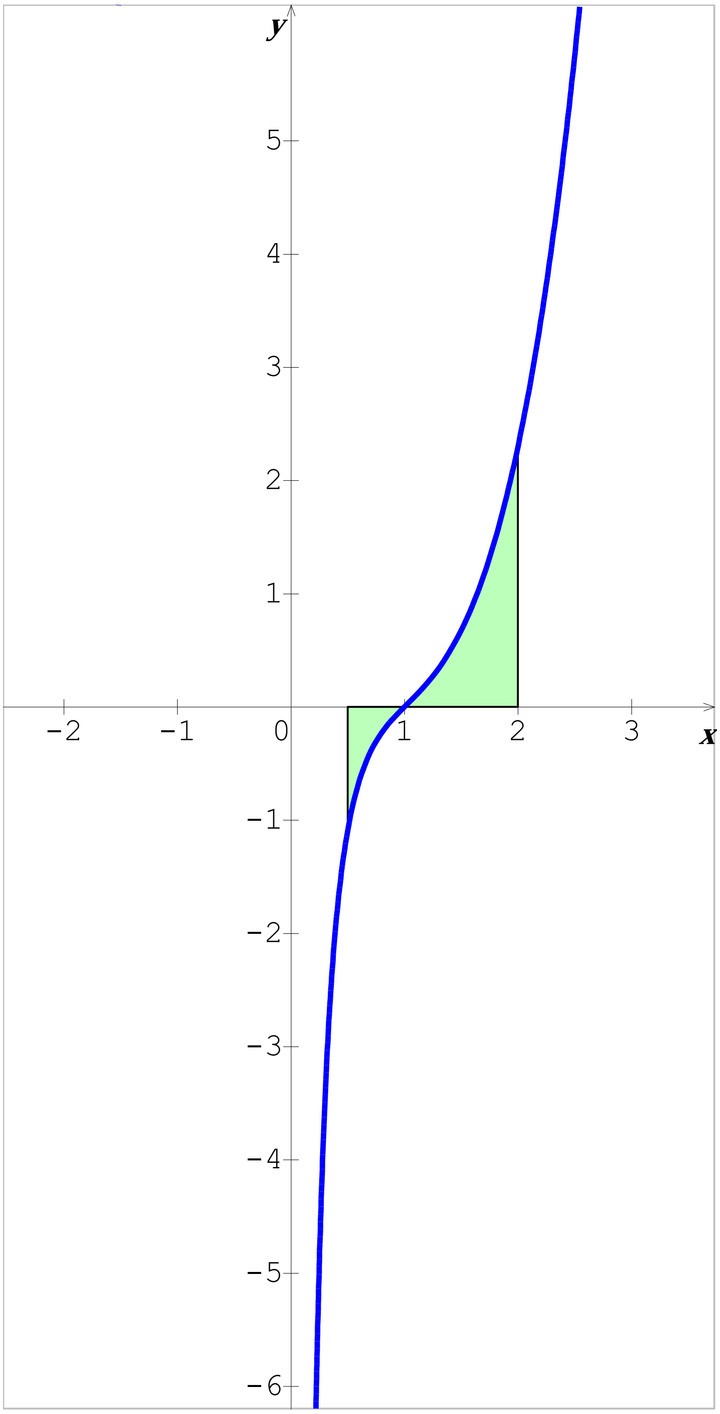
عندئذ : $A=\int_{\frac{1}{2}}^{1}-f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$

لدينا الدالة F المعرفة بـ $F(x)=e^{x}-\frac{e}{2}x^{2}+\frac{1}{2}(\ln x)^{2}$ هي دالة أصلية لـ f على $]0;+\infty[$ ومنه

أي $A=-\left[F(x)\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\left[F(x)\right]_{1}^{2}=-F(1)+F\left(\frac{1}{2}\right)+F(2)-F(1)=F(2)+F\left(\frac{1}{2}\right)-2F(1)$

أي $A=e^{2}-\frac{e}{2}\times 2^{2}+\frac{1}{2}(\ln 2)^{2}+e^{\frac{1}{2}}-\frac{e}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}\right)^{2}-2\left(e^{1}-\frac{e}{2}\times 1+\frac{1}{2}(\ln 1)^{2}\right)=\boxed{e^{2}+e^{\frac{1}{2}}-\frac{25}{8}e+(\ln 2)^{2}}$

$\boxed{A\approx 1.024}$



تصحيح اختبار البكالوريا 2013 رياضيات شعبة رياضيات – الموضوع الثاني -

التمرين الأول :

1.أ- $2n+27\equiv 0[n+1]$ معناه $2n+2+25\equiv 0[n+1]$ أي $2(n+1)+25\equiv 0[n+1]$ ومنه $25\equiv 0[n+1]$ أي 25 مضاعف لـ $n+1$ أي $\boxed{n\in\{0,4,24\}}$.

$(b-a)(b+a)=24$ معناه $(b-a)(b+a)=2\times 12$ أو $(b-a)(b+a)=4\times 6$ لأن $b-a$ و $b+a$ من نفس الشفعية و $b>a$

$(b-a)(b+a)=2\times 12$ معناه $\begin{cases}b-a=2\\ b+a=12\end{cases}$ و $(b-a)(b+a)=4\times 6$ معناه $\begin{cases}b-a=4\\ b+a=6\end{cases}$ ومنه $\boxed{(a,b)\in\{(5,7),(1,5)\}}$.

$(b-a)(b+a)=24$ تكافيء $b^2-a^2=24$ ومنه $b^2=24+a^2$ وعليه قطعة طولها $\sqrt{24}$ هي ضلع في مثلث قائم طول وتره 5 وطول الضلع القائم الآخر هي1 أو هي ضلع في في مثلث قائم طول وتره 7 وطول الضلع القائم الآخر هي5.

$\alpha=\overline{10141}^5=1\times 5^4+1\times 5^2+4\times 5^1+1=\boxed{671}$ ، $\beta=\overline{3403}^5=3\times 5^3+4\times 5^2+3=\boxed{478}$

$\begin{cases}b^2-a^2=24\\ \alpha a-\beta b=9\end{cases}$ معناه $\begin{cases}b^2-a^2=24\\ 651a-478b=9\end{cases}$ معنا ه $\begin{cases}(a,b)\in\{(5,7),(1,5)\}\\ 671a-478b=9\end{cases}$ ومنه $\boxed{(a,b)=(5,7)}$.

$2013=3\times 11\times 61$ و $1434=2\times 3\times 239$ ومنه $\boxed{PGCD(2013,1434)=3}$.

$PGCD(2013,1434)=3$ معناه $PGCD(3\times 11\times 61,3\times 2\times 239)=3$ ومنه $3\times PGCD(671,478)=3$ أي $\boxed{PGCD(671,478)=1}$.

$2013x-1434y=27$ معناه $671x-478y=9$ ، من السؤال 2.ب- لدينا الثنائية $(5,7)$ حل خاص لهذه المعادلة أي $\begin{cases}671x-478y=9\\ 671\times 5-478\times 7=9\end{cases}$ ومنه $671(x-5)=478(y-7)\quad\cdots(*)$ إذن 478 يقسم $671(x-5)$ وبما أن 478 و 671 أوليان فيما بينهما فإن (حسب مبرهنة غوص) 478 يقسم $x-5$ أي يوجد عدد صحيح k بحيث $x-5=478k$ ومنه $x=478k+5$ بالتعويض في $(*)$ نجد أن $y=671k+7$ ومنه حلول المعادلة المعطاة هي $\boxed{\{(478k+5,671k+7);\ \ k\in\mathbb{Z}\}}$.

التمرين الثاني

1.لدينا $\Delta=1^2-4\times 1=-3=(i\sqrt{3})^2$ ومنه حلا المعادلة هما $\boxed{z_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$, $\boxed{z_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$

2.أ-لدينا $|z_A|=1$ و $\arg(z_A)\equiv\frac{4\pi}{3}[2\pi]$ ومنه $\boxed{z_A=e^{i\frac{4\pi}{3}}}$.

ب- $\arg\left[(z-z_A)^2\right]=\arg(z_A)-\arg(z_B)$ تكافيء $2\arg(z-z_A)=2\arg(z_A)$ أي $\arg(z-z_A)=\arg(z_A)$ أي $\arg(z-z_A)=\arg(z_A-z_O)$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{AM}$ مرتبطان خطيا ولهما نفس الاتجاه أي ومه $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AM})=2k\pi$ ومنه مجموعة النقط المطلوبة هي نصف المستقيم المفتوح الذي مبدؤه A (A ليست نقطة منه) وشعاع توجيه له $\overrightarrow{OA}$ ولا يشمل O والذي عبارته التحليلية $\begin{cases} y=\sqrt{3}x \\ x<-\frac{1}{2}\end{cases}$ وعبارته المركبة

$\lambda>0,\quad z=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}+\lambda e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

3.أ- ، لدينا $|z_A|=1$ و $\arg(z_A)\equiv\frac{4\pi}{3}[2\pi]$ و $\frac{z_B\sqrt{3}}{1-z_A}=\frac{-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}}{1+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}=\frac{-\sqrt{3}+3i}{3+i\sqrt{3}}=i$ ومنه r هو الدوران الذي مركزه $\Omega(0;1)$ وزاويته $\frac{4\pi}{3}$.

ب-لدينا $\frac{3i}{3}=i$ $=\frac{3i}{1-(-2)}$ ومنه نسبة التحاكي h هي -2 و مركزه النقطة $\Omega(0;1)$.

جـ- لدينا $S=h\circ r$ ،

لدينا r هو تشابه مباشر مركزه النقطة $\Omega(0;1)$ و نسبته 1 وزاويته $\frac{4\pi}{3}$ و h هو تشابه مباشر مركزه النقطة $\Omega(0;1)$ و نسبته 2 وزاويته $-\pi$ ومنه S هو التشابه المباشر الذي مركزه النقطة $\Omega(0;1)$ ذات اللاحقة i (نفس المركز) ونسبته 2 (جداء النسبتين) وزاويته $\frac{\pi}{3}$ (مجموع الزاويتين) . وتكون عبارته المركبة هي $z'-i=2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)$ أي $z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)+i$.

4.لدينا E هي صورة O بالتشابه المباشر $S_3=S\circ S\circ S$ الذي مركزه Ω ونسبته 6 وزاويته $\pi=\frac{3\pi}{3}$ ومنه $(\overrightarrow{\Omega O},\overrightarrow{\Omega E})=\pi+2k\pi$ وهذا يعني أن النقط O,Ω و E في استقامية .

5.أ-لدينا $z=2e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}$ تكافيء $z=2e^{i\theta}+i$ تكافيء $z-i=2e^{i\theta}$ ومنه $|z-z_\Omega|=2$ أي $\Omega M=2$ وعليه (Γ) هي الدائرة التي مركزها $\Omega(0;1)$ ذات اللاحقة i ونصف قطرها 2 .

ب-بما أن $S(\Omega)=\Omega$ فإن (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S هي الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها $R=2\times2=4$.

التمرين الثالث :

1.أ-الشعاع $\overrightarrow{AB}(2;1;-1)$ شعاع توجيه لـلمستقيم (AB) ومنه $\boxed{\begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \quad ,t\in\mathbb{R} \\ z=2-t \end{cases}}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (AB).

ب-الشعاع $\vec{u}(1;0;-1)$ شعاع توجيه لـلمستقيم (Δ) ، الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطين خطيا وعليه المستقيمين (AB) و (Δ) غير متوازيين فهما إما متقاطعين أو ليسا من نفس المستوي ، لنفرض أنهما متقاطعين عندئذ :

$\begin{cases} -1+2t=2+\alpha \\ t=-2 \\ 2-t=-1-\alpha \end{cases}$ أي $\begin{cases} -3+2t=\alpha \\ t=-2 \\ 3+t=\alpha \end{cases}$ وهذه الجملة لا تقبل حلا ، نستنتج إذن أن (AB) و (Δ) ليسا من نفس المستوي .

2.أ-الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ يوازيان المستوي (P) وهما غير معدومين و غير مرتبطين خطيا فهما يشكلان أساسا للمستوي (P) وعليه من أجل كل نقطة M من (P) يوجد عددان حقيقيان μ,λ بحيث $\overrightarrow{AM}=\mu\overrightarrow{AB}+\lambda\vec{u}$ ومنه

$\begin{cases} x+1=2\mu+\lambda \\ y=\mu \\ z-2=-\mu-\lambda \end{cases}$ ومنه $\boxed{\begin{cases} x=-1+2\mu+\lambda \\ y=\mu \\ z=2-\mu-\lambda \end{cases}}$ وهو تمثيل وسيطي للمستوي (P).

ب- $\begin{cases} x=-1+2\mu+\lambda \\ y=\mu \\ z=2-\mu-\lambda \end{cases}$ تكافيء $\begin{cases} x=-1+2y+\lambda & \cdots(1) \\ y=\mu \\ z=2-y-\lambda & \cdots(2) \end{cases}$ وبجمع (1) و (2) نجد $x+z=1+y$ ومنه

$\boxed{x-y+z-1=0}$ وهي معادلة ديكارتية للمستوي (P).

3.أ- لدينا $\overrightarrow{AM}(1+2\beta+1;1+\beta-0;1-\beta-2)$ أي $\overrightarrow{AM}(2\beta+2;1+\beta;-\beta-1)$ ومنه $\overrightarrow{AM}=(\beta+1)\overrightarrow{AB}$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ مرتبطان خطيا وعليه النقط B,A و M في استقامية أي أن $M\in(AB)$.

ب- M المسقط العمودي لـ N على (P) معناه $\begin{cases} \overrightarrow{MN}\bullet\vec{u}=0 \\ \overrightarrow{MN}\bullet\overrightarrow{AB}=0 \end{cases}$ ولدينا $\overrightarrow{MN}(1+\alpha-2\beta;-3-\beta;-2-\alpha+\beta)$ و منه

$\begin{cases} 1+\alpha-2\beta+2+\alpha-\beta=0 \\ 2(1+\alpha-2\beta)-3-\beta 2+\alpha-\beta=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2\alpha-3\beta+3=0 \\ 3\alpha-6\beta-1=0 \end{cases}$ بحل هذه الجملة نجد أن $(\alpha,\beta)=\left(-5,-\frac{7}{3}\right)$ أي أن

$\boxed{M\left(-\frac{11}{3};-\frac{4}{3};\frac{10}{3}\right)}$ و $\boxed{N(-3;-2;4)}$.

جـ- لدينا $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{|-3-(-2)+4-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=d(N,(P))$ بطريقة اخرى

$$d(N,(P))=MN=\sqrt{\left(-3+\frac{11}{3}\right)^2+\left(-2+\frac{4}{3}\right)^2+\left(4-\frac{10}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{12}{9}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

مساحة المثلث ABN هي $S(ABN)=\frac{1}{2}\times AB\times d(N,(P))=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\boxed{\sqrt{2}}$

التمرين الرابع

$I-1$. أ- لدينا $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty}$ و $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1}$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{e^x}=0$.

ب- من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $g'(x)=2xe^{-x}-(x^2-1)e^{-x}=\boxed{(-x^2+2x+1)e^{-x}}$ وعليه إشارة $g'(x)$ من إشارة ثلاثي الحدود $-x^2+2x+1$ الذي له جذرين هما $1-\sqrt{2}$ و $1+\sqrt{2}$ وعليه : إشارة $g'(x)$ هي

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

أي أن الدالة g متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty,1-\sqrt{2}]$ و $[1+\sqrt{2},+\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-0.25	$\nearrow$	1.43	$\searrow$	1

جدول التغيرات

2.أ- من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]-\infty,1-\sqrt{2}]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\times g(1-\sqrt{2})<0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $]-\infty,1-\sqrt{2}]$.

كذلك الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$ و $g(1-\sqrt{2})\times g(1+\sqrt{2})\approx-0.25\times1.43<0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$.

الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1+\sqrt{2},+\infty[$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1>0$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ لا تقبل حلا على المجال $[1+\sqrt{2},+\infty[$ إذن نستخلص أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$. لدينا $g(0)=1+(0-1)e^0=1-1=0$ ومنه أحد الحلين هو 0 ولدينا $g(-0.8)\times g(-0.7)=\left[1+\left((-0.8)^2-1\right)e^{0.8}\right]\times\left[1+\left((-0.7)^2-1\right)e^{0.7}\right]\simeq0,2\times(-0.03)<0$ أي أن الحل الثاني α يحقق $-0.8<\alpha<-0.7$.

ب- إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II–1.أ- $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$ (واضحة) ،

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$ لأن $\lim_{x\to+\infty}(x+1)^2e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{e^x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$.

ب – لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}-(x+1)^2e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{(x+1)^2}{e^x}=0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

جـ- بما أن $f(x)-x=-(x+1)^2e^{-x}\le 0$ من اجل كل عدد حقيقي x فإن (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) مع كون (Δ)و (C_f) يشتركان في النقطة ذات الفاصلة -1.

2.أ- من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x)=1-\left[2(x+1)e^{-x}-(x+1)^2e^{-x}\right]=1-\left[2x+2-x^2-2x-1\right]e^{-x}$ أي $f'(x)=1-(-x^2+1)e^{-x}=1+(x^2-1)e^{-x}=g(x)$.

ب- جدول تغيرات f

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

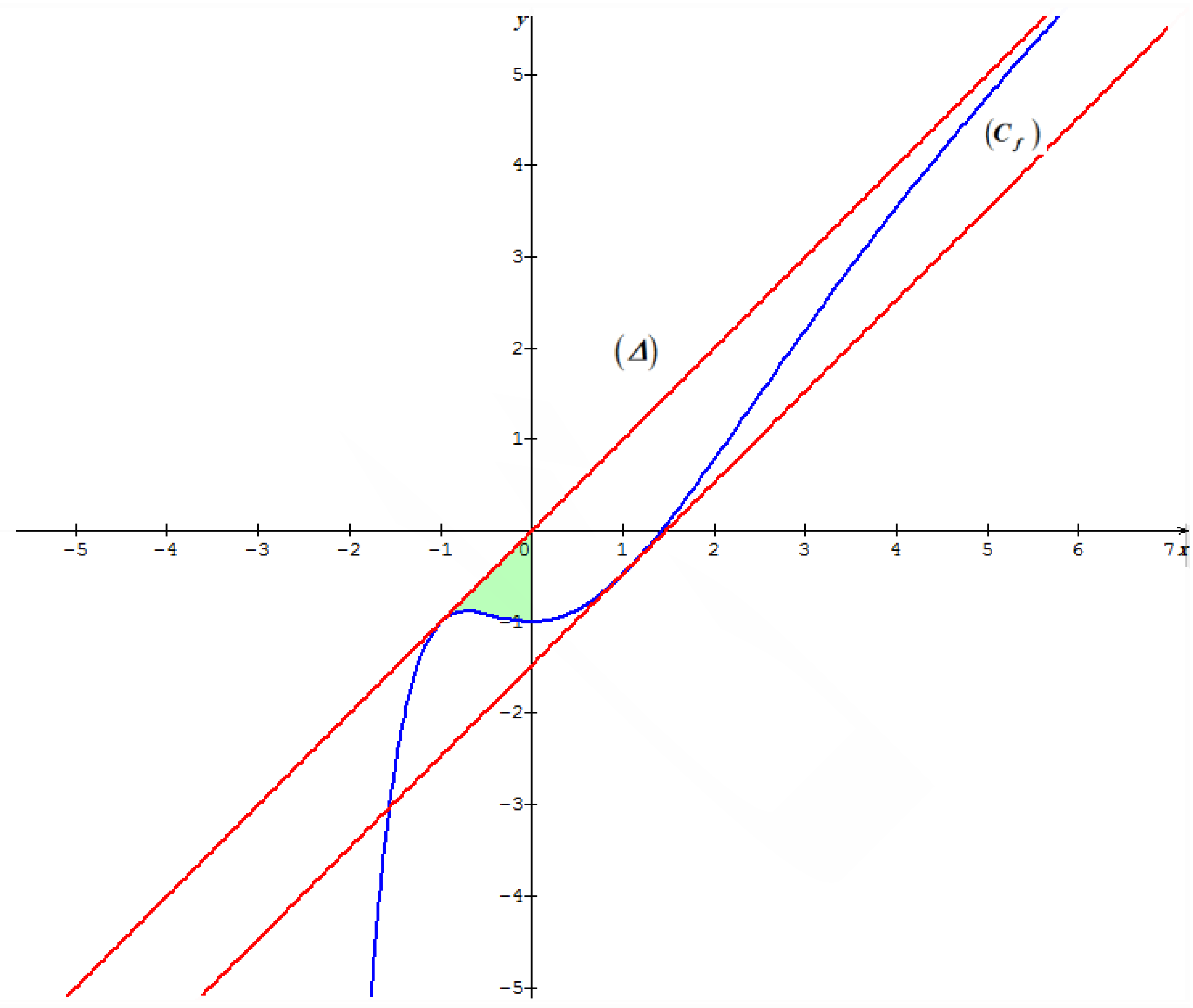
3.أ- $f'(x)=1$ معناه $g(x)=1$ أي $1+(x^2-1)e^{-x}=1$ ومنه $(x^2-1)e^{-x}=0$ ومنه $x=1$ أو $x=-1$.

وعليه (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما 1،

<u>عند $x=1$:</u> لدينا $f'(1)=1$ و $f(1)=1-\frac{4}{e}$ ومنه $y=1\times(x-1)+1-\frac{4}{e}$ أي $\boxed{y=x-\frac{4}{e}}$ وهي معادلة لمماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x=1$.

<u>عند $x=-1$:</u> لدينا $f'(-1)=1$ و $f(-1)=-1$ ومنه $y=1\times(x+1)-1$ أي $\boxed{y=x}$ وهي معادلة لمماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x=-1$. وهو المستقيم (Δ).

ب- تمثيل (Δ) والمماسين و (C_f).



جـ- $(x+1)^2+me^x=0$ معناه $m=-(x+1)^2e^{-x}$ ومنه $x+m=x-(x+1)^2e^{-x}=f(x)$ ومنه حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x+m$ (يوازي المماسين) .

من التمثيل البياني لدينا

إذا كان $m<-\frac{4}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا .

إذا كان $m=-\frac{4}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما حل مضاعف $(x=1)$.

إذا كان $-\frac{4}{e}<m<0$ فإن المعادلة تقبل ثلاثة حلول مختلفة .

إذا كان $m=0$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا $(x=-1)$.

إذا كان $m>0$ فإن المعادلة لا تقبل حلا .

4.أ- من اجل كل عدد حقيقي x لدينا

$H'(x)=(-2x-4)e^{-x}-(-x^2-4x-5)e^{-x}=(x^2+2x+1)e^{-x}=(x+1)^2e^{-x}$ ومنه الدالة H دالة أصلية للدالة $x\mapsto(x+1)^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب- لتكن A المساحة المطلوبة محسوبة بوحدة المساحة عندئذ :

$$A=\int_{-1}^{0}(x-f(x))dx=\int_{-1}^{0}(x+1)^2e^{-x}dx=\left[H(x)\right]_{-1}^{0}=H(0)-H(-1)=\boxed{-5+2e}$$

وعليه مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$ محسوبة بالسنتيمتر المربع هي $\boxed{4(2e-5)=8e-20\,cm^2}$ أي بالتقريب $\boxed{\simeq 1.75\,cm^2}$

$III-1$.لدينا $u_0=\alpha$ ومنه $-1\le u_0\le\alpha$ أي أن الخاصية محققة من أجل $n=0$.

نفرض ان $-1\le u_n\le\alpha$ لكل عدد طبيعي n ونبين أن $-1\le u_{n+1}\le\alpha$.

لدينا $-1\le u_n\le\alpha$ ولكون الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-1;\alpha]$ فإن $f(-1)\le f(u_n)\le f(\alpha)$ $(*)$

و لدينا $f(-1)=-1$ و من السؤال $II-1$.جـ وجدنا أن $f(x)-x\le 0$ من اجل كل عدد حقيقي x فإن $f(\alpha)-\alpha\le 0$ أي $f(\alpha)\le\alpha$ ومنه : $(*)$ تكافيء $-1\le u_{n+1}\le\alpha$ أي أن الخاصية محققة من أجل $n+1$ وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1\le u_n\le\alpha$.

2. لدينا $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n\le 0$ (لأن $f(x)-x\le 0$ من اجل كل عدد حقيقي x) ومنه المتتالية (u_n) متناقصة .

3. المتتالية (u_n) محدودة ورتيبة (متناقصة) فهي إذن متقاربة . لتكن ℓ نهايتها عندئذ $\lim u_{n+1}=\lim u_n=\ell$ أي $\lim f(u_n)=\lim u_n=\ell$ ومنه $\ell-(\ell+1)^2e^{-\ell}=\ell$ أي أن $(\ell+1)^2e^{-\ell}=0$ ومنه $\boxed{\lim u_n=\ell=-1}$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2014

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المــدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط : $A\left(2;1;-1\right)$ ، $B\left(-1;2;4\right)$ ، $C\left(0;-2;3\right)$ و $D\left(1;1;-2\right)$ والمستوي (P) المعرف بالمعادلة الديكارتية : $2x-y+2z+1=0$

المطلوب: أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية:

1) النقط A ، B و C تعين مستويا.

2) المستقيم (AC) محتوى في المستوي (P)

3) $x-2y-z-1=0$ هي معادلة للمستوي (ACD)

4) $\begin{cases} x=2t \\ y=-2+3t \\ z=3-4t \end{cases}$ ؛ $t\in\mathbb{R}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم (AC)

5) المسافة بين النقطة D والمستوي (P) تساوي $\frac{3}{2}$

6) النقطة $E\left(-2;-1;1\right)$ هي المسقط العمودي للنقطة C على (P)

7) سطح الكرة ذات المركز D و نصف القطر $\frac{\sqrt{6}}{2}$ هو مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM}=0$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $\left(z-1-2i\right)\left(z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}\right)=0$

2) A ، B ، C و D نقط من المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ لاحقاتها على الترتيب: $z_A=1+2i$ ، $z_B=1+\sqrt{3}+i$ ، $z_C=1+\sqrt{3}-i$ و $z_D=1-2i$

أ) بيّن أنّ: $AB=CD$ و (AD) يوازي (BC)

ب) تحقّق أنّ : $\frac{z_A+z_C}{2}\neq\frac{z_B+z_D}{2}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$

3) أ) بيّن أنّ: $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

استنتج أن D هي صورة A بتشابه مباشر مركزه B يطلب تعيين نسبته وزاويته.

ب) بيّن أنّ المثلث ADB قائم وأن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.

جـ) استنتج إنشاء للرباعي $ABCD$

<u>التمرين الثالث</u>: (04 نقاط)

1) نعتبر المعادلة (E): $2013x-1962y=54$ حيث x و y عددان صحيحان .

أ) احسب $PGCD(2013,1962)$

ب) استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا .

ج) بيّن أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن: $x\equiv 0[6]$

د) استنتج حلاّ خاصّا (x_0,y_0) حيث $74<x_0<80$ ثم حل المعادلة (E)

2) نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث (x,y) حل للمعادلة (E)

أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d؟

ب) عيّن قيم العددين الطبيعيين a و b حيث: $671a-654b=18$ و $PGCD(a,b)=18$

<u>التمرين الرابع</u>: (06 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(2-x)e^x-1$

1) ادرس تغيرات الدالة g

2) بيّن أنّ للمعادلة: $g(x)=0$ في $\mathbb{R}$ حلان α و β حيث $-1{,}2<\alpha<-1{,}1$ و $1{,}8<\beta<1{,}9$

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ وفسّر النتيجتين هندسيا .

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-x)^2}$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بيّن أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$ واستنتج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$

4) احسب $f(1)$ ثم ارسم المنحنى (C_f)

5) λ عدد حقيقي أكبر أو يساوي 1

أ) احسب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$ حيث: $a(\lambda)=\int_1^{\lambda}[f(x)-1]\,dx$

ب) احسب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$

الموضـــوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

A و B النقطتان اللتان لاحقتاهما على الترتيب: $a=-2+6i$ و $b=-1+2i$

1) اكتب العدد المركب $1+i$ على شكل أسي .

2) S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}z+2$

أ) D النقطة ذات اللاحقة d حيث $d=2i$، جد لاحقة النقطة D' صورة D بالتحويل S . ماذا تستنتج؟

ب) بيّن أنّ: $z'-d=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}(z-d)$ واستنتج طبيعة وعناصر التحويل S

3) (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $3x+5y=11$

أ) تحقّق أنّ النقطة $M_0(-3;4)$ تنتمي إلى (Δ) ثم عين نقط (Δ) التي إحداثياتها أعدادا صحيحة.

ب) M'_0 صورة M_0 بالتحويل S. بيّن أن المستقيمين (BM'_0) و (BA) متعامدان.

4) x و y عددان صحيحان من المجال $[-5;5]$.عين مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي بحيث يكون المستقيمان (BA) و (BM') متعامدين، حيث M' هي صورة M بالتحويل S

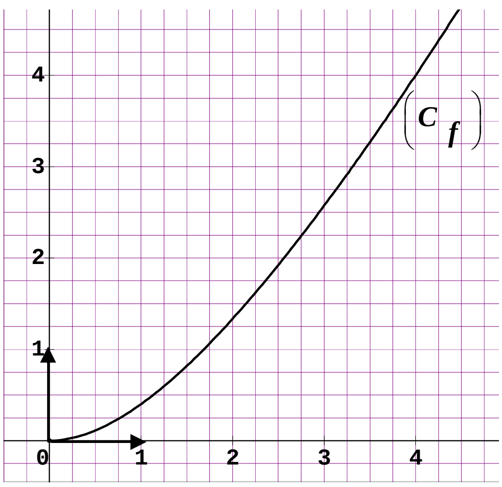
التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{2x^2}{x+4}$. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ كما هو مبين في الشكل أدناه.

1) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما.

2) (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ: $U_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n؛ $U_{n+1}=f(U_n)$

(Δ) المستقيم الذي معادلته $y=x$



أ) باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثّل، على حامل محور الفواصل، الحدود: U_0، U_1 ، U_2 ، U_3 و U_4 دون حسابها.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها.

3) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n؛ $0\le U_n\le 3$

ب) بيّن أنّ المتتالية (U_n) متناقصة .

ج) استنتج أنّ (U_n) متقاربة.

4) أ) ادرس إشارة العدد $7U_{n+1}-6U_n$ واستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n؛ $0\le U_{n+1}\le\frac{6}{7}U_n$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n؛ $0\le U_n\le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$

ج) احسب نهاية المتتالية (U_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A\left(1;1;3\right)$

و $\vec{u}\left(1;2;-2\right)$ شعاع توجيه له . (Δ') المستقيم المعرف بجملة المعادلتين: $\begin{cases} x+z=0 \\ y=3 \end{cases}$

1) جد تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (Δ) و (Δ')

2) بيّن أنّ (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي.

3) (P) المستوي الذي يشمل (Δ') و يوازي (Δ). بيّن أن معادلة المستوي (P) هي: $2x+y+2z-3=0$

4) $M(1+t;1+2t;3-2t)$ نقطة كيفية من المستقيم (Δ)، حيث $t\in\mathbb{R}$. احسب d المسافة بين M والمستوي (P)

5) أ) عيّن إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)، ثم عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ'') الذي يشمل A' ويوازي (Δ)

ب) بيّن أنّ (Δ') و (Δ'') يتقاطعان في النقطة $B(1;3;-1)$

6) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f\left(t\right)=BM^2$

أ) بيّن أنّ: $f\left(t\right)=9t^2-24t+20$

ب) بيّن أنّ f تقبل قيمة حدية صغرى $f\left(t_0\right)$ يطلب تعيين t_0 و $f\left(t_0\right)$

جـ) تحقّق أنّ $d=\sqrt{f(t_0)}$

التمرين الرابع: (05.5 نقاط)

1) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بــ : $f\left(x\right)=\left(1+2\ln x\right)\left(-1+\ln x\right)$

$\left(C_f\right)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

أ) ادرس تغيرات الدالة f

ب) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى $\left(C_f\right)$ في النقطة ذات الفاصلة e (حيث e أساس اللوغاريتم النيبري).

جـ) عيّن فواصل نقط تقاطع $\left(C_f\right)$ مع حامل محور الفواصل ثم ارسم $\left(C_f\right)$ على المجال $\left]0;e^2\right[$

2) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بــ : $g\left(x\right)=1-\ln x$

$\left(C_g\right)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) ادرس تغيرات الدالة g

ب) عيّن الوضع النسبي للمنحنيين $\left(C_f\right)$ و $\left(C_g\right)$ ثم ارسم $\left(C_g\right)$ على المجال $\left]0;e^2\right[$

3) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ: $h\left(x\right)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$

أ) احسب $h'\left(x\right)$ واستنتج دالة أصلية للدالة : $x\mapsto\left(\ln x\right)^2$ على $]0;+\infty[$

ب) احسب العدد: $\int_{\frac{1}{e}}^{e}[f(x)-g(x)]dx$

الحل المفصل لامتحان شهادة البكالوريا مادة الرياضيات شعبة الرياضيات لسنة 2014

حل الموضوع الأول

حل التمرين الأول:

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير

1) صحيح

التبرير: لدينا $A(2;1;-1)$ ، $B(-1;2;4)$ ، $C(0;-2;3)$ ومنه $\overrightarrow{AB}(-3;1;5)$ ، $\overrightarrow{AC}(-2;-3;-4)$
وعليه فإنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ ومنه النقط A ، B و C تعين مستو.

2) خطأ

التبرير: لأن $\left(A\notin(p)\right)$ وذلك لأن إحداثيات A لا تحقق معادلة (p) : $2(2)-(1)+2(-1)+1=2\neq 0$.

3) صحيح

التبرير: لدينا $A(2;1;-1)$ ، $C(0;-2;3)$، $D(1;1;-2)$ ومنه $\overrightarrow{AC}(-2;-3;4)$ ، $\overrightarrow{AD}(-1;0;-1)$
وعليه فإنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ ومنه النقط A ، C و D تعين مستو. هذا من جهة
ومن جهة أخرى: إحداثيات النقط A ، C و D تحقق معادلة $x-2y-z-1=0$.

$(2)-2(1)-(-1)-1=0$، $(0)-2(-2)-(3)-1=0$، $(1)-2(1)-(-2)-1=0$

4) صحيح.

التبرير: إحداثيات كل من A و C تحقق التمثيل الوسيطي $\begin{cases}x=2t\\y=-2+3t\\z=3-4t\end{cases}$

$\begin{cases}2=2t\\1=-2+3t\\-1=3-4t\end{cases};t=1$ ، $\begin{cases}0=2t\\-2=-2+3t\\3=3-4t\end{cases};t=0$

1) خطأ

التبرير:

$$d(D;(p))=\frac{|2(1)-(1)+2(-2)+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{2}{3}\neq\frac{3}{2}$$

2) صحيح

التبرير: لأن $E\in(p)$ وذلك لأن إحداثياتها تحقق معادلة (p): $(2(-2)-(-1)+2(1)+1=2\neq 0)$.

و لأن $(EC)\perp(p)$ وذلك لأن $\overrightarrow{EC}(2;-1;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (p).

تبرير آخر: لأن $d(C;(p))=EC$

$$d(C;(p))=\frac{|2(0)-(-2)+2(3)+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3; EC=\sqrt{(0+2)^2+(-2+1)^2+(3-1)^2}=3$$

3) **خطأ**

التبرير: لأن النقطة D ليست منتصف القطعة $[AC]$

حل التمرين الثاني:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(z-1-2i)\left(z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}\right)=0$:

$(z-1-2i)\left(z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}\right)=0$ معناه

$$\begin{cases} z-1-2i=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . e_1 \\ \text{أو} \\ z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}=0 \ldots e_2 \end{cases}$$

المعادلة e_1 حلها $z_0=1+2i$ و المعادلة e_2 نحلها باستعمال المميز المختصر حيث $\Delta'=-1=i^2$ وحلاها هما $z_1=1+\sqrt{3}+i$ و $z_2=1+\sqrt{3}i-1$.

ومنه حلول المعادلة هي $S=\left\{1+2i; z_1=1+\sqrt{3}+i; z_1=1+\sqrt{3}-i\right\}$

2)

أ) تبيين أن $AB=CD$ و (AD) يوازي (BC)

$AB=|z_B-z_A|=\left|\sqrt{3}-i\right|=2\,; CD=|z_D-z_C|=\left|-\sqrt{3}-i\right|=2\,;\ AB=CD$

$z_{\overrightarrow{BC}}=z_C-z_B=-2i\,;\ z_{\overrightarrow{AD}}=z_D-z_A=-4i\,; \overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}\,; (BC)\,//\,(AD)$

ب) التحقق أن $\frac{z_B+z_D}{2}\neq\frac{z_A+z_C}{2}$ واستنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$

$$\frac{z_B+z_D}{2}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\,;\ \frac{z_A+z_C}{2}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\,;\ \frac{z_B+z_D}{2}\neq\frac{z_A+z_C}{2}$$

استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$:

بما أن $\frac{z_A+z_C}{2}\neq\frac{z_B+z_D}{2}$ فإن قطرا الرباعي $ABCD$ ليسا متناصفين وبما أن $AB=CD$ و $(AD)\,//\,(BC)$ ف الرباعي $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين.

3) .

أ) تبيين أن $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{3}i\left(i+\sqrt{3}\right)}{-\sqrt{3}+i}=\sqrt{3}i=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

بما أن $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ فإن $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ و $BD=\sqrt{3}AB$ ومنه النقطة D صورة النقطة A بتشابه مباشر الذي مركزه B ونسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

ب) تبيين أن المثلث ABD قائم

بما أن $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ فإن $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ومنه أن المثلث ABD قائم في B

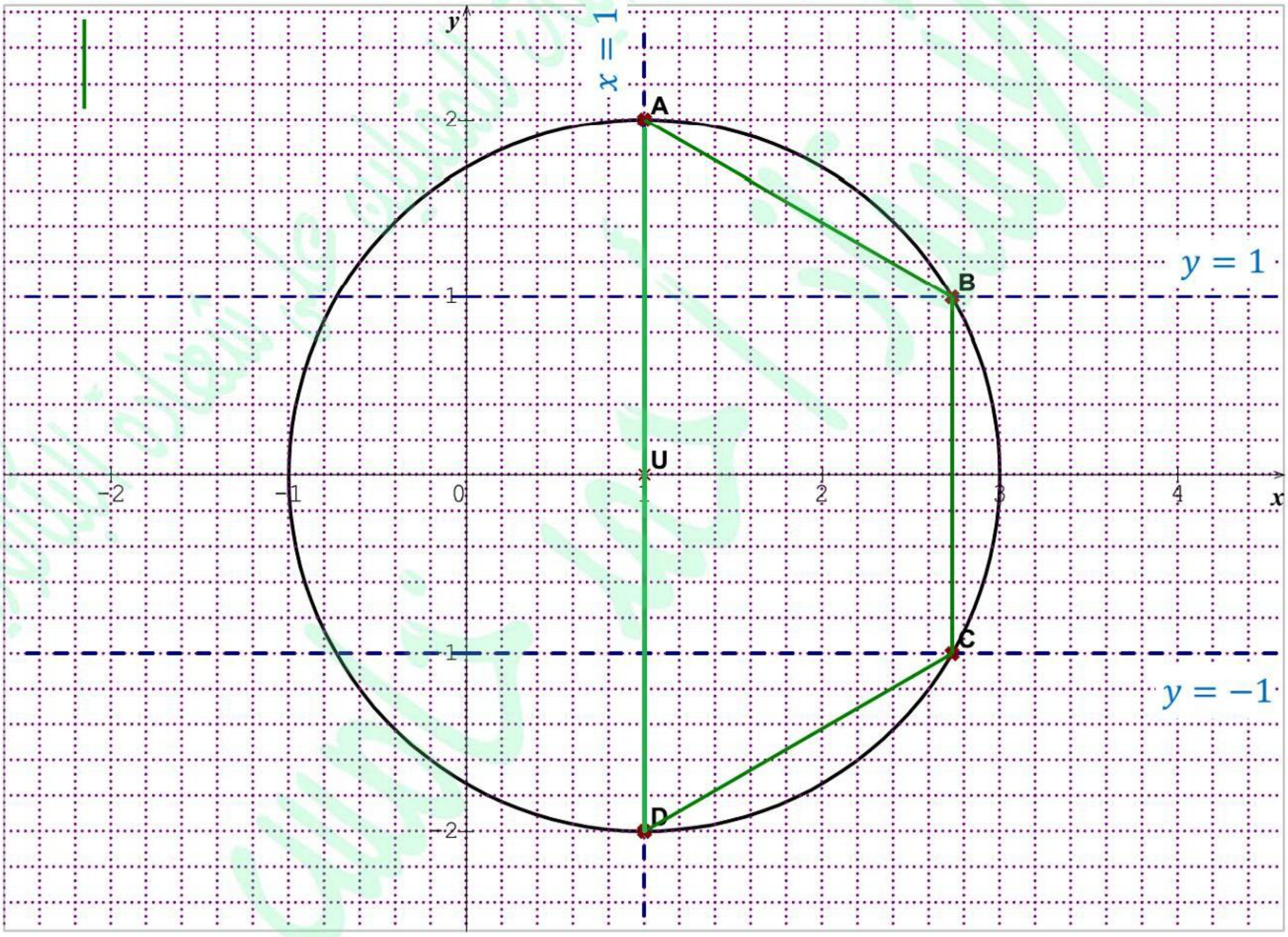
تبيين أن النقط A، B، C و D تنتمي الى نفس الدائرة مع تحديد مركزها و نصف قطرها

$$|z_A - 1| = |2i| = 2; |z_B - 1| = |\sqrt{3} + i| = 2; |z_C - 1| = |\sqrt{3} - i| = 2; |z_D - 1| = |-2i| = 2$$

بوضع النقطة U صورة العدد 1 نفسر ما سبق بأن: $AU = BU = CU = DU = 1$ ومنه النقط A، B، C و D تنتمي الى الدائرة نرمز لها (c) والتي مركزها U ونصف قطرها 2.

استنتاج إنشاء للرباعي $ABCD$

لدينا النقط A، B، C و D تنتمي الى الدائرة (c) التي مركزها U ونصف قطرها 2 حيث النقطتين A و D هما النقطتين من الدائرة (c) التي فاصلتيهما تساوي 1 (تقاطع الدائرة والمستقيم الذي معادلته $x = 1$)،النقطة B هي النقطة من الدائرة التي ترتيبها يساوي 1 وتنتمي إلى الربع الأول من الدائرة أما النقطة (c) (تقاطع الدائرة والمستقيم الذي معادلته $y = 1$ في الربع الأول منها) ، C هي النقطة من الدائرة التي ترتيبها يساوي -1 وتنتمي إلى الربع الرابع من الدائرة (c) (تقاطع الدائرة والمستقيم الذي معادلته $y = 1$ في الربع الرابع منها).



حل التمرين الثالث:

1) . $2013x + 1962y = 54 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (E)$

أ) حساب $PGCD(2013; 1962)$

بما أن:

$$2013 = 1962 \times 1 + 51;\, 1962 = 51 \times 38 + 24;\, 51 = 24 \times 2 + 3;\, 24 = 3 \times 8 + 0$$

فإن:

$PGCD(2013; 1962) = 3$

ب) استنتاج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}$

بما أن 54 يقبل القسمة على $PGCD(2013; 1962)$ فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}$

ج) تبيين أنه إذا كانت $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 0[6]$

المعادلة (E) تكافئ: $671x - 654y = 18$

$(x; y)$ حل للمعادلة (E) معناه $671x - 654y = 18$ ومنه $671x = 654y + 18$ أي

$671x \equiv 654y + 18[6]$ وبما أن $671 \equiv 5[6]$ و $654 \equiv 0[6]$ و $18 \equiv 0[6]$ فإن $5x \equiv 0[6]$

وبما أن 5 و 6 أوليان فيما بينهما فانه حسب غوص منه $x \equiv 0[6]$

د) استنتاج الحل الخاص $(x_0; y_0)$ وحل المعادلة (E)

بما أن $74 < x_0 < 80$ و $x \equiv 0[6]$ فإن $x_0 = 78$ وبالتعويض في المعادلة (E) نجد $y_0 = 80$ أي الحل الخاص المطلوب هو $(x_0; y_0) = (78; 80)$

حل المعادلة (E):

لدينا $\begin{cases} 671x - 654y = 18 \\ 671(78) - 654(80) = 18 \end{cases}$ وبالطرح: نجد $671(x - 78) = 654(y - 80)$ ومنه 654 يقسم $671(x - 78)$ لكن 671 و 654 أوليان فيما بينهما ومنه حسب غوص 654 يقسم $(x - 78)$ أي

$x = 654k + 78$ وبالتعويض في (E) نجد $y = 671k + 80$

(2

أ) القيم الممكنة لـ d:

$(x;y)$ حل للمعادلة (E) معناه $671x-654y=18$ ومنه قيم الممكنة لـ d هي قواسم العدد 18 أي

ب) تعيين العددين الطبيعيين a و b:

لدينا $671a-654b=18$ ومنه $(a;b)$ هي من شكل حلول المعادلة (E) أي $\boldsymbol{a=654k}$ و

$\boldsymbol{b=671k+80}$ ولدينا أيضا $PGCD(a;b)=18$ ومنه:

$\begin{cases} a\equiv 0[18] \\ b\equiv 0[18] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 654k+78\equiv 0[18] \\ 671k+80\equiv 0[18] \end{cases}$ أوبما أن $\begin{cases} 654\equiv 6[18] \\ 78\equiv 6[18] \\ 671\equiv 5[18] \\ 80\equiv 8[18] \end{cases}$ فإن:

$$\begin{cases} 6k+6\equiv 0[18] \dots\dots e_1 \\ 5k+8\equiv 0[18] \dots\dots e_2 \end{cases}$$

$e_1+(-1)\times e_2$: $k-2\equiv 0[18]$ ومنه $k\equiv 2[18]$ أي $k=18\alpha+2$ حيث α عدد طبيعي

ومنه

$$a=654(18\alpha+2)+78=11772\alpha+1386$$
$$b=671(18\alpha+2)+80=12078\alpha+1422$$

حل التمرين الرابع:

ا. $g(x)=(2-x)e^x-1;\ D_g=\mathbb{R}$

1) دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 2e^x-xe^x-1=-1\ ;\ \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(2-x)e^x-1=-\infty$$

المشتق وإشارته:

الدالة g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$g'(x)=-e^x+(2-x)e^x=(1-x)e^x$$

ومنه إشارة المشتق من إشارة $(1-x)$ وعليه $g'(x)>0$ من أجل $x\in]-\infty;1[$ و $g'(x)<0$ من أجل $x\in]1;+\infty[$ و $g'(1)=0$

اتجاه التغير الدالة g على $\mathbb{R}$:

بما أن $g'(x)\geq 0$ من أجل $x\in]-\infty;1]$ فإن الدالة متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1]$ و $g'(x)\leq 0$ من أجل $x\in [1;+\infty[$ فإن الدالة متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة g:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	$-\infty$

2) تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;1]$ وبصفة خاصة على المجال $]-1,2;-1.1[$ و لدينا $g(-1,2)\times g(-1,1)<0$ (لأن $g(-1,2)\simeq -0.03; g(-1,1)\simeq 0.03$). ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha\in]0,7;0,8[$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;1]$ وبصفة خاصة على المجال $]1,8;1,9[$ و لدينا $g(1,8)\times g(1,9)<0$ (لأن $g(1,8)\simeq 0.2; g(1,9)\simeq -0.3$). ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد β حيث $\beta\in]1,8;1,9[$.

الخلاصة: المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $\alpha\in]0,7;0,8[$ و $\beta\in]1,8;1,9[$.

3) إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

بما أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين هما α و β مع $\alpha<\beta$ ومن دراسة تغيرات الدالة g يمكن استنتاج إشارتها والتي تكون كمايلي:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$\mathrm{g}(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II. $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$; $D_f=\mathbb{R}$

1) حساب نهاية f عند $-\infty$ و $+\infty$ وتفسير النتيجتين هندسيا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x}=0\,;\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)}=1$$

تفسير النتيجتين هندسيا

بما أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي $(\boldsymbol{xx'})$ بجوار $-\infty$.

و بما أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=1$ بجوار $+\infty$.

2) تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\frac{\mathrm{g}(x)}{(e^x-x)^2}$:

3) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\frac{e^{2x}-xe^x-e^{2x}+2e^x-1}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x(2-x)-1}{(e^x-x)^2}$$

ومنه من أجل كل عدد حقيقي x: $\boldsymbol{f'(x)=\frac{\mathrm{g}(x)}{(e^x-x)^2}}$

استنتاج تغير الدالة $\boldsymbol{f}$ وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $\boldsymbol{f'(x)}$ من إشارة $\mathbf{g}(\boldsymbol{x})$ لأن $(e^x-x)^2>0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[\beta;+\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;\beta]$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	1

4) تبيين أن $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}$ واستنتاج حصر لـ $f(\alpha)$ و $f(\beta)$:

لدينا: $\begin{cases} f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}-\alpha} \\ \text{و} \\ g(\alpha)=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}-\alpha} \\ \text{و} \\ (2-\alpha)e^{\alpha}-1=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}-x} \dots\dots\dots e_1 \\ \text{و} \\ e^{\alpha}=\frac{1}{2-\alpha} \dots\dots\dots e_2 \end{cases}$ بتعويض e_2 في e_1

نجد

$$f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}-x}=\frac{\frac{1}{2-\alpha}-1}{\frac{1}{2-\alpha}-x}=\frac{\frac{1-2+\alpha}{2-\alpha}}{\frac{1-2\alpha+\alpha^2}{2-\alpha}}=\frac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2}=\frac{1}{\alpha-1}\ ;\ \boldsymbol{f(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}}$$

استنتاج حصر لـ $f(\alpha)$ و $f(\beta)$:

لدينا $-1,2 < \alpha < -1,1$ ومنه $-2,2 < \alpha-1 < -2,1$ وبالقلب نجد $\frac{1}{-2,1} < \frac{1}{\alpha-1} < \frac{1}{-2,2}$ ومنه

$$-0.48 < f(\alpha) < -0.45$$

لدينا $1,8 < \beta < 1,9$ ومنه $0,8 < \beta-1 < 0,9$ وبالقلب نجد $\frac{1}{0,9} < \frac{1}{\beta-1} < \frac{1}{0,8}$ ومنه

$1.11 < f(\beta) < 1.25$. عبارة $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ نفسها لأن كلاهما يعدمان الدالة g.

4) حساب $f(1)$ ورسم المنحني (C_f)

$$f(1)=\frac{e^1-1}{e^1-1}=1$$

5) .

أ) حساب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$

$$a(\lambda)=\int_1^{\lambda}[f(x)-1]\,dx=\int_1^{\lambda}\frac{e^x-1}{e^x-x}-1\,dx=[\ln(e^x-x)-x]_1^{\lambda}$$
$$=\ln\left(e^{\lambda}-\lambda\right)-\lambda-\ln(e-1)+1$$

$$\boldsymbol{a(\lambda)=\ln\left(e^{\lambda}-\lambda\right)-\lambda-\ln(e-1)+1}$$

ب) حساب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to+\infty} a(\lambda) &= \lim_{\lambda\to+\infty} \ln\left(e^{\lambda}-\lambda\right)-\lambda-\ln(e-1)+1\\ &= \lim_{\lambda\to+\infty} \ln\left(e^{\lambda}-\lambda\right)+\ln e^{-\lambda}-\ln(e-1)+1\\ &= \lim_{\lambda\to+\infty} \ln\left[e^{-\lambda}\left(e^{\lambda}-\lambda\right)\right]-\ln(e-1)+1\\ &= \lim_{\lambda\to+\infty} \ln\left(1-\lambda e^{-\lambda}\right)-\ln(e-1)+2=-\ln(e-1)+1\end{aligned}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} a(\lambda) = -\ln(e-1)+1$$

صفحة دروس خاصة في مادة الرياضيات للمقبلين على شهادة البكالوريا
الأستاذ أحمد خامس

CH01R01BAC2015

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2015

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط $A(1;5;4)$ ، $B(10;4;3)$ ، $C(4;3;5)$ و $D(0;4;5)$.

1) أ) بيّن أنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية.

ب) بيّن أنّ النقط A ، B ، C و D من نفس المستوي.

جـ) استنتج أنّ النقطة D هي مرجّح النقط A ، B و C المرفقة بمعاملات يُطلب تعيينها.

د) عيّن إحداثيات النقطة E نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة D.

هـ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$ المحوري للقطعة $[AE]$.

2) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MD}-3\overrightarrow{MA}\right\|$.

3) أ) تحقق أن النقطة $F(1;8;10)$ تنتمي إلى المستوي $(\mathcal{P})$.

ب) المستقيم (FD) يقطع (Γ) في النقطتين G و H.

حدّد طبيعة الرباعي $AGEH$ ، ثمّ احسب مساحته.

4) (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة D ويعامد المستوي (AEH).

أ) بيّن أنّ الشعاع $\overrightarrow{AC}$ ناظمي للمستوي (AEH).

ب) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي t ، النقطة $N(3t;4-2t;5+t)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ).

جـ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي t ، حجم المجسم $NAGEH$ هو $v(t)$ حيث $v(t)=2|t|\sqrt{14}\ uv$.

(uv وحدة الحجوم).

د) عيّن إحداثيات كل من النقطتين N_1 و N_2 من (Δ) اللّتين يكون من أجليهما $v(t)=2\sqrt{3}\ uv$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C ، H و I لاحقاتها على الترتيب: $z_A = i$ ، $z_B = -2+i$ ، $z_C = -3$ ، $z_H = -3+4i$ و $z_I = -1-i$.

1) أ) مثّل النقط A ، B ، C ، H و I في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$.

ب) عيّن النسبة وزاوية للتشابه المباشر الذي مركزه B ويحوّل النقطة A إلى النقطة C.

2) عيّن z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

3) أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركّب $\dfrac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$.

ب) استنتج أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان.

جـ) بيّن أنّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

4) بيّن أنّ النقط G ، H و I في استقامية.

5) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z+1+i = \sqrt{5}e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

أ) بيّن أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة (Γ).

ب) عيّن طبيعة المجموعة (Γ) مع تحديد عناصرها المميّزة.

جـ) أنشئ المجموعة (Γ).

د) تحقّق أنّ النقطتين B و C تنتميان إلى المجموعة (Γ).

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $\left[1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53}\right]$ على 7.

2) أ) بيّن أنّ 89 عدد أوّلي.

ب) عيّن كل القواسم الطبيعية للعدد 7832.

جـ) بيّن أنّ العددين 981 و 977 أوّليان فيما بينهما.

3) x و y عددان طبيعيان غير معدومين قاسماهما المشترك الأكبر هو 2.

عيّن x و y علماً أنّ: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases}$.

4) a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أوّلي مع b و a أوّلي مع c.

أ) باستعمال مبرهنة بيزو ، برهن أنّ a أوّلي مع $b \times c$.

ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $PGCD(a;b^n) = 1$.

(يُرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر.)

جـ) استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962}.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرّفة بـ : $f(0)=1$ ، ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f(x)=1-x^2\ln x$.

$(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة f الممثل في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين.

ب) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)-1}{x}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

2) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.

ب) تحقق أنّ $1,531<\alpha<1,532$

4) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=f(|x|)$.

$(\mathcal{C}_g)$ المنحنى الممثل للدالة g في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) ادرس شفعية الدالة g .

ب) أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ على المجال $[-2;2]$.

5) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عيّن الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto x^2\ln x$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ ، والتي تنعدم من أجل القيمة 1.

6) t عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0;\alpha[$. نضع $F(t)=\int_t^{\alpha} f(x)dx$.

أ) اكتب العبارة $F(t)$ بدلالة t و α .

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي t من المجال $]0;\alpha[$ ، $F(t)=\dfrac{-3t\,f(t)-t^3-6t+\alpha^3+6\alpha}{9}$.

جـ) احسب $\lim\limits_{t \xrightarrow{>} 0} F(t)$.

7) m عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0;\alpha[$.

$\mathcal{S}(m)$ مساحة الدائرة ذات المركز المبدأ O ونصف القطر m .

نفرض أنّ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_g)$ ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما على الترتيب: $x=-\alpha$ و $x=\alpha$ ، هي: $\mathcal{A}$ حيث: $\mathcal{A}=\dfrac{2}{9}\left(\alpha^3+6\alpha\right)ua$

(ua وحدة المساحات).

أ) عيّن القيمة المضبوطة للعدد m حتى يكون $\mathcal{S}(m)=2\mathcal{A}$.

ب) علماً أنّ $3,140<\pi<3,142$ أعط حصرًا للعدد m .

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصّحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة ، في كل حالة من الحالات الأربع الآتية ، مع التعليل.

1) الحد العام للمتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ هو:

أ) $u_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$ ؛ ب) $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ؛ جـ) $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{3}{2}$.

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. مجموعة النقط M من المستوي، ذات اللاحقة z، حيث $|iz - 1 - i| = 3$ هي: أ) دائرة نصف قطرها 3 ولاحقة مركزها $1+i$.

ب) دائرة نصف قطرها 3 ولاحقة مركزها $1-i$.

جـ) دائرة نصف قطرها 3 ولاحقة مركزها $-1+i$.

3) a ، b ، c و d أعداد طبيعية غير معدومة وأصغر من أو تساوي 9.

$\overline{abcd}$ عدد طبيعي مكتوب في النظام العشري.

من أجل كل الأعداد a ، b ، c و d : يكون العدد $\overline{abcd}$ يقبل القسمة على 11 إذا وفقط إذا كان:

أ) العدد $(a-b+c-d)$ يقبل القسمة على 11.

ب) العدد $(a+b+c+d)$ يقبل القسمة على 11.

جـ) العدد $\overline{cd}$ المكتوب في النظام العشري، يقبل القسمة على 11.

4) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. مجموعة النقط M من الفضاء ذات الإحداثيات $(x;y;z)$ حيث

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}t - k \\ y = 2 - t + \frac{3}{2}k \\ z = -3 + 4t - 6k \end{cases} ;(t \in \mathbb{R});(k \in \mathbb{R})$$

هي: أ) المجموعة $\{A\}$ حيث $A(1;2;-3)$.

ب) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;2;-3)$ و $\vec{u}\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{2};-2\right)$ شعاع توجيه له.

جـ) المستوي الذي يشمل النقطة $A(1;2;-3)$ و $\vec{n}(3;-2;-1)$ شعاع ناظمي له.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - 2\left(1-\sqrt{3}\right)z + 8 = 0 \qquad \left(\text{لاحظ أنّ: } \left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3}\right)$$

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A و B نقطتان من المستوي ، لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = \left(1-\sqrt{3}\right) + i\left(1+\sqrt{3}\right)$ و $z_B = \overline{z_A}$.

2) أ) بيّن أنّ: $\dfrac{z_B}{z_A} = e^{-\frac{7\pi}{6}i}$.

ب) استنتج عمدة للعدد المركّب z_A.

ج) استنتج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

3) أ) حل ، في مجموعة الأعداد الصحيحة ، المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $7x-2y=1$.

ب) بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة ، حلا للمعادلة $7x-24y=12$ فإن x يكون مضاعفا للعدد 12.

ج) استنتج كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة ، حلولا للمعادلة $7x-24y=12$.

د) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماماً.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقطتين $A(2;0;0)$ و $B(-1;-5;-1)$.

(Δ_1) المستقيم الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(-1;2;-1)$ شعاع توجيه له.

(Δ_2) المستقيم المعرّف بالتمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x=-3-3t \\ y=2+2t \\ z=7+3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

(d) المستقيم الذي يشمل النقطة B و $\vec{v}(2;5;3)$ شعاع توجيه له.

1) بيّن أنّ المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) يتقاطعان في النقطة C يُطلب تعيين إحداثياتها.

2) بيّن أنّ المستقيمين (Δ_1) و (d) ليسا من نفس المستوي.

3) أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي $(\mathcal{P})$ الذي يشمل المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2).

ب) استنتج أنّ $4x+3y+2z-8=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$.

ج) تحقّق من أنّ النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي $(\mathcal{P})$.

4) أ) بيّن أنّه توجد نقطة وحيدة I من المستقيم (d) وتوجد نقطة وحيدة D من المستقيم (Δ_2) حيث تكون النقط A ، I و D في استقامية؛ يُطلب تعيين إحداثيات النقطتين I و D.

ب) بيّن أنّ النقطة I هي منتصف القطعة $[AD]$.

5) النقطة K مرجح الجملة المثقلة $\{(B;1),(I;2)\}$ والنقطة G المسقط العمودي للنقطة K على المستوي $(\mathcal{P})$.

أ) بيّن أنّ النقطة G هي مرجح النقط A ، C و D المرفقة بمعاملات يُطلب تعيينها.

ب) استنتج إحداثيات النقطة G.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرّفة بِـ: $f(0)=0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$.

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار.

2) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)}{x}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4) أ) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=0$.

ب) استنتج أنّ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$، يُطلب تعيين معادلة له.

5) g الدالة المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ: $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

6) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)>x$.

ب) استنتج وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

ج) أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

7) (u_n) المتتالية المعرّفة بِـ: $u_0=-3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<0$.

ب) حدّد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

ج) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ، ثمّ عيّن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

8) m عدد حقيقي. h_m الدالة ذات المتغيّر الحقيقي x المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ بِـ:

$$h_m(x)=xe^{\frac{1}{x}}-mx$$

أ) احسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m.

ب) باستعمال المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ، ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $h'_m(x)=0$.

تصحيح مادة الرياضيات شعبة الرياضيات بكالوريا 2015

الموضوع الأول

التمرين الأول :

1) أ) لدينا $\overrightarrow{AB}(9;-1;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(3;-2;1)$ بما أن $\frac{-2}{-1} \neq \frac{3}{9}$ و منه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا إذن النقط A و B و C ليست في استقامية.

ب) لدينا $\overrightarrow{AD}(-1;-1;1)$ تكون النقط A و B و C و D من نفس المستوي يعني أوجود عددين حقيقين α و β حيث $\overrightarrow{AD}=\alpha.\overrightarrow{AC}+\beta.\overrightarrow{AB}$ أي ان $\begin{cases}-1=3\alpha+9\beta \;....(1)\\ -1=-2\alpha-\beta \;....(2)\\ \;1=\alpha-\beta \;....(3)\end{cases}$ بطرح (2) من (3) نجد $2=3\alpha$ و منه $\alpha=\frac{2}{3}$ بالتعويض في (3) نجد ان $1=\frac{2}{3}-\beta$ و منه $\beta=-\frac{1}{3}$ بتعويض القيمتين في (1) نجد $-1=3\left(\frac{2}{3}\right)+9\left(\frac{-1}{3}\right)$ و منه $-1=2-3$ صحيحة و منه النقط من نفس المستوي .

ج)مما سبق نجد $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}.\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}.\overrightarrow{AB}$ و منه D مرجح النقط A و B و C المرفقة بالمعاملات 2 و -1 و 2 على الترتيب .

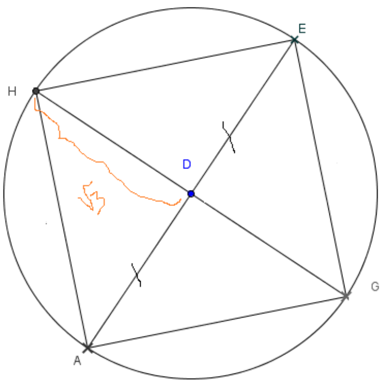
د)تعيين إحداثيات $E(x;y;z)$ نظيرة A بالنسبة D أي أن $\overrightarrow{ED}=-\overrightarrow{AD}$ و منه $\begin{cases}-x=1\\ 4-y=1\\ 5-z=-1\end{cases}$ و منه $\begin{cases}x=-1\\ y=3\\ z=6\end{cases}$ و منه $E(-1;3;6)$.

هـ)كتابة المعادلة الديكارتية للمستوي المحوري للقطعة $[AE]$ و منه شعاعه الناظيمي $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AE}(-2;-2;2)$ المعادلة من الشكل $-2x-2y+2z+d=0$ و هو يشمل منتصف القطعة $[AE]$ أي ان $-2\left(\frac{-1+1}{2}\right)-2\left(\frac{3+5}{2}\right)+2\left(\frac{6+4}{2}\right)+d=0$ و منه $0-8+10+d=0$ و منه $d=-2$. و منه $-2x-2y+2z-2=0$ إذن $x+y-z+1=0$.

2) تعين مجموعة النقط M حيث $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MD}-3\overrightarrow{MA}\|$ يكافئ $\|3\overrightarrow{MD}\|=\|3\overrightarrow{AD}\|$ لأن D مرجح الجملة $\{(C;2);(B;-1);(A;2)\}$ و منه $MD=AD$ مجموعة النقط سطح كرة مركزها D و نصف قطرها $AD=\sqrt{3}$.

3) أ) لدينا $F(1;8;10)$ نعويض الاحداثيات في المعادلة $(p): x+y-z+1=0$ و منه $1+8-10+1=0$ محققة .

ب)الرباعي $AGEH$ مربع و مساحته $S_{AGEH}=4\left(\frac{1}{2}DA^2\right)=2\times 3=6$ و لك الشكل التوضيحي



4) أ) لدينا $\overrightarrow{AC}(3;-2;1)$ و $\overrightarrow{AE}(-2;-2;2)$

و $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}=-6+4+2=0$ و منه $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE}$ متعامدان

و $\overrightarrow{FD}(-1;-4;-5)$ مرتبط خطيا مع الشعاع $\overrightarrow{DH}$ و النقطتان D و H من المستوي (AEH) و

$\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{AC}=-3+8-5=0$ و منه $\overrightarrow{DH}$ عمودي على $\overrightarrow{AC}$ و منه $\overrightarrow{AC}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطان خطيا من مستوي (AEH) فهو شعاع ناظيمي لهذا المستوي.

ب)لدينا $N(3t;4-2t;5+t)$ و منه $\overrightarrow{DN}(3t;-2t;\,t)$ و $\overrightarrow{AC}(3;-2;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و الشعاعان مرتبطان خطيا من اجل كل عدد حقيقي t و منه N تنتمي إلى (Δ) .

ج)المجسم $NAGEH$ هو مخروط (تصوروه برفع النقطة D للأعلى يشبه الخيمة) حجمه هو ثلث مساحة القاعدة في الارتفاع :

$v(t)=\frac{1}{3}S_{AGEH}\times DN=\frac{6}{3}\times\sqrt{(3t)^2+(-2t)^2+(t)^2}=2|t|\sqrt{14}\; u.v$ و هو المطلوب

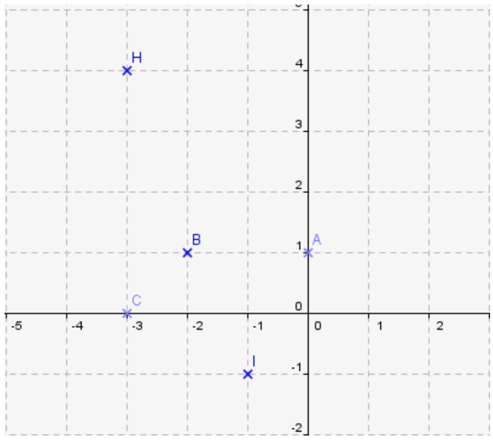
د)تعيين N_1 , N_2 .

$v(t)=2\sqrt{3}$ يعني ان $2|t|\sqrt{14}=2\sqrt{3}$ و منه $|t|=\sqrt{\frac{3}{14}}$ إذن $t=\sqrt{\frac{3}{14}}$ او $t=-\sqrt{\frac{3}{14}}$ و منه

$N_1\left(3\sqrt{\frac{3}{14}};4-2\sqrt{\frac{3}{14}};5+\sqrt{\frac{3}{14}}\right)$ و $N_2\left(-3\sqrt{\frac{3}{14}};4+2\sqrt{\frac{3}{14}};5-\sqrt{\frac{3}{14}}\right)$.

التمرين الثاني :

1) أ) تعليم النقط



ب)لدينا $-\frac{1+i}{2}=\frac{-3+2-i}{i+2-i}=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ و منه $\left|\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و هي نسبة التشابه و $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=\frac{5\pi}{4}$.هي زاوية و نسبة التشابه الذي يحول A إلى C و مركزه B .

2) تعيين z_G لاحقة مركز ثقل المثلث ABC لدينا $z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{i-2+i-3}{3}=\frac{-5+2i}{3}=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}i$.

3)أ) الكتابة على الشكل الجبري $\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}=\frac{-2+i+3}{-3+4i-i}=\frac{1+i}{-3+3i}=-\frac{1}{3}\frac{(1+i)^2}{2}=-\frac{1}{3}i$.

ب)مما سبق نستنتج أن $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CB}\right)=\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}\right)=-\frac{\pi}{2}$ و منه المستقيمين (AH) و (CB) متعامدان .

ج)لدينا $\frac{z_A-z_C}{z_H-z_B}=\frac{i+3}{-3+4i+2-i}=\frac{3+i}{-1+3i}=\frac{-i(-1+3i)}{(-1+3i)}=-i$ و منه $\left(\overrightarrow{BH},\overrightarrow{CA}\right)=\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_H-z_B}\right)=-\frac{\pi}{2}$ و منه المستقيمين (BH) و (CA) متعامدان أي ان H تنتمي للارتفاع المتعلق بالرأس B في المثلث ABC و لدينا مما سبق المستقيمين (AH) و (CB) متعامدان يعني ان H تنتمي للارتفاع المتعلق بالرأس A في المثلث ABC و منه فهي نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلث ABC .

4)لدينا $z_H-z_I=-3+4i+1+i=-2+5i$ و $z_H-z_G==-3+4i+\frac{5}{3}-\frac{2}{3}i=-\frac{4}{3}+\frac{10}{3}i=\frac{2}{3}(=-2+5i)$

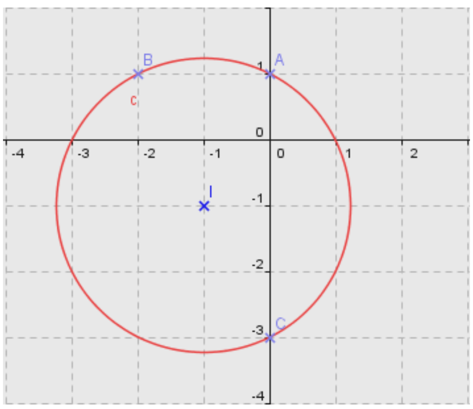
و منه $\overrightarrow{GH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IH}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{IH}$ و $\overrightarrow{GH}$ مرتبطان خطيا يعني ان النقط H و G و I في استقامية .

5)أ)(Γ) هي مجموعة النقط $M(z)$ حيث $z+1+i=\sqrt{5}e^{i\theta}$ و $\theta\in\mathbb{R}$

$A\epsilon(\Gamma)$ يعني أنه يوجد عدد حقيقي θ حيث $|z_A+1+i|=\left|\sqrt{5}e^{i\theta}\right|=\sqrt{5}$ و لدينا $z_A+1+i=1+2i$ و منه $|z_A+1+i|=\sqrt{5}$ و منه محققة .

ب)لدينا $|z+1+i|=\sqrt{5}$ أي أن $MI=\sqrt{5}$ و منه مجموعة النقط (Γ) هي الدائرة ذات المركز I و نصف القطر $\sqrt{5}$.

ج) إنشاء (Γ)



د) لدينا $|z_B+1+i|=|-2+i+1+i|=|-1+2i|=\sqrt{5}$ و منه B تنتمي إلى(Γ)

و$|z_C+1+i|=|-3+1+i|=|-2+i|=\sqrt{5}$ و منه C تنتمي إلى(Γ) .

mat

التمرين الثالث :

1) أ) تعيين بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7 لدينا $2^3 \equiv 1[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^0 \equiv 1[7]$ و منه بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7 تشكل متتالية دورية و دورها 3

و منه باقي قسمة 2^n على 7 : هو 1 لما $n = 3k$ و هو 2 لما $n = 3k + 1$ و هو 4 لما $n = 3k + 2$.

ب) لدينا $1962 \equiv 2[7]$ و منه $1962^{1954} \equiv 2^{1954}[7]$ و بما ان $1954 = 3 \times 651 + 1$ فإن $1962^{1954} \equiv 2[7]$

و لدينا $1954 \equiv 1[7]$ و منه $1954^{1962} \equiv 1[7]$ و $2015 \equiv 6[7]$ و $6 \equiv -1[7]$ و منه $2015 \equiv -1[7]$ إذن منه $2015^{53} \equiv -1[7]$ لان الأس فردي .

بالجمع نجد $1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53} \equiv 2 - 1 - 1[7]$ و منه $962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53} \equiv 0[7]$ الباقي المطلوب 0.

2) أ)بما أن 89 لا يقبل القسمة على الأعداد 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و لدينا $11^2 = 121$ فإن العدد 89 أولي .

ب) لدينا $7832 = 2^3 \times 11 \times 89$ و منه عدد القواسم الطبيعية المطلوبة هو $16 = (1+1)(1+1)(3+1)$ و هي

$\begin{cases} 2^0 \times 11^0 \times 89^0 = 1 \\ 2^1 \times 11^0 \times 89^0 = 2 \\ 2^2 \times 11^0 \times 89^0 = 4 \\ 2^3 \times 11^0 \times 89^0 = 8 \end{cases}$ و $\begin{cases} 2^0 \times 11 \times 89^0 = 11 \\ 2^1 \times 11 \times 89^0 = 22 \\ 2^2 \times 11 \times 89^0 = 44 \\ 2^3 \times 11 \times 89^0 = 88 \end{cases}$ و $\begin{cases} 2^0 \times 11^0 \times 89 = 89 \\ 2^1 \times 11^0 \times 89 = 178 \\ 2^2 \times 11^0 \times 89 = 356 \\ 2^3 \times 11^0 \times 89 = 712 \end{cases}$ و $\begin{cases} 2^0 \times 11 \times 89 = 979 \\ 2^1 \times 11 \times 89 = 1958 \\ 2^2 \times 11 \times 89 = 3916 \\ 2^3 \times 11 \times 89 = 7832 \end{cases}$

و منه قواسم 7832 هي 1 و 2 و 4 و 8 و 11 و 22 و 44 و 88 و 89 و 178 و 356 و 712 و 979 و 1958 و 3916 و 7832 .

ج) نضع $d = PGCD(977, 981)$ و منه d قاسم للعددين 977 و 981 فهو قاسم للعدد $981 - 977 = 4$ و قواسم 4 هي 1 و 2 و 4 و 2 و 4 ليسا قاسمين للعددين 977 و 981 و منه القاسم المشترك الأكبر للعددين هو 1 و منه العددان اوليان فيما بينهما .

3) لدينا $\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases}$ و $PGCD(x, y) = 2$ نضع $\begin{cases} x = 2x' \\ y = 2y' \end{cases}$ حيث $PGCD(x', y') = 1$ نعوض في الجملة نجد $\begin{cases} 4x'^2 - 4y'^2 = 31328 \\ 2x' - 2y' \equiv 8[22] \end{cases}$ وهذا يعني ان $\begin{cases} x'^2 - y'^2 = 7832 \\ x' - y' \equiv 4[11] \end{cases}$ أي ان $\begin{cases} (x' + y')(x' - y') = 7832 \\ x' - y' \equiv 4[11] \end{cases}$ يعني ان $(x' - y')$ و $(x' + y')$ قاسمين لـ 7832 و باقي قسمة $x' - y'$ على 11 هو 4 أي ان $\begin{cases} x' - y' = 4 \text{ و } x' + y' = 1958 \\ x' - y' = 356 \text{ و } x' + y' = 22 \end{cases}$

$\begin{cases} x' - y' = 4 \\ x' + y' = 1958 \end{cases}$ بالجمع نجد $2x' = 1962$ و منه $x' = 981$ و $y' = 977$.

$\begin{cases} x' - y' = 356 \\ x' + y' = 22 \end{cases}$ بالجمع نجد $2x' = 378$ و منه $x' = 189$ و $y' = -167$ مرفوض لان العددين طبيعين

بالتعويض نجد $\begin{cases} x = 981 \times 2 = 1962 \\ y = 977 \times 2 = 1954 \end{cases}$.

4) أ) مبرهنة بيزو لدينا a أولي مع b يعني انه يوجد عددين صحيحين α و β حيث $\alpha a + \beta b = 1 \ldots\ldots.(1)$.

a أولي مع c يعني انه يوجد عددين صحيحين α' و β' حيث $\alpha' a + \beta' c = 1 \ldots\ldots(2)$

بضرب (1) في (2) فنجد $(\alpha a + \beta b)(\alpha' a + \beta' c) = 1$ اي ان

$\alpha\alpha' a^2 + \alpha a \beta' c + \beta b \alpha' a + \beta b \beta' c = 1$ و منه $(\alpha\alpha' a + \alpha\beta' c + \beta b \alpha')a + \beta\beta' bc = 1$ و منه حسب نظرية بيزو العددين a و $b \times c$ أوليان فيما بينهما .

ب)البرهان بالتراجع : التحقق $PGCD(a ; b) = 1$ محققة نفرض ان $PGCD(a ; b^n) = 1$ و لنبرهن $PGCD(a ; b^{n+1}) = 1$

$PGCD(a ; b^n) = 1$ و $PGCD(a ; b) = 1$ فحسب ما سبق فإن $PGCD(a ; b \times b^n) = 1$ و منه $PGCD(a ; b^{n+1}) = 1$ و منه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $PGCD(a ; b^n) = 1$.

ج) استنتاج $PGCD(1954\,;1962) = 2.PGCD(977\,;981) = 2$

و منه نجد $PGCD(1954^{1962}\,;1962^{1954}) = PGCD(2^{1962}\times 977^{1962}\,;2^{1954}\times 981^{1954})$.

$PGCD(1954^{1962}\,;1962^{1954}) = 2^{1954}PGCD(2^{8}\times 977^{1962}\,;981^{1954})$ و بما ان $PGCD(977;981)=1$ فحسب ب) فإن

$PGCD(977^{1962}\,;981^{1954})=1$ و بما ان $PGCD(2;981)=1$ فحسب ب) فإن $PGCD(2^{8};981^{1954})=1$ فحسب أ) نجد أن

$PGCD(2^{8}\times 977^{1962}\,;981^{1954})=1$ إذن $PGCD(1954^{1962}\,;1962^{1954})=2^{1954}$

التمرين الرابع :

1) أ)دراسة استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين لدينا و منه $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}(1-x^{2}\ln x)=1$ الدالة مستمرة عند 0 لأن $f(0)=1$

ب) حساب : و منه $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}\left[\frac{f(x)-1}{x}\right]=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}\left[\frac{-x^{2}\ln x}{x}\right]=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}[-x\ln x]=0$ و منه المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 0 موازي لحامل محور التراتيب.

2) أ) حساب . $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x^{2}\ln x)=-\infty$

ب)دراسة تغيرات الدالة f المشتقة $f'(x)=-2x\ln x-x^{2}\times\frac{1}{x}=-x(2\ln x+1)$. اشارتها من اشارة $-(2\ln x+1)$

$-(2\ln x+1)=0$ يكافئ ان $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

$-(2\ln x+1)>0$ يكافئ أن $x<\frac{1}{\sqrt{e}}$ و منه f متزايدة على المجال $\left[0\,;\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ و متناقصة على المجال الباقي و هو $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}\,;+\infty\right[$.

جدول التغيرات

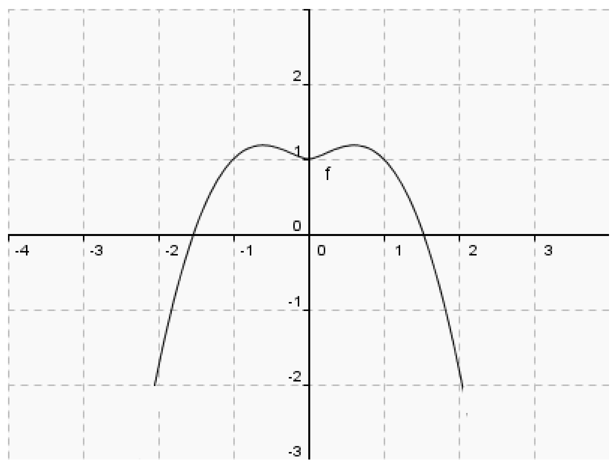
x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	$1+\frac{1}{2e}$	↘	$-\infty$

3) أ) بما أن الدالة f مستمرة و متناقصة على $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}\,;+\infty\right[$ و تغير إشارتها على هذا المجال و لا تغير إشارتها على المجال $\left[0\,;\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ فحسب نظرية القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0\,;+\infty[$.

ب) لدينا $f(1{,}531)=0{,}001658$ و $f(1{,}531)=-0{,}00118$ و منه $1{,}531<\alpha<1{,}532$ . .

4) أ) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=g(x)$ و منه g دالة زوجية .

ب)المنحنى (C_g) :



5)المكاملة بالتجزئة :

لدينا $\int_1^x t^2 lntd\,t = \left[\frac{1}{3}t^3 lnt\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{3}t^3 \times \frac{1}{t}dt = \frac{1}{3}x^3 lnx - \left[\frac{1}{9}t^3\right]_1^x = \frac{1}{3}x^3 lnx - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}$

و من الدالة الأصلية المطلوبة هي $x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 lnx - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}$.

6)أ) كتابة عبارة $F(t)$ و منه

أي ان $F(t) = \int_t^\alpha f(x)dx = \int_t^\alpha (1 - x^2 lnt)dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3 lnx + \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}\right]_t^\alpha$

و منه $F(t) = \alpha - \frac{1}{3}\alpha^3 ln\alpha + \frac{1}{9}\alpha^3 - t + \frac{1}{3}t^3 lnt - \frac{1}{9}t^3$.

ب) لدينا $F(t) = \alpha - \frac{1}{3}\alpha^3 ln\alpha + \frac{1}{9}\alpha^3 - t + \frac{1}{3}t^3 lnt - \frac{1}{9}t^3$ و منه $F(t) = \frac{9\alpha - 3\alpha^3 ln\alpha + \alpha^3 - 9t + 3t^3 lnt - t^3}{9}$

أي ان $F(t) = \frac{9\alpha - 3\alpha^3 ln\alpha + \alpha^3 - 3t(1 - t^2 lnt) - 6t - t^3}{9} = \frac{-t.f(t) - 6t - t^3 + 9\alpha - 3\alpha^3 ln\alpha + \alpha^3}{9}$ و لدينا

$f(\alpha) = 0$ يعني أن $1 - \alpha^2 ln(\alpha) = 0$ و منه $ln(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2}$ و منه $F(t) = \frac{-t.f(t) - 6t - t^3 + 9\alpha - 3\alpha^3\frac{1}{\alpha^2} + \alpha^3}{9} =$

و منه $F(t) = \frac{-t.f(t) - t^3 - 6t + \alpha^3 + 6\alpha}{9}$ و هو المطلوب .

ج) حساب النهاية :

$$\lim_{\substack{>\\ t\to 0}} F(t) = \frac{\alpha^3 + 6\alpha}{9}$$

7) لدينا $\delta(m) = \pi m^2$ و $A = \frac{2}{9}(\alpha^3 + 6\alpha).ua$ أ) تكون $\delta(m) = 2A$ يعني ان $\pi m^2 = \frac{4}{9}(\alpha^3 + 6\alpha)$ أي أن $m = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{\pi}(\alpha^3 + 6\alpha)}$

ب) حصر m لدينا $3,140 < \pi < 3,142$ بالقلب نجد $\frac{1}{3,142} < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{3,140}$ ....(1) و $1,531 < \alpha < 1,532$ و منه نجد

$9,186 < 6\alpha < 9,192$. و $3,588604 < \alpha^3 < 3,595641$ بجمع المتباينتين نجد $12;7764 < \alpha^3 + 6\alpha < 12,78764$ ....(2)

و بضرب (1) في (2) نجد $4,069905 < \frac{1}{\pi}(\alpha^3 + 6\alpha) < 4,072497$ بالجذر نجد $2,0174 < \sqrt{\frac{1}{\pi}(\alpha^3 + 6\alpha)} < 2,018043$

بالضرب في $\frac{2}{3}$ نجد $1,344964 < m < 1,345362$ و هو المطلوب.

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1) الحد العام للمتتالية العددية المعرفة بـ $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$ هو أ) $u_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$

لأن $u_0 = -3 + 6 = 3$ و $u_{n+1} = -3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 6 = \frac{1}{2}\left[-3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6\right] + 3 = \frac{1}{2}u_n + 3$ محققة .

2) لدينا $|iz - 1 - i| = 3$ يعني ان $|i(z + i - 1)| = 3$ و منه $|z + i - 1| = 3$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z هي دائرة مركزها ذو اللاحقة $1 - i$ و نصف قطرها 3 إذن ب) صحيحة .

3) لدينا $\overline{abcd}$ يقبل القسمة على 11 يعني أن $\overline{abcd} \equiv 0[11]$ أي ان $1000a + 100b + 10c + d \equiv 0[11]$ و لدينا $10 \equiv -1[11]$ و $100 \equiv 1[11]$ و $1000 \equiv -1[11]$ و منه $-a + b - c + d \equiv 0[11]$ و منه بالضرب في -1 نجد $a - b + c - d \equiv 0[11]$ أي ان $a - b + c - d$ مضاعف للعدد 11 إذن أ) صحيحة .

4) لدينا $\begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}t - k \\ y = 2 - t + \frac{3}{2}k \\ z = -3 + 4t - 6k \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}\left(t - \frac{3}{2}k\right) \\ y = 2 - \left(t - \frac{3}{2}\right) \\ z = -3 + 4\left(t - \frac{3}{2}k\right) \end{cases}$ و هذا يكافئ $\begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = -3 + 4\alpha \end{cases}$ و التمثيل الوسيطي لمستقيم الذي شعاع توجيهه $\vec{v}\left(\frac{2}{3}; -1; 4\right)$ و مرتبط خطيا مع $\vec{u}\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; -2\right)$ و يمر من النقطة $A(1; 2; -3)$ و منه ب) صحيحة .

التمرين الثاني :

1) حل المعادلة $z^2 - 2(1 - \sqrt{3})z + 8 = 0$ نحسب المميز

$\Delta = [-2(1 - \sqrt{3})]^2 - 4 \times 8 = 4(4 - 2\sqrt{3}) - 32 = 4(4 - 2\sqrt{3} - 8) = -4(4 + 2\sqrt{3})$ و منه

أي ان $\Delta = -4(1 + \sqrt{3})^2 = [2i(1 + \sqrt{3})]^2$ المعادلة تقبل حلين هما $z_0 = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$ و

$z_1 = (1 - \sqrt{3}) - i(1 + \sqrt{3})$.

2) أ) لدينا

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{\overline{z_A}}{z_A} = \frac{(\overline{z_A})^2}{|z_A|^2} = \frac{(1-\sqrt{3})^2 - (1+\sqrt{3})^2 - 2i(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})^2 + (1+i\sqrt{3})^2} = \frac{-4\sqrt{3} + 4i\sqrt{3}}{8}$$

$$\frac{z_B}{z_A} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \text{ و منه } \left|\frac{z_B}{z_A}\right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \text{ و } \begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

حيث $\theta = arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)$ و منه $\theta = -\frac{7\pi}{6}$ و منه $\frac{z_B}{z_A} = e^{-\frac{7\pi}{6}i}$.

ب)تعيين عمدة z_A : $arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = arg(z_B) - arg(z_A) = arg(\overline{z_A}) - arg(z_A) = -2arg(z_A)$ و $arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = -\frac{7\pi}{6}$

و منه $-2arg(z_A) = -\frac{7\pi}{6}$ إذن $arg(z_A) = \frac{7\pi}{12}$.

ج) استنتاج القيمتين المضبوطين لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$|z_A| = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ و منه $\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$.

3) أ) حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة $7x-2y=1$ لدينا $\begin{cases}7x-2y=1\\7(1)-2(3)=1\end{cases}$ بالطرح نجد $7(x-1)=2(y-3)$ بما ان 7 و 2 أوليان فيما بينهما حسب نظرية غوس 7 قاسم لـ $(y-3)$ و 2 قاسم لـ $(x-1)$ و منه $k\ \varepsilon\ \mathbb{Z}$: $\begin{cases}x-1=2k\\y-3=7k\end{cases}$ و منه $k\ \varepsilon\ \mathbb{Z}$: $\begin{cases}x=1+2k\\y=3+7k\end{cases}$ حلول المعادلة .

ب) لدينا $7x-24y=12$ يكافئ $7x=24y+12$ أي ان $7x=12(2y+1)$ و بما ان 7 و 12 اوليان فيما بينهما فإن 12 قاسم لـx او بمعنى أخر x مضعف للعدد 12.

ج) لدينا مما سبق$k'\ \varepsilon\ \mathbb{Z}$: $x\equiv 12k'$ بالتعويض في المعادلة نجد $7(12k')-24y=12$ و منه $7k'-2y=1$ من السؤال 3) نجد ان $k\ \varepsilon\ \mathbb{Z}$: $\begin{cases}k'=1+2k\\y=3+7k\end{cases}$ و منه $k\ \varepsilon\ \mathbb{Z}$: $\begin{cases}x'=12(1+2k)\\y=3+7k\end{cases}$ أي ان $k\ \varepsilon\ \mathbb{Z}$: $\begin{cases}x'=12+24k\\y=3+7k\end{cases}$ الحلول.

د) لدينا $arg(z_A{}^n)=n.argz_A=\frac{7\pi}{12}n$ و $(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا يعني ان عمدته هي من الشكل $\pi+2\pi\alpha$ و α عدد صحيح أي ان $\frac{7\pi}{12}n=\pi+2\pi\alpha$ بالضرب في $\frac{12}{\pi}$ نجد $7n=12+24\alpha$ أي ان $7n-24\alpha=12$ و منه $(n;\alpha)$ حلول للمعادلة $7x-24y=12$ إذن مما سبق نجد ان $n=12+24k$ و $k\ \varepsilon\ \mathbb{N}$ . .

التمرين الثالث :

1) لدينا (Δ_1) شعاع توجيهه هو$\vec{u}(-1\,;2\,;-1)$ و يشمل $A(2;0;0)$ و منه تمثيله الوسيطي $\begin{cases}x=2-m\\y=2m\\z=-m\end{cases}$ و (Δ_2) تمثيله الوسيطي هو $\begin{cases}x=-3-3t\\y=2+2t\\z=7+3t\end{cases}$ نساوي بينهما نجد $\begin{cases}-3-3t=2-m\\2+2t=2m\\7+3t=-m\end{cases}$ أي ان $\begin{cases}m=5+3t\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\\2+2t=2(5+3t)\ldots\ldots(2)\\7+3t=-m\ \ldots\ldots\ldots(3)\end{cases}$ و منه $2+2t=2(5+3t)$ أي ان $-4t=8$ و منه $t=-2$ بالتعويض في (1) نجد $m=-1$ و بتعويض القيمتين في (3) نجد $7+3(-2)=1$ محققة و منه نقطة التقاطع $C(3;-2;1)$.

2) لدينا (d) مستقيم شعاع توجيهه $\vec{v}(2;5;3)$ و (Δ_1) شعاع توجيهه هو$\vec{u}(-1\,;2\,;-1)$ بما ان $\vec{v}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطان خطيا لان $\frac{5}{2}\neq\frac{2}{-1}$ و منه (d) و (Δ_1) غير متوازيان. و (Δ_1) تمثيله الوسيطي $\begin{cases}x=2-m\\y=2m\\z=-m\end{cases}$ و (d) تمثيله الوسيطي هو $\begin{cases}x=-1+2\alpha\\y=-5+5\alpha\\z=-1+3\alpha\end{cases}$ بالمساواة بينهما نجد $\begin{cases}2-m=-1+2k\\2m=-5+5k\\-m=-1+3k\end{cases}$ و منه $\begin{cases}2-m=-1+2\alpha\ldots.(4)\\2m=-5+5\alpha\ldots.\ldots(5)\\m=1-3\alpha\ldots\ldots\ldots(6)\end{cases}$ و منه $2-6\alpha=-5+5\alpha$ أي ان $11\alpha=3$ و منه $\alpha=\frac{7}{11}$ بالتعويض في (6) و منه $m=1-\frac{21}{11}=-\frac{10}{11}$ بتعويض القيمتين في (4) نجد $2+\frac{10}{11}=-1+2\frac{7}{11}$ أي ان $\frac{32}{11}=\frac{3}{11}$ غير صحيحة و منه المستقيمان (d) و (Δ_1) ليسا من نفس المستوي .

3) أ)التمثيل الوسيطي للميتوي (p) الذي يشمل المستقيمين (Δ_1) و(Δ_2) . و(Δ_1) شعاع توجيهه هو$\vec{u}(-1\,;2\,;-1)$ و (Δ_2) تمثيله الوسيطي هو و $\begin{cases}x=-3-3t\\y=2+2t\\z=7+3t\end{cases}$ المستوي (p) يشمل $C(3;-2;1)$ و منه التمثيل الوسيطي لـ (p) هو $\begin{cases}x=3-3t-m\\y=-2+2t+2m\\z=1+3t-m\end{cases}$
حيث t و m عددان حقيقيان .

ب) لدينا التمثيل الوسيطي للمستوي (p)هو $\begin{cases}x=3-3t-m\\y=-2+2t+2m\\z=1+3t-m\end{cases}$ و منه $\begin{cases}4x=12-12t-4m\\3y=-6+6t+6m\\2z=2+6t-2m\end{cases}$ بالجمع نجد $4x+3y+2z=8$

و منه المعادلة الديكارتية للمستوي (p) هي $4x+3y+2z-8=0$.

ح) لدينا $\overrightarrow{BC}(4;3;2)$ هو شعاع ناظيمي للمستوي (p) و C نقطة من المستوي لأنها نقطة تقاطع (Δ_1) و(Δ_2) و منه C هي المسقط العمودي لــ B على المستوي (p) .

4) أ)$I(-1+2\alpha;-5+5\alpha;-1+3\alpha)$ نقطة من(d) و $D(-3-3t;2+2t;7+3t)$ نقطة من (Δ_2) و $A(2;0;0)$ نقطة من (Δ_1) تكون I و A وD في استقامية يعني أن I هي نقطة تقاطع المستوي (p) والمستقيم (d) نعويض إحداثيات I في المعادلة الديكارتية للمستوي نجد

$4(-1+2\alpha)+3(-5+5\alpha)+2(-1+3\alpha)-8=0$ و منه $29\alpha=29$ و منه $\alpha=1$ و منه $I(1;0;2)$ و $\overrightarrow{AI}(-1;0;2)$ و $\overrightarrow{AD}(-5-3t;2+2t;7+3t)$ مرتبطان خطيا يعني ان $2+2t=0$ و منه $t=-1$ و منه $\overrightarrow{AD}(-2\ ;\ 0\ ;\ 4)$

و منه $D(0\ ;\ 0\ ;4)$.

ب) مما سبق لدينا $D(0\ ;\ 0\ ;4)$ و $A(2;0;0)$ و منه منتصف $[AD]$ احداثياتها $\left(\frac{2+0}{2};\frac{0+0}{2};\frac{0+4}{2}\right)$ أي ان $(1;0;2)$ و هي احداثيات I و هو المطلوب .

5) k مرجح الجملة المثقلة $\{(B;1);(I;2)\}$ و I منتصف $[AD]$ و منه k مرجح الجملة المثقلة $\{(B;1);(A;1);(D;1)\}$ و منه k مركز ثقل المثلث ABD و مسقط النقطة B على المستوي (p) هي C و منه مسقط العمودي للمثلث ABD على(p) هو المثلث ACD و G المسقط العمودي لــ k على المستوي (p) إذن G مركز ثقل المثلث ACD و منه G مرجح الجملة $\{(C;1);(A;1);(D;1)\}$.

ب)و منه $G\left(\frac{2+0+3}{3};\frac{0+0-2}{3};\frac{0+4+1}{3}\right)$ أي ان $G\left(\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\ ;\frac{5}{3}\right)$.

التمرين الرابع :

1) دراسة استمرارية f عند 0 من اليسار $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}(x-1)e^{\frac{1}{x}}=0=f(0)$

و منه الدالة مستمرة على يسار 0.

2) حساب النهاية بوضع $X=\frac{1}{x}$ نجد انه لما x يؤول إلى 0 بقيم أصغر فإن X يؤول إلى $-\infty$

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\<}}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}=\lim_{X\to-\infty}(1-X)e^{X}=\lim_{X\to-\infty}-e.[(X-1)e^{X-1}]=0$$

و منه المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 0 موازي لحامل محور الفواصل .

3) أ)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{\frac{1}{x}}=-\infty$$

ب)دراسة تغيرات الدالة f المشتقة $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}-\frac{x-1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}=\frac{e^{\frac{1}{x}}(x^2-x+1)}{x^2}$ و هي موجبة على المجال $]-\infty;0]$ لأن

x^2-x+1 موجب لان مميزها موجب و الباقي موجب أي x^2 و $e^{\frac{1}{x}}$ على المجال السابق و منه الدالة متزايدة على هذا المجال.

جدول تغيراتها

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ 0
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ 0

4) أ) بوضع بوضع $X=\frac{1}{x}$ نجد انه لما x يؤول إلى $-\infty$ فإن X يؤول إلى 0 بقيم أصغر

mat جوال احمد

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^{\frac{1}{x}}-x\right] = \lim_{\substack{<\\X\to 0}}\left[\left(\frac{1}{X}-1\right)e^{X}-\frac{1}{X}\right] = \lim_{\substack{<\\X\to 0}}\left[\left(\frac{e^{X}-1}{X}\right)-e^{X}\right]=0$$ لأن

$$\lim_{\substack{<\\X\to 0}}\left(\frac{e^{X}-1}{X}\right)=\lim_{\substack{<\\X\to 0}} e^{X}=1$$

ب) مما سبق نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) جهة $-\infty$.

5) أ) حساب النهاية

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$$

ب) دراسة تغيرات الدالة g المشتقة

$$g'(x)=\frac{x.f'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{x\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}(x^2-x+1)}{x^2}\right)-e^{\frac{1}{x}}(x-1)}{x^2}=\frac{e^{\frac{1}{x}}(x^2-x+1)-e^{\frac{1}{x}}(x-1)x}{x^3}=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$$

و هي سالبة على المجال $]-\infty\,;0[$ و منه الدالة g متناقصة على هذا المجال .

جدول تغيراتها

x	$-\infty$	0
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	1 ↘	0

6)أ)من جدول تغيرات الدالة g نستنتج ان 1 حاد من الأعلى لـ g و منه من أجل كل عدد حقيقي من$]-\infty\,;0[$ فإن $g(x)<1$ و منه $\frac{f(x)}{x}<1$

إذن $f(x)>x$ لان x سالب و هو المطلوب .

ب)مما سبق نجد ان (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty\,;0[$

ج) رسم المنحنى

7)أ)تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<0$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0<0$ أي ان $-3<0$ محققة

نفرض ان $u_n<0$ و لنبرهن ان $u_{n+1}<0$

لدينا $u_{n+1}=f(u_n)$ أي ان $u_{n+1}=(u_n-1)e^{\frac{1}{u_n}}$

بما ان $u_n<0$ فإن (u_n-1) سالب و $e^{\frac{1}{u_n}}$ موجب و منه u_{n+1} سالبة

أي أن $u_{n+1}<0$ محققة و منه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n<0$

ب) لدينا مما سبق في دراسة الدالة $f(x)>x$ و منه $f(u_n)>u_n$ أي أن $u_{n+1}>u_n$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة .

ج)المتتالية (u_n) محدود من الأعلى و متزايدة فهي متقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) و المنصف الأول $lim(u_n)=0$.

8)أ) حساب : $h'(x)=e^{\frac{1}{x}}+x\left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}-m.$ و منه $h'(x)=\left[1-\frac{1}{x}\right]e^{\frac{1}{x}}-m$

ب) $h'(x)=0$ يعني ان $\left[1-\frac{1}{x}\right]e^{\frac{1}{x}}=m$ أي ان $\frac{f(x)}{x}=m$ أي ان $f(x)=mx$ حلولها هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=mx$

لما $m\geq 1$ فإن (C_f) و (Δ_m) لا يتقاطعان إذن المعادلة $h'(x)=0$ ليس لها حلول .

لما $m<1$ فإن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه المعادلة $h'(x)=0$ تقبل حلا وحيد ا

انتهى بالتوفيق و النجاح أبنائي الأعزاء – الأستاذ : جواليل أحمد - تمنراست.

/http://ahmedaisam.at.ua

جواليل أحمد mat

اختبار في مادة: الرياضيات المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأوّل

يحتوي الموضوع الأول على 03 صفحات (من الصفحة 1 من 5 إلى الصفحة 3 من 5).

التمرين الأوّل: (04,5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط $A(1;1;0)$ ، $B(2;-1;1)$ ، $C(-1;0;1)$ ، $D\left(\frac{1}{2};2;-\frac{1}{2}\right)$ ، $E(0;1;1)$ ، $H\left(\frac{5}{4};\frac{7}{4};-\frac{1}{2}\right)$

و المستوي (P) المعرّف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=1+\alpha+\beta \\ y=2-\alpha \\ z=-1+2\alpha-\beta \end{cases}$ ، α و β وسيطان حقيقيان.

1) أ) بيّن أنّ النقط A ، B و C تُعيّن مستويا.

ب) تحقق أنّ الشعاع $\vec{n}(1;3;5)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم اكتب معادلة ديكارتية له.

2) أ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) ثم بيّن أن المستويين (ABC) و (P) متقاطعان.

ب) نسمي (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (ABC) و (P).

– تحقّق أنّ النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) و أنّ $\vec{u}(-3;1;0)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

جـ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ).

د) بيّن أنّ النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) ثم استنتج المسافة بين A و (Δ).

3) G مرجح الجملة المثقلة: $\{(A,2);(B,-3);(C,2)\}$.

نسمي (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تُحقّق: $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{GM}=11$.

أ) عيّن إحداثيات النقطة G.

ب) اكتب معادلة ديكارتية للمجموعة (Γ) ثم بيّن أنّها سطح كرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

جـ) حدّد الوضعية النسبية للمستوي (ABC) و المجموعة (Γ).

التمرين الثاني: (04,5 نقطة)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدودها موجبة تماما، حدّها الأوّل u_0 و أساسها q حيث: $\begin{cases} \ln(u_1)+\ln(u_2)=11 \\ u_1+u_2=e^4\left(1+e^3\right) \end{cases}$

1) احسب u_1 و u_2 ثم استنتج قيمة الأساس q .

2) نضع: $u_1=e^4$ و $q=e^3$.

أ) عبّر عن u_n بدلالة n.

ب) نضع : $S_n=\ln(u_0)+\ln(u_1)+\ln(u_2)+...+\ln(u_n)$. احسب S_n بدلالة n.

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $a_n = n+3$.

أ) بيّن أنّ : $PGCD(2S_n, a_n) = PGCD(a_n, 14)$.

ب) عيّن القيم الممكنة لـ: $PGCD(2S_n, a_n)$.

جـ) عيّن قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها : $PGCD(2S_n, a_n) = 7$.

4) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

5) نضع: $b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$.

عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$.

6) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $\left(1437^{9n+1} - 3\times 4^{12n+1} + 52\right)$ يقبل القسمة على 7.

التمرين الثالث: (04,5 نقطة)

1) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 4z + 5 = 0$.

ب) استنتج حلول المعادلة ذات المجهول المركب z الآتية: $\left(z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)^2 - 4z + 1 - 4i\left(1-\sqrt{3}\right) = 0$.

2) θ عدد حقيقي حيث : $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ و z_0 عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له .

أ) اكتب العدد المركب $1+i\sqrt{3}$ على الشكل الأسي.

ب) عيّن θ علما أنّ: $\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\overline{z_0}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. ($\overline{z_0}$ هو مرافق العدد المركب z_0).

جـ) n عدد طبيعي. من أجل قيمة θ المتحصل عليها، اكتب العدد المركب $\left[\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n$ على الشكل المثلثي.

د) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left[\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

3) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A = 2-i$ ، $z_B = 2+i$ و $z_C = 1+i\sqrt{3}$.

أ) عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$.

ب) استنتج أنّ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

جـ) E النقطة من المستوي المركب ذات اللاحقة z_E حيث: $\begin{cases} \arg(z_E - z_A) - \arg(z_E - z_B) = \frac{\pi}{2} \\ \left|\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B}\right| = 2 \end{cases}$.

– بيّن أنّ : $z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$.

– بيّن أنّ النقطة A هي صورة النقطة B بتشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميّزة.

4) M نقطة من المستوي المركب لاحقتها z ، النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

أ) عيّن z_I لاحقة النقطة I .

ب) α عدد حقيقي، نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب التي تُحقّق: $z - z_I = e^{i\alpha}$.

– تحقّق أنّ النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ).

– عيّن طبيعة المجموعة (Γ) و عناصرها المميّزة عندما يتغيّر α في $\mathbb{R}$.

التمرين الرابع: (06,5 نقطة)

I) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1+x^2+2\ln x$.

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g .

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]0,52\,;\,0,53[$ حلاّ وحيدا α.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=-x+\dfrac{3+2\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$.

ب) شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

جـ) تحقّق أنّ: $f(\alpha)=2\left(\dfrac{1}{\alpha}-\alpha\right)$ ثم عيّن حصرا له.

3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+x\right]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل (Δ).

جـ) بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكارتية له.

4) نقبل أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما x_0 و x_1 حيث:

$0,22<x_0<0,23$ و $2,11<x_1<2,13$

أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f).

5) m وسيط حقيقي . ناقش بيانيا و حسب قيم m، عدد حلول المعادلة : $3+2\ln x-mx=0$.

III) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left[f(x)+x\right]dx$.

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>0$.

2) أعط تفسيرا هندسيا للعدد u_0 .

3) احسب u_n بدلالة n.

4) نضع: $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$. احسب S_n بدلالة n.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على صفحتين (الصفحة 4 من 5 والصفحة 5 من 5).

التمرين الأوّل: (05 نقاط)

1) الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط A ، B ، C و D حيث: $A(1;0;3)$ ، $B(1;2;4)$ ، $C(0;0;2)$ و $D(3;4;1)$.

أ) عيّن العددين الحقيقيين α و β حتى يكون الشعاع $\vec{n}(2;\alpha;-\beta)$ ناظميا للمستوي (ABC).

ب) جد معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) $z=2-x$ و $y=2z-2x-4$ معادلتان ديكارتيتان للمستويين (P) و (Q) على الترتيب.

أ) بيّن أنّ المستويين (P) و (Q) متعامدان.

ب) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (Q).

جـ) احسب المسافة بين النقطة D و المستقيم (Δ).

3) (S) سطح الكرة التي مركزها D و مماس للمستوي (Q) .

أ) اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S).

ب) جد الطبيعة والعناصر المميّزة لتقاطع (P) و (S).

4) λ عدد حقيقي، G_λ نقطة من الفضاء حيث: $2\overrightarrow{G_\lambda A}-\overrightarrow{G_\lambda B}+e^{\lambda}\overrightarrow{G_\lambda C}=\vec{0}$. (e يرمز إلى أساس اللوغاريتم النبيري).

أ) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تُحقّق: $(1+e)\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+e\overrightarrow{MC}\right\|$

ب) H مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-1)\}$. اكتب $\overrightarrow{CG_\lambda}$ بدلالة $\overrightarrow{CH}$.

جـ) عيّن مجموعة النقط G_λ لمّا يتغيّر λ في المجموعة $\mathbb{R}$.

د) جد قيمة λ التي تكون من أجلها G_λ منتصف القطعة $[CH]$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I) 1) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+2=0$.

2) جد العددين المركبين z_1 و z_2 حيث: $\begin{cases}2z_1-3z_2=5i\sqrt{2}\\ z_1+3z_2=-2i\sqrt{2}\end{cases}$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. النقط A ، B ، C ، D و H لاحقاتها على الترتيب : $z_A=i\sqrt{2}$ ، $z_B=-i\sqrt{2}$ ، $z_C=1+i$ ، $z_D=1-i$ و $z_H=\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}$ حيث E النقطة التي تُحقّق: $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DO}$.

1) اكتب z_H على الشكل الأسي و استنتج نوع المثلث BEC .

2) S تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=z_A z+z_B$.

أ) ما هي طبيعة التحويل S ؟ و ما هي عناصره المميّزة ؟

ب) احسب مساحة الدائرة (γ) التي مركزها C و نصف قطرها CD.

جـ) عيّن (γ') صورة (γ) بالتحويل S و استنتج مساحتها.

3) عيّن (δ) مجموعة النقط M من المستوي (M تختلف عن B و C) ذات اللاحقات z التي يكون من أجلها العدد $\dfrac{z_B-z}{z_C-z}$ حقيقيا سالبا تماما.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11.

ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4}$ مضاعف للعدد 11.

2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $7x-3y=8$ ، حيث x و y عددان طبيعيان.

أ) حلّ المعادلة (E).

ب) d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) .

– ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

– عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d=4$.

ج) جد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $2016^{7x}+1437^{3y}\equiv 0[11]$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) φ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\varphi(x)=\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-1$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة φ ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أنّ المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلاّ α يختلف عن 1 ثم تحقّق أنّ: $2{,}79<\alpha<2{,}80$.

3) استنتج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f و g الدالتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$.

(C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أنّ للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 ثم جد معادلة له.

3) ارسم المماس (T) و المنحنى (C_f).

4) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$.

ب) ادرس إشارة الفرق $f(x)-g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g).

ج) باستعمال مكاملة بالتجزئة ، احسب بدلالة العدد الحقيقي x : $\int_1^x f(t)\,dt$.

د) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذيْن معادلتيهما: $x=1$ و $x=2$.

III) 1) احسب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$. أعط تخمينا لعبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

($f^{(n)}$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f).

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$.

3) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي: $u_n=f^{(n)}(1)$.

أ) احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k ، المجموع : u_k+u_{k+1}.

ب) استنتج بدلالة n ، المجموع : $u_1+u_2+\ldots+u_{2n}$.

انتهى الموضوع الثاني

التمرين الأول :(04,5ن): $A(1;1;0)$; $B(2;-1;1)$

$C(-1;0;1)$; $D\left(\frac{1}{2};2;\frac{-1}{2}\right)$

$E(0;1;1)$; $H\left(\frac{5}{4};\frac{7}{4};\frac{-1}{2}\right)$

$$(P):\begin{cases}x=1+\alpha+\beta\\ y=2-\alpha\\ z=-1+2\alpha-\beta\end{cases} \quad :(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$$

1) أ) إثبات أنّ النقط A ; B ; C تعين مستويا .

$\overrightarrow{AB}(1;-2;1)$; $\overrightarrow{AC}(-2;-1;1)$

بما انّ : $\frac{1}{-2}\neq\frac{-2}{-1}$ فإنّ : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقط A ; B ; C تعين مستويا .

ب) ① $\vec{n}(1;3;5)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) إذاا كان : $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$

$$\vec{n}\bullet\overrightarrow{AB}=1\times1+3(-2)+5\times1=6-6=0$$

$$\vec{n}\bullet\overrightarrow{AC}=1\times(-2)+3(-1)+5\times1=-5+5=0$$

ومنه $\vec{n}(1;3;5)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC)

② كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

$$(ABC): x+3y+5z+d=0$$

$$A\in(ABC)\Leftrightarrow 4+d=0\Leftrightarrow d=-4$$

ومنه : $(ABC): x+3y+5z-4=0$

2) أ) ① كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P)

نبحث من التمثيل الوسيطي لـ (P) عن $(\alpha;\beta)$ التي تحقق الجملة : (I).... $\begin{cases}\alpha+\beta=x-1\\ \alpha=2-y\end{cases}$ فنجد :

$$(\alpha;\beta)=(2-y\ ;x+y-3)$$

بتعويض هذه الثنائية في المعادلة الثالثة للتمثيل الوسيطي لــ (P) نجد:

$z=-x-3y+6$ ومنه : $(P): x+3y+z-6=0$

② إثبات أنّ (ABC) و (P) متقاطعان : يكفي إثبات أنّ شعاعيهما الناظميين $\vec{n}(1;3;5)$ و $\overrightarrow{n_P}(1;3;1)$ غير مرتبطين خطيا مثلا أنّ : $\frac{5}{1}\neq\frac{1}{1}$ فإنهما غير مرتبطين خطيا وبالتالي (ABC) و (P) متقاطعان (وتقاطعهما مستقيم)

ب) $(P)\cap(ABC)=(\Delta)$

① للتحقق من أنّ: $D\in(\Delta)$ يكفي التحقق من أنّ: $D\in(ABC)$ و $D\in(P)$

$$x_D+3y_D+z_D-6=\frac{1}{2}+6-\frac{1}{2}-6=0$$

$$x_D+3y_D+5z_D-4=\frac{1}{2}+6-\frac{5}{2}-4=0$$

ومنه $D\in(P)$ و $D\in(ABC)$ إذن : $D\in(\Delta)$

② لإثبات أنّ $\vec{u}(-3;1;0)$ شعاع توجيه لـ (Δ) يكفي إثبات أنّ : $\vec{u}\perp\vec{n}$ و $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_P}$ لدينا :

$$\vec{u}\bullet\vec{n}=-3\times1+1\times3+0\times5=0$$

$$\vec{u}\bullet\overrightarrow{n_P}=-3\times1+1\times3+0\times1=0$$

ومنه : $\vec{u}(-3;1;0)$ شعاع توجيه لـ (Δ)

ج) (Δ) يشمل النقطة D و $\vec{u}$ شعاع توجيه له إذن :

$$(\Delta):\begin{cases}x=\frac{1}{2}-3t\\ y=2+t\\ z=-\frac{1}{2}\end{cases} \quad : t\in\mathbb{R}$$

تمثيل وسيطي لـ(Δ)

د) لإثبات أنّ H هي للمسقط العمودي لـ A على (Δ) يكفي إثبات أنّ : $H\in(\Delta)$ و $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$

أولا :

$$\begin{cases}x_H=\frac{1}{2}-3t\\ y_H=2+t\\ z_H=-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\frac{1}{4}\\ t=-\frac{1}{4}\\ t=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

بما أننا وجدنا قيمة وحيدة للوسيط t فإنّ $H\in(\Delta)$

ثانيا : $\vec{u}(-3;1;0);\ \overrightarrow{AH}\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{-1}{2}\right)$

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AH}=\frac{-3}{4}+\frac{3}{4}+0\times\left(\frac{-1}{2}\right)=0$$

ومنه : $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$ إذن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة A على (Δ) .

إستنتاج المسافة $d(A;(\Delta))$ المسافة بين A و (Δ)

$$d(A;(\Delta))=AH=\frac{\sqrt{14}}{4}$$

3) G مرجح الجملة :

$$\{(A;2);(B;-3);(C;2)\}$$

(Γ) مجموعة النقط M من الفضاء : $(*)$: $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{GM}=11...(*)$

ا) تعيين إحداثيات G نجد : $G(-6;5;-1)$

ب) ① كتابة معادلة ديكارتية لـ (Γ) : لدينا $M(x;y;z)$

ومنه : $\overrightarrow{GM}(x+6;y-5;z+1);\overrightarrow{EM}(x;y-1;z-1)$

$$(*)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+6x-6y-7=0...\otimes$$

وهي معادلة ديكارتية لـ (Γ)

② إثبات أنّ (Γ) هي سطح كرة يطلب تعين عناصرها .

$$\otimes\Leftrightarrow\left(x^2+6x\right)+\left(y^2-6y\right)+z^2=7$$

$$\Leftrightarrow(x+3)^2-9+(y-3)^2-9+z^2=7$$

ومنه : $(\Gamma):(x+3)^2+(y-3)^2+z^2=25$

إذن : (Γ) هي سطح كرة مركزها $\omega(-3;3;0)$

ونصف قطرها $r=5$.

ج) تحديد الوضعية النسبية بين المستوي (ABC) و (Γ)

بما انّ : $d(\omega;(ABC))=\frac{2}{\sqrt{35}}<r$: فإنّ

المستوي (ABC) يقطع (Γ) في دائرة .

(عناصر الدائرة غير مطلوبة حسب السؤال المطروح)

التمرين الثاني : (04,5ن): (u_n) م . هـ موجبة تماما

ومتزايدة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث :

$$\begin{cases} \ln u_1+\ln u_2=11\\ u_1+u_2=e^4\left(1+e^3\right)\end{cases}...(I)$$

1) أ) حساب u_1 و u_2

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}\ln\left(u_1\times u_2\right)=11\\ u_1+u_2=e^4\left(1+e^3\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+u_2=e^4\left(1+e^3\right)\\ u_1\times u_2=e^{11}\end{cases}.....(II)$$

u_1 و u_2 هما حلّي المعادلة :

$$x^2-e^4\left(1+e^3\right)x+e^{11}=0.....(1)$$

$$\Delta=b^2-4ac=e^8\left(1+e^3\right)^2-4e^{11}$$

$$=e^8\left[\left(1+e^3\right)^2-4e^3\right]=e^8\left(e^6-2e^3+1\right)$$

ومنه : $\Delta=e^8\left(e^3-1\right)^2=\boxed{\left[e^4\left(e^3-1\right)\right]^2}$

بما أنّ $\Delta>0$ فإنّ المعادلة (1) حلين متمايزين هما :

$$x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{e^4\left(1+e^3\right)+e^4\left(e^3-1\right)}{2}=e^7$$

$$x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{e^4\left(1+e^3\right)-e^4\left(e^3-1\right)}{2}=e^4$$

ومنه حلول الجملة (II) هي الثنائيات $(u_1;u_2)$:

$$(u_1;u_2)\in\left\{\left(e^4;e^7\right);\left(e^7;e^4\right)\right\}$$

وبما انّ (u_n) متزايدة تماما فإنّ : $(u_1;u_2)=\left(e^4;e^7\right)$

ب) حساب q : $q=\frac{u_2}{u_1}=e^3$

2) الفرضية : $u_1=e^4$ و $q=e^3$

أ) كتابة u_n بدلالة n: $u_n=u_1\times q^{n-1}=e^4\times e^{3n-3}$

ومنه : $u_n=e^{3n+1}....(*)$

ب) $S_n=\ln u_0+\ln u_1+\ln u_2+.....+\ln u_n$

المطلوب : حساب S_n بدلالة n

S_n هو مجموع $(n+1)$ حدا لمتتالية عددية ولدينا :

$$(*) \Leftrightarrow \ln u_n = 3n+1$$

ومنه المتتالية (v_n) : $v_n = \ln u_n = 3n+1$

هي متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها الأول : $v_0 = 1$

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$$

$$= \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2}(1+3n+1)$$

ومنه : $S_n = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{2}$

3) الفرض : $a_n = n+3$

ا) إثبات أنّ:

$$PGCD(2S_n ; a_n) = PGCD(a_n ; 14)$$

لدينا : $2S_n = 3n^2 + 5n + 2$

بالقسمة الإقليدية لـ $2S_n$ على a_n نجد :

$$2S_n = (3n-4)a_n + 14$$

حسب خوارزمية إقليدس ينتج أنّ :

$$PGCD(2S_n ; a_n) = PGCD(a_n ; 14)$$

ب) القيم الممكنة لـ d : $d = PGCD(2S_n ; a_n)$

$$PGCD(2S_n ; a_n) \Leftrightarrow PGCD(a_n ; 14) = d$$

$$\Rightarrow d / a_n \wedge d / 14 \Rightarrow d \in \{1;2;7;14\}$$

وهي القيم الممكنة لـ d

ج) تعيين قيم n التي من اجلها يكون : $d = 7$

$$PGCD(a_n;14) = d \Leftrightarrow PGCD(n+3;14) = 7$$

$$\Leftrightarrow n+3 = 7\kappa \wedge 14 = 7\times 2 \wedge PGCD(\kappa;2) = 1$$

$$\Leftrightarrow n = 7\kappa - 3 \wedge \kappa = 2\alpha + 1 : \alpha \in \mathbb{N}$$

ومنه : $\boxed{n = 14\alpha + 4 : \alpha \in \mathbb{N}}$

4) دراسة بواقي قسمة 2^n على 7

$$2^0 \equiv 1[7] ; 2^1 \equiv 2[7] ; 2^2 \equiv 4[7] ; 2^3 \equiv 1[7]$$

نستنتج أنّ بواقي قسمة 2^n على 7 تشكّل حدودا لمتتالية دورية ودورها $T = 3$.

التعميم : من اجل كل κ من $\mathbb{N}$:

$$2^{3\kappa+\alpha} \equiv 2^\alpha [7] : \alpha \in \{0;1;2\}$$

قيم n	3κ	$3\kappa+1$	$3\kappa+2$
باقي قسمة 2^n على 7	1	2	4

5) $b_n = 3n\,a_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$

المطلوب: تعيين قيم n : $\oplus ... \begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$

$$\oplus \Leftrightarrow \begin{cases} 3n^2 + 9n - 3n^2 - 5n - 2 + 2^{3\kappa} + 1 \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$$

مع : $\kappa = 672$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4n - 2 + 2 \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \\ PGCD(7;5) = 1 \end{cases} \overset{T.GAUS}{\Rightarrow} n \equiv 0[7\times 5]$$

ومنه : $n \equiv 0[35]$ أي : $\boxed{n = 35\lambda : \lambda \in \mathbb{N}}$

6) إثبات أنّه من اجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$1437^{9n+1} - 3\times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0[7]$$

$$1437^{9n+1} \equiv 2^{3(3n)+1}[7] \Rightarrow 1437^{9n+1} \equiv 2[7]$$

ومنه : $1437^{9n+1} \equiv 2[7]$...①

$$4^{12n+1} \equiv 2^{24n+2}[7] \Rightarrow 4^{12n+1} \equiv 2^{3(8n)+2}[7]$$

ومنه: $4^{12n+1} \equiv 4[7]$.....② و $52 \equiv 3[7]$....③

من ① و ② و ③ ينتج انّ :

$$1437^{9n+1} - 3\times 4^{12n+1} + 52 \equiv$$

$$\equiv 2 - 3\times 4 + 3[7]$$

$$\equiv -7[7]$$

إذن: $1437^{9n+1} - 3\times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0[7]$

التمرين الثالث :(04.5ن):

1) أ) الحل في $\mathbb{C}$ للمعادلة: $z^2-4z+5=0$

$\Delta=-4$ والحلين هما: $z'=2+i\ ;\ z''=2-i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة المعطاة هي :

$$S=\{2-i\,;2+i\}$$

ب) إستنتاج حلول المعادلة :

$$\left(z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)^2-4z+1-4i\left(1-\sqrt{3}\right)=0\ldots(*)$$

$$(*)\Leftrightarrow\left(z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)^2-4\left(z+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow\left(z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)^2-4\left(z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)+5=0$$

$$\Leftrightarrow z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)=2+i\ \vee$$

$$\vee\, z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)=2-i$$

$$\Leftrightarrow z=1+i\sqrt{3}\ \vee z=1+i\left(\sqrt{3}-2\right)$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة(*) هي :

$$S=\left\{1+i\sqrt{3}\ ;\ 1+i\left(\sqrt{3}-2\right)\right\}$$

2) $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ و $z_0=e^{i\theta}$

أ) كتابة العدد المركب $\left(1+i\sqrt{3}\right)$ على الشكل الأسّي:

$$1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ب) تعيين θ: ①..... $\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\overline{z_0}}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$①\Leftrightarrow\frac{e^{i\theta}\times2e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\theta}}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow e^{i2\theta}\times2e^{i\frac{\pi}{3}}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow2e^{i\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow e^{i\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow2\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi:k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow2\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{12}+k\pi$$

وبما انّ: $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ فإنّ: $\theta=\frac{\pi}{12}$

ج) $\theta=\frac{\pi}{12}$ و $n\in\mathbb{N}$ المطلوب: كتابة العدد المركب: $\left(\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right)^n$ على الشكل المثلثي :

$$\left(\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right)^n=\left(\frac{e^{i\theta}\times2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^n$$

$$=\left(e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}\right)^n=e^{in\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{5\pi n}{12}}$$

ومنه: $\left(\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right)^n=e^{i\frac{5\pi n}{12}}=\left[1;\frac{5\pi n}{12}\right]$

أي : $\left(\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right)^n=\cos\frac{5\pi n}{12}+i\sin\frac{5\pi n}{12}$

د) تعيين قيم n : $\left(\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right)^n\in\mathbb{R}_+^*$

$$\left(\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right)^n\in\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow\arg\left(\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right)^n=2k\pi:k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\frac{5n\pi}{12}=2k\pi\Leftrightarrow5n=24k\ldots..\oplus$$

$$\left(24/5n\wedge PGCD(24;5)=1\right)\overset{GAUS}{\Rightarrow}24/n$$

ومنه : $\boxed{n=24m:m\in\mathbb{N}}$

3) المستوي م.م.م.م.م $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

$$z_C=1+i\sqrt{3}\ ;\ z_B=2+i\ ;\ z_A=2-i$$

ا) D مرجح الجملة: $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$

المطلوب حساب z_D: $z_D = 1 + i\left(\sqrt{3} - 2\right)$

ب) إستنتاج أنّ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

يكفي إثبات أنّ قطريه $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان.

لدينا: $\dfrac{z_A+z_C}{2} = \dfrac{z_B+z_D}{2} = \dfrac{3}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

ومنه الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

ج) E نقطة من المستوي:

$$\begin{cases} \arg(z_E-z_A)-\arg(z_E-z_B)=\dfrac{\pi}{2} \\ \left|\dfrac{z_E-z_A}{z_E-z_B}\right|=2 \end{cases} \quad ....(I)$$

المطلوب: ① إثبات أنّ: $z_E = \dfrac{14}{5} + \dfrac{3}{5}i$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \arg\left(\dfrac{z_E-z_A}{z_E-z_B}\right) = \dfrac{\pi}{2} \\ \left|\dfrac{z_E-z_A}{z_E-z_B}\right| = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_E-z_A}{z_E-z_B} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i \;...(II)$$

$$(II) \Leftrightarrow z_E-z_A = 2i(z_E-z_B)$$

$$\Leftrightarrow (1-2i)z_E = z_A - 2i\,z_B$$

$$\Leftrightarrow (1-2i)z_E = 2-i-2i(2+i)$$

$$\Leftrightarrow (1-2i)z_E = 4-5i \Leftrightarrow z_E = \frac{4-5i}{1-2i}$$

بضرب البسط والمقام في مرافق المقام نجد انّ :

$$z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$$

② إثبات أن A هي صورة B بتشابه مباشر.

$$(II) \Leftrightarrow z_E - z_A = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(z_E - z_B)$$

$$\Leftrightarrow z_A - z_E = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_E)$$

وهذا يعني أنّ A هي صورة B بتشابه مباشر مركزه E ونسبته 2 وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

4) M نقطة من المستوي لاحقتها z و I منتصف $[AB]$

أ) تعيين z_I: $z_I = \dfrac{z_A+z_B}{2} = 2$

ب) $\alpha \in \mathbb{R}$ و (Γ) مجموعة النقط M من المستوي:

$$z - z_I = e^{i\alpha}$$

المطلوب: ① التحقق من أنّ : $E \in (\Gamma)$

يكفي إثبات أنّ : $z_E - z_I = e^{i\alpha}$

وبما أنّ α كيفي فيكفي إثبات أنّ: $|z_E - z_I| = 1$

$$|z_E - z_I| = \left|\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1$$

ومنه : $E \in (\Gamma)$

② طبيعة (Γ) وتحديد عناصرها لما يمسح α المجموعة $\mathbb{R}$

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow z - z_I = e^{i\alpha} \Leftrightarrow z_M - z_I = e^{i\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_M - z_I| = 1 \\ \arg(z_M - z_I) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IM = 1 \\ (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{IM}) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$$

ومنه مجموعة النقط (Γ) لما يمسح α المجموعة $\mathbb{R}$ هي هي الدائرة ذات المركز I ونصف القطر 1 .

التمرين الرابع :(06.5 ن): الجزء الأول :

$g(x) = 1 + x^2 + 2\ln x$ و $D =]0;+\infty[$

1) دراسة إتجاه تغير الدالة g:

① المشتقة: من أجل كل x من D:

$$g'(x) = 2x + \frac{2}{x}$$

② **إشارة المشتقة:** من أجل كل x من D: $g'(x)>0$

ومنه g متزايدة تماما على D .

2) إثبات أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α: $\alpha \in]0,52;0,53[$. نطبق مبرهنة القيم المتوسطة على g في المجال I: $I=[0,52;0,53]$

① g مستمرة ورتيبة تماما على المجال I

② $g(0,52)\times g(0,53)<0$

$g(0,52)\approx -0,037$ و $g(0,53)\approx 0,011$

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α:

$\alpha \in]0,52;0,53[$

3) إستنتاج إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	

الجزء الثاني: $f(x)=-x+\dfrac{3+2\ln x}{x}$

$D=]0;+\infty[$ و (C_f) تمثيلها البياني .

1) ① $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$

② $f(x)=-x+\dfrac{3}{x}+2\dfrac{\ln x}{x}$ ومنه:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

2) أ) إثبات أنّ: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$

من أجل كل x من D:

$$f'(x)=-1+\frac{\frac{2}{x}\times x-(3+2\ln x)}{x^2}$$

$$=-1+\frac{2-3-2\ln x}{x^2}=-1+\frac{-1-2\ln x}{x^2}$$

$$=\frac{-x^2-1-2\ln x}{x^2}=\frac{-\left(x^2+1+2\ln x\right)}{x^2}$$

ومنه: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$

ب) تشكيل جدول تغيرات f: إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(-g(x))$ ومنه جدول تغيرات f:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

ج) التحقق من أنّ: $f(\alpha)=2\left(\dfrac{1}{\alpha}-\alpha\right)$

لدينا: $f(\alpha)=-\alpha+\dfrac{3+2\ln\alpha}{\alpha}$

لكن $g(\alpha)=0$ إذن:

$$g(\alpha)=0 \Leftrightarrow 1+\alpha^2+2\ln\alpha=0$$

ومنه نحصل على: $\boxed{2\ln\alpha=-1-\alpha^2}$

بالتعويض في عبارة $f(\alpha)$ نجد:

$$f(\alpha)=-\alpha+\frac{3-1-\alpha^2}{\alpha}=\frac{2-2\alpha^2}{\alpha}$$

$$=2\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\right)=2\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)$$

ومنه: $f(\alpha)=2\left(\dfrac{1}{\alpha}-\alpha\right)$

د) حصر $f(\alpha)$: بما أنّ الدالة u المعرفة على D بـ: $u(x)=2\left(\dfrac{1}{x}-x\right)$ متناقصة تماما على المجال D وبالتالي عل المجال: $I=[0,52;0,53]$ فإنّ:

$$0,52<\alpha<0,53 \Leftrightarrow u(0,53)<u(\alpha)<u(0,52)$$

$$\Leftrightarrow 2,71<f(\alpha)<2,81$$

ومنه: $\boxed{2,71<f(\alpha)<2,81}$

3) أ) $f(x)+x=\dfrac{3}{x}+2\dfrac{\ln x}{x}$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)=0$ لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

ونستنتج هندسيا أنّ المنحنى (C_f) يقبل في جوار $+\infty$ مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته: $y=-x$

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) : ندرس إشارة المقدار $A(x)$: $A(x)=f(x)+x$

$A(x)=\frac{3+2\ln x}{x}$ ومنه إشارة $A(x)$:

$$A(x)=0 \Leftrightarrow 3+2\ln x=0 \Leftrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$$

ومنه : $(C_f)\cap(\Delta)=\left\{A\left(e^{-\frac{3}{2}};-e^{-\frac{3}{2}}\right)\right\}$

وإشارة $A(x)$ هي إشارة البسط :

x	0 $\qquad$ $e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$A(x)$	$-$	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

ج) إثبات أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ)

$$(T)/\!/(\Delta) \Leftrightarrow f'(x)=-1 \Leftrightarrow \frac{-g(x)}{x^2}=-1$$

$$\Leftrightarrow g(x)=x^2 \Leftrightarrow 1+x^2+2\ln x=x^2$$

$$\Leftrightarrow 2\ln x=-1 \Leftrightarrow \ln x=\frac{-1}{2} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$$

ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $e^{-\frac{1}{2}}$

معادلة المماس (T):

$$(T): y=f'\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x-e^{-\frac{1}{2}}\right)+f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

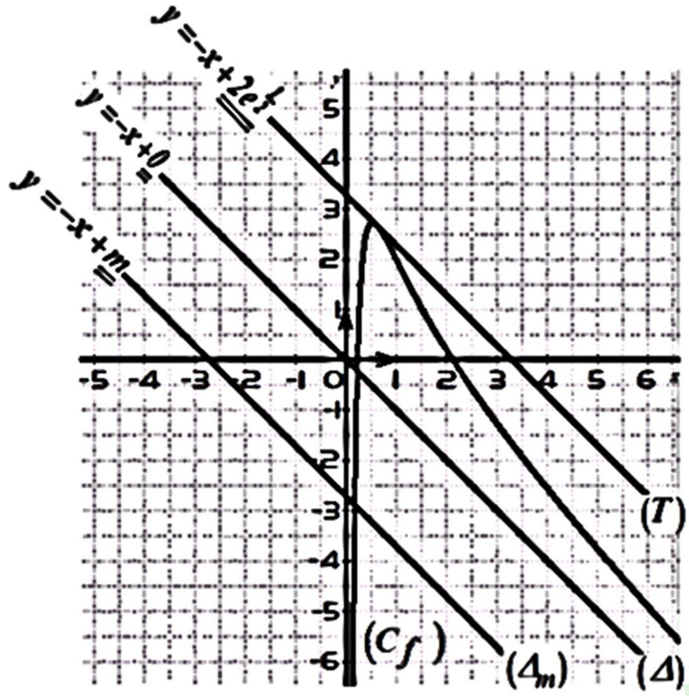
$$=-1\left(x-e^{-\frac{1}{2}}\right)+2e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}$$

ومنه : $(T): y=-x+2e^{\frac{1}{2}}$

4) $(C_f)\cap(x'x)=\{A_0(x_0;0);A_1(x_1;0)\}$

$2,11\le x_1\le 2,13$; $0,22<x_0<0,23$

__المطلوب__ : إنشاء (T) و (Δ) و (C_f)



5) m وسيط حقيقي: المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة:

$$3+2\ln x-mx=0....(*)$$

$$(*)\Leftrightarrow mx=3+2\ln x \Leftrightarrow m=\frac{3+2\ln x}{x}$$

$$\Leftrightarrow -x+m=-x+\frac{3+2\ln x}{x}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=-x+m....(**)$$

حلول المعادلة $(**)$ هي فواصل النقط المشتركة بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ_m) ذو المعادلة: $y=-x+m$ والذي يوازي كلاًّ من (Δ) و (T)

__المناقشة__ : ① إذا كان $m\in]-\infty;0]$ فإنّ (Δ_m) يقع تحت (Δ) وللمعادلة $(**)$ حلاّ وحيدا .

② إذا كان $m \in \left]0 ; 2e^{\frac{1}{2}}\right[$ فإنّ (Δ_m) يقع بين (Δ) و (T) والمعادلة $(**)$ حلّين متمايزين .

③ إذا كان $m = 2e^{\frac{1}{2}}$ فإنّ (Δ_m) ينطبق على (T) والمعادلة $(**)$ حلاّ مضاعفا هو $x = e^{-\frac{1}{2}}$

④ إذا كان $m \in \left]2e^{\frac{1}{2}} ; +\infty\right[$ فإنّ (Δ_m) يقع فوق (T) والمعادلة $(**)$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

الجزء الثالث: (u_n) م ع :

$$u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) + x)dx$$

1) إثبات أنّ: $u_n > 0$ لدينا: $u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} A(x)dx$

بما أنّ $A(x) > 0$ على $\left[e^n ; e^{n+1}\right]$ فإنّ: $u_n > 0$

2) إعطاء تفسيرا هندسيا لـ u_0 :

$$u_0 = \int_1^e A(x)dx = \int_1^e (f(x) + x)dx$$

u_0 هومساحة السطح للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$

3) حساب u_n بدلالة n :

$$u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} A(x)dx = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left(\frac{3}{x} + 2\frac{\ln x}{x}\right)dx$$

$$= \left[3 \ln x + 2 \times \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{e^n}^{e^{n+1}}$$

$$= \left[(\ln x)^2 + 3 \ln x\right]_{e^n}^{e^{n+1}}$$

$$= (n+1)^2 + 3(n+1) - \left(n^2 + 3n\right)$$

ومنه نجد : $u_n = 2n + 4$

4) $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

المطلوب : حساب S_n بدلالة n : بما أنّ:

$u_n = 2n + 4$ من الشكل: $u_n = u_0 + nr$

فإنّ (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول $u_0 = 4$ و S_n هومجموع $(n+1)$ حدا لمتتالية حسابية . إذن : $S_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$

$$= \frac{n+1}{2}(4 + 2n + 4)$$

$$= \frac{n+1}{2}(2n + 8)$$

ومنه : $\boxed{S_n = (n+1)(n+4)}$

إنتـــــــــــــــــــهى

التمرين الأول :(05ن): $A(1;0;3)$; $B(1;2;4)$; $C(0;0;2)$; $D(3;4;1)$

1) أ) يكون $\vec{n}(2;\alpha;-\beta)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) إذاا كان: (I)...
$$\begin{cases}\vec{n}\perp\vec{AB}\\ \vec{n}\perp\vec{AC}\end{cases}$$

لدينا : $\vec{AB}(0;2;1)$; $\vec{AC}(-1;0;-1)$

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha-\beta=0\\ -2+\beta=0\end{cases}\Rightarrow(\alpha;\beta)=(1;2)$$

ومنه : $\vec{n}(2;1;-2)$

ب) $(ABC):\ 2x+y-2z+d=0$

$C\in(ABC)\Leftrightarrow d=4$

ومنه : $(ABC):\ 2x+y-2z+4=0$

2) $(P): x+z-2=0$ شعاعه الناظمي $\vec{n}(1;0;1)$

$(Q)=(ABC):\ 2x+y-2z+4=0$

أ) $\vec{n}\cdot\vec{n}_P=2-2=0$ إذن (P) و (Q) متعامدين

ب) إعطاء تمثيل وسيطي لمستقيم التقاطع (Δ)

$$(\Delta):\begin{cases}x+z-2=0\\ 2x+y-2z+4=0\end{cases}$$

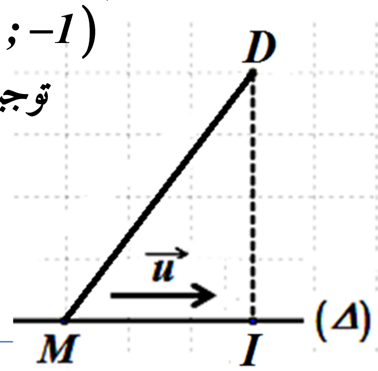
بأخذ x كوسيط أي $x=t\ :t\in\mathbb{R}$ نجد :

$$(\Delta):\begin{cases}x=t\\ y=-4t\\ z=2-t\end{cases}\ :t\in\mathbb{R}$$

يقبل أي تمثيل وسيطي آخر.

ج) حساب المسافة : $d(D;(\Delta))$

$\vec{u}(1;-4;-1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و I هي المسقط العمودي للنقطة D على (Δ)



طريقة①: $d(D;(\Delta))=DI$

تعيين إحداثيات I : لدينا من جهة :

$I\in(\Delta)\Rightarrow I(t;-4t;2-t)$

ومن جهة أخرى : $\vec{DI}(t-3;-4t-4;1-t)$

$$\vec{DI}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\vec{DI}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow t=\frac{-2}{3}$$

وبالتالي: $I\left(\frac{-2}{3};\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$; $\vec{DI}\left(\frac{-11}{3};\frac{-4}{3};\frac{5}{3}\right)$

$$d(D;(\Delta))=DI=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

طريقة②: $d_1=d(D;(P))=\sqrt{2}$

و $d_2=d(D;(Q))=4$ ونعلم أنّ :

$d=d(D;(\Delta))$: $d^2=d_1^2+d_2^2$ ومنه :

$$d=\sqrt{d_1^2+d_2^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

طريقة③:

$$d(D;(\Delta))=DI=\min f(t):f(t)=DM$$

$M\in(\Delta)\Rightarrow M(t;-4t;2-t)$

$$f(t)=DM=\sqrt{18t^2+24t+26}$$

$$f'(t)=\frac{6(3t+2)}{\sqrt{18t^2+24t+26}}$$

جدول تغيرات يعطى بــ:

t	$-\infty$		$\frac{-2}{3}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	$f\left(\frac{-2}{3}\right)$	↗	

$$d(D;(\Delta))=\min f(t)=f\left(\frac{-2}{3}\right)=3\sqrt{2}$$

3) (S) سطح كرة مركزها D ومماس لـ (Q)

أ) كتابة معادلة ديكارتية لــــ (S)

ومنه : $r=d(D;Q)=4$

$$(S):(x-x_D)^2+(y-y_D)^2+(z-z_D)^2=r^2$$
$$(S):(x-3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=16$$
وهي معادلة ديكارتية لــ(S)

ب) إيجاد الطبيعة والعناصر المميزة لتقاطع (P) و(S)

بما أنّ : $d(D;(P))=d_1=\sqrt{2}<r$ فإنّ :
(P) يقطع (S) في دائرة (C) .

تحديد R نصف قطر وω مركز الدائرة (C) .
$$R=\sqrt{r^2-d_1^2}=\sqrt{16-2}=\sqrt{14}$$
و $\{\omega\}=(P)\cap(d)$ حيث (d) هو المستقيم العمودي على (P) ويشمل النقطة D . و تمثيله الوسيطي هو : $\kappa\in\mathbb{R}$:
$$(d):\begin{cases}x=3+\kappa\\ y=4\\ z=\kappa+1\end{cases}$$
بتعويض قيم $x;y;z$ في معادلة المستوي (P) نجد: $\kappa=-1$
ومنه : $(P)\cap(d)=\{\omega(2;4;0)\}$
إذن (C) هي الدائرة ذات المركز $\omega(2;4;0)$
ونصف القطر $R=\sqrt{14}$

4) λ عدد حقيقي و G_λ نقطة من الفضاء :
$$2\overrightarrow{G_\lambda A}-\overrightarrow{G_\lambda B}+e^\lambda\overrightarrow{G_\lambda C}=\vec{0}\;.....(*)$$
أي G_λ مرجح الجملة : $\{(A;2);(B;-1);(C;e^\lambda)\}$

أ) تعيين المجموعة (Γ) مجموعة النقط من الفضاء :
$$(1+e)\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=$$
$$=2\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+e\overrightarrow{MC}\right\|....\otimes$$
$$\otimes\Leftrightarrow(1+e)\left\|(2-1+1)\overrightarrow{MG_0}\right\|=$$
$$=2\left\|(2-1+e)\overrightarrow{MG_1}\right\|$$
$$\Leftrightarrow 2(1+e)MG_0=2(1+e)MG_1$$
$$\Leftrightarrow MG_0=MG_1$$
ومنه (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة $[G_0G_1]$

ب) H مرجح الجملة: $\{(A;2);(B;-1)\}$
المطلوب : كتابة $\overrightarrow{CG_\lambda}$ بدلالة $\overrightarrow{CH}$

$$(*)\Leftrightarrow(2-1)\overrightarrow{G_\lambda H}+e^\lambda\overrightarrow{G_\lambda C}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow e^\lambda\overrightarrow{G_\lambda C}+\overrightarrow{G_\lambda H}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow e^\lambda\overrightarrow{G_\lambda C}+\overrightarrow{G_\lambda C}+\overrightarrow{CH}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow(e^\lambda+1)\overrightarrow{G_\lambda C}=-\overrightarrow{CH}$$
$$\Leftrightarrow-(e^\lambda+1)\overrightarrow{CG_\lambda}=-\overrightarrow{CH}$$
ومنه : $\overrightarrow{CG_\lambda}=\dfrac{1}{e^\lambda+1}\overrightarrow{CH}....(**)$

ج) تعيين مجموعة النقط G_λ لما يمسح λ المجموعة $\mathbb{R}$

المساواة $(**)$ تعني أنّ النقط $G_\lambda;H;C$ في إستقامية .وبما أنّ $0<\dfrac{1}{e^\lambda+1}<1$ فإنّ :
مجموعة النقط G_λ لما يتغير λ في المجموعة $\mathbb{R}$ هي القطعة للمستقيمة $[CH]$ بإستثناء النقطتين C وH

د) إيجاد قيمة λ حتى تكون G_λ هي منتصف القطعة $[CH]$. حتى يتحقق ذالك يجب أن يكون $\dfrac{1}{e^\lambda+1}=\dfrac{1}{2}....\odot$
$$\odot\Leftrightarrow e^\lambda+1=2\Leftrightarrow e^\lambda=1\Leftrightarrow\lambda=0$$
وتكون عندئذ G_0 هي منتصف القطعة $[CH]$

التمرين الثاني :(04ن): الجزء الأول :

1) الحل في $\mathbb{C}$ للمعادلة: $z^2-2z+2=0$
$\Delta=-4$ والحلين هما : $z'=1+i\;;\;z''=1-i$

2) الحل في $\mathbb{C}^2$ للجملة :
$$\begin{cases}2z_1-3z_2=5\sqrt{2}\,i\\ z_1+3z_2=-2\sqrt{2}\,i\end{cases}....(I)$$
بالجمع طرفا لطرف نجد : $z_1=\sqrt{2}\,i$ وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد: $z_2=-\sqrt{2}\,i$ ومنه للجملة حلاّ وحيدا هوالثنائية $(z_1;z_2)$:
$$(z_1;z_2)=(\sqrt{2}\,i;-\sqrt{2}\,i)$$

الجزء الثاني : المستوي المركب م م.م.م $(O;\vec{u};\vec{v})$

$z_A=\sqrt{2}\,i$; $z_B=-\sqrt{2}\,i$; $z_C=1+i$

$z_D=1-i$; $z_H=\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}$; $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DO}$

1) أ) كتابة z_H على الشكل الأسّي: ① حساب z_E:

$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DO} \Leftrightarrow z_E-z_D=-2z_D$

$\Leftrightarrow z_E=-z_D \Leftrightarrow \boxed{z_E=-1+i}$

② كتابة z_H على الشكل الجبري: بالتعويض عن: $z_B ; z_C ; z_E$ في عبارة z_H وبالضرب والقسمة

في مرافق المقام نجد: $z_H=\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}-i\,\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

أي: $z_H=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ وهو الشكل الجبري لـ z_H

وشكله الأسّي هو $z_H=e^{-i\frac{\pi}{4}}$

إستنتاج نوع المثلث BCE :لدينا :

$$\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=z_H=e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

ومنه :$z_C-z_B=e^{-i\frac{\pi}{4}}(z_E-z_B)$....(*)

إذن النقطة C هي صورة النقطة E بالدوران R

الذي مركزه B وزاويته $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

إذن : $R(E)=C \Leftrightarrow \begin{cases} BE=BC \\ (\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BC})\equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

ومنه المثلث BCE متقايس الساقين فيه $BE=BC$

2) S تحويل نقطي: $S(M)=M' : z'=z_A z+z_B$

أي : $S(M)=M' : z'=\sqrt{2}\,i\,z-\sqrt{2}\,i$

أ) طبيعة التحويل S: S عبارته من الشكل:

$z'=az+b : (a;b)=(\sqrt{2}\,i;-\sqrt{2}\,i)$

بما أنّ $a\in(\mathbb{C}-\mathbb{R})$ و $|a|\neq 1$ فإنّ S تشابه مباشر

تحديد عناصر التشابه S :بما أنّ : $a=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

فإنّ نسبته هي $|a|$ أي $\sqrt{2}$ وزاويته $\arg(a)$ أي $\frac{\pi}{2}$

ومركزه النقطة الصامدة ω ذات اللاحقة z_ω :

$z_\omega=\frac{b}{1-a}$ وبالتعويض عن قيمتي a و b في z_ω

نجد : $z_\omega=\frac{2}{3}-i\,\frac{\sqrt{2}}{3}$: اي $\omega\left(\frac{2}{3};\frac{-\sqrt{2}}{3}\right)$

ب) (γ) دائرة مركزها $C(1;1)$ ونصف قطرها $r=CD=2$ المطلوب : حساب مساحة (γ)

$$Su(\gamma)=\pi r^2=4\pi u.a$$

ج) ① تعيين (γ') صورة (γ) بالتحويل S : بما أننا نعلم أنّ S ليس تقايسا فإنّ : (γ') هي دائرة مركزها C' :

$C'=S(C)$ ونصف قطرها r' : $r'=\kappa r=2\sqrt{2}$

إضافة :(غير مطلوب) : تعيين C'

$S(C)=C' \Leftrightarrow z_{C'}=\sqrt{2}\,i\,z_C-\sqrt{2}\,i$

ومنه نحصل على : $z_{C'}=-\sqrt{2}$ اي : $C'(-\sqrt{2};0)$

② إستنتاج مساحة (γ') :

$$Su(\gamma')=\kappa^2\times Su(\gamma)=8\pi u.a$$

(κ هي نسبة التشابه S)

3) (δ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z

$M\neq C \wedge M\neq B$: $\frac{z_B-z}{z_C-z}\in\mathbb{R}^*_-$

$\frac{z_B-z}{z_C-z}\in\mathbb{R}^*_- \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_B-z_M}{z_C-z_M}\right)=\pi+2\kappa\pi : \kappa\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MB})=(2\kappa+1)\pi \Leftrightarrow(\overrightarrow{MC}\,/\!/\,\overrightarrow{MB})$

و $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MC}$ متعاكسين في الإتجاه ومنه

مجموعة النقط M هي القطعة المستقيمة $[BC]$ بإستثناء

النقطتين B و C أي : $(\delta)=[BC]-\{B;C\}$

التمرين الثالث :(04ن):(1) أ) ①دراسة بواقي قسمة 3^n على 11

$$3^0 \equiv 1[11];\ 3^1 \equiv 3[11];\ 3^2 \equiv 9[11]$$

$$3^3 \equiv 5[11];\ 3^4 \equiv 4[11];\ 3^5 \equiv 1[11]$$

نستنتج أنّ بواقي قسمة 3^n على 11 تشكّل حدودا لمتتالية دورية ودورها $T=5$.

التعميم : من اجل كل κ من $\mathbb{N}$:

$$3^{5\kappa+\alpha} \equiv 3^{\alpha}[11] : \alpha \in \{0;1;2;3;4\}$$

قيم n	5κ	$5\kappa+1$	$5\kappa+2$	$5\kappa+3$	$5\kappa+4$
باقي قسمة 3^n على 11	1	3	9	5	4

②دراسة بواقي قسمة 7^n على 11: بطريقة مماثلة نجد أنّ بواقي قسمة 3^n على 11 تشكّل حدودا لمتتالية دورية ودورها $T'=10$.

التعميم : من اجل كل m من $\mathbb{N}$:

$$7^{10m+\beta} \equiv 7^{\beta}[11] : \beta \in \{0;1;2;....;9\}$$

قيم n	$10m$	$10m+1$	$10m+2$	$10m+3$	$10m+4$
باقي قسمة 7^n على 11	1	7	5	2	3
قيم n	$10m+5$	$10m+6$	$10m+7$	$10m+8$	$10m+9$
باقي قسمة 7^n على 11	10	4	6	9	8

ب) إثبات أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 0[11]$$

لدينا : $\begin{cases} 2016 \equiv 3[11] \\ 1437 \equiv 7[11] \end{cases} ....(I)$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2016^{5n+4} \equiv 3^{5n+4}[11] \\ 1437^{10n+4} \equiv 7^{10n+4}[11] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2016^{5n+4} \equiv 4[11] \\ 1437^{10n+4} \equiv 3[11] \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times 2016^{5n+4} \equiv 8[11] \\ 1437^{10n+4} \equiv 3[11] \end{cases}$ ومنه :

$$2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 8+3[11]$$

أي : $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 11[11]$

أي : $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 0[11]$

2) الفرض : $7x-3y=8...(E):(x;y)\in\mathbb{N}^2$

أ) حل المعادلة (E): بما أنّ $PGCD(7;3)=1$ والطرف الأيمن غير معدوم فإنّه لحل المعادلة (E) نبحث عن حل خاص لها. نلاحظ أنّ: $(2;2)$ هو حل خاص لـ (E) ومنه :

$$7x-3y=8$$

$$7(2)-3(2)=8$$

بالطرح نجد : $7(x-2)-3(y-2)=0$ أي :

$$7(x-2)=3(y-2)....(*)$$

$$\left(3/7(x-2) \wedge PGCD(3;7)=1\right) \overset{GAUS}{\Longrightarrow} 3/(x-2)$$

ومنه : $x-2=3\kappa$ أي: $x=3\kappa+2 : \kappa\in\mathbb{N}$

بالتعويض في $(*)$ نجد : $y=7\kappa+2$ ومنه مجموعة حلول المعادلة (E) في $\mathbb{N}^2$ هي المجموعة S :

$$S=\left\{(x;y)\in\mathbb{N}^2 : x=3\kappa+2 \wedge y=7\kappa+2 : \kappa\in\mathbb{N}\right\}$$

ب) الفرض $(x;y)$ من S و $d=PGCD(x;y)$

المطلوب: ①القيم الممكنة لـ d

$$\left(PGCD(x;y)=d\right) \Rightarrow \left(d/x \wedge d/y\right)$$

$$\Rightarrow d/(\alpha x+\beta y) : (\alpha;\beta)\in\mathbb{Z}^2$$

$$\Rightarrow (d/7x-3y) \Rightarrow d/8 \Rightarrow d\in D_8$$

ومنه: $d\in\{1;2:4;8\}$ وهي القيم الممكنة لـ d

② تعيين $(x;y)$ من S بحيث : $d=4$

لدينا: $x=3\kappa+2$ و $y=7\kappa+2$

بإستعمال خوارزمية إقليدس نجد:

$$\underline{\underline{7\kappa+2}} = 2\left(\underline{\underline{3\kappa+2}}\right) + \underline{\underline{\kappa-2}}$$

$$\underline{\underline{3\kappa+2}} = 3\left(\underline{\underline{\kappa-2}}\right) + \underline{\underline{8}}$$

$d=PGCD(y;x)=PGCD(7\kappa+2;3\kappa+2)=$

$=PGCD(3\kappa+2;\kappa-2)=PGCD(\kappa-2;8)$

$(d=4)\Leftrightarrow PGCD(\kappa-2;8)=4$

$\Leftrightarrow \kappa-2=4m \wedge 8=4\times 2 \wedge PGCD(m;2)=1$

$\Leftrightarrow \kappa=4m+2 \wedge m=2\lambda+1 : \lambda\in\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \kappa=8\lambda+6 : \lambda\in\mathbb{N}$

ومنه : $(x;y)=(24\lambda+20;56\lambda+44)$

ج) إيجاد $(x;y)$ من S التي تحقق:

$2016^{7x}+1437^{3y}\equiv 0[11]...\oplus$

$\oplus \Leftrightarrow 3^{7x}+7^{3y}\equiv 0[11]$

$\Leftrightarrow 3^{7(3\kappa+2)}+7^{3(7\kappa+2)}\equiv 0[11]$

$\Leftrightarrow 3^{21\kappa+14}+7^{21\kappa+6}\equiv 0[11]$

$\Leftrightarrow 3^{(5\times 4\kappa+\kappa+5\times 2+4)}+7^{(10\times 2\kappa+\kappa+6)}\equiv 0[11]$

$\Leftrightarrow 3^{5(4\kappa+2)}\times 3^{\kappa+4}+7^{10(2\kappa)}\times 7^{\kappa+6}\equiv 0[11]$

$\Leftrightarrow 3^{\kappa+4}+7^{\kappa+6}\equiv 0[11]$

$\Leftrightarrow 3^{\kappa}\times 3^4+7^{\kappa}\times 7^6\equiv 0[11]$

$\Leftrightarrow 4\times 3^{\kappa}+4\times 7^{\kappa}\equiv 0[11]$

$\Leftrightarrow 4(3^{\kappa}+7^{\kappa})\equiv 0[11]$

ومنه نحصل على : $3^{\kappa}+7^{\kappa}\equiv 0[11]...(II)$

ناخذ الدور المشترك T للدورين $T_1;T_2$ فنجد :

ومنه الجدول $T=PPCM(5;10)=10$:

$\kappa\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	[10]
$3^{\kappa}\equiv$	1	3	9	5	4	1	3	9	5	4	[11]
$7^{\kappa}\equiv$	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8	[11]
$3^{\kappa}+7^{\kappa}\equiv$	2	10	3	7	7	0	7	4	3	1	[11]

$(II)\Leftrightarrow \kappa\equiv 5[10]\Leftrightarrow \kappa=10\alpha+5 : \alpha\in\mathbb{N}$

ومنه : $(x;y)=(30\alpha+17;70\alpha+37)$

التمرين الرابع :(07ن) الجزء الأول:

$$\varphi(x)=(x^2-x+1)e^{-x+1}-1$$

$$D=]-\infty;+\infty[$$

1) أ) ① $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=+\infty$

② $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-1$ لأنّ :

$$\varphi(x)=x^2\times e^{-x+1}+(-x+1)e^{-x+1}-1$$

$$=e\times\frac{x^2}{e^x}+(-x+1)e^{-x+1}-1$$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 : n\in\mathbb{N}$ و

$$\lim_{x\to+\infty}(-x+1)e^{-x+1}=\lim_{t\to-\infty}te^t=0$$

ب) دراسة إتجاه تغير φ وتشكيل جدول تغيراتها.

① المشتقة :من أجل كل x من D:

$$\varphi'(x)=(2x-1)e^{-x+1}+(-1)e^{-x+1}(x^2-x+1)$$

بالتبسيط نجد: $\varphi'(x)=(-x^2+3x-2)e^{-x+1}$

②إشارة المشتقة :

$$\varphi'(x)=0\Leftrightarrow -x^2+3x-2=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(-x+2)=0\Leftrightarrow x=1\vee x=2$$

وإشارة $\varphi'(x)$ هي إشارة $(-x^2+3x-2)$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه φ متزايدة تماما على المجال $[1;2]$ و متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;1]$ و $[2;+\infty[$

③جدول تغيرات الدالة φ

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3-e}{e}$	$\searrow$	-1

2) إثبات أنّ المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α: $\alpha\neq 1$

من جدول التغيرات السابق نلاحظ أنه في المجال: $]-\infty;2]$

المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا هو $x=1$

أمّا في المجال $]2;+\infty[$ نطبق مبرهنة القيم المتوسطة على φ

① φ مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]2;+\infty[$

② $\varphi(2)\times \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)<0$ إذن المعادلة

$\varphi(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α : $\alpha\in]2;+\infty[$

التحقق من انّ : $2,79<\alpha<2,80$

لدينا : $\varphi(2,79)\approx 0,00077$ و $\varphi(2,80)\approx -0,0015$

بما انّ : $\varphi(2,79)\times\varphi(2,80)<0$ فإنّ :

$2,79<\alpha<2,80$

3) إستنتاج إشارة $\varphi(x)$

x	$-\infty$		1		2		α		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{3-e}{e}$	↘	0	↘	-1
$\varphi(x)$		$+$	0	$+$			0	$-$	

الجزء الثاني : $f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$ و

$g(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+1}$ و

$D=D_f=D_g=]-\infty;+\infty[$

1) أ) ① $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

② $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2e\frac{x}{e^x}-e^{-x+1}\right]=0$

ب) دراسة إتجاه تغير f وتشكيل جدول تغيراتها.

① المشتقة: $f'(x)=(3-2x)e^{-x+1}$

② إشارة المشتقة : $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

وإشارة $f'(x)$ هي إشارة $(3-2x)$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\frac{3}{2}]$ و

متناقصة تماما على المجال $[\frac{3}{2};+\infty[$.

③ جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$2e^{-\frac{1}{2}}$	↘	0

2) أ) ① إثبات أنّ المنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

يكفي إثبات أنّ: $(I)....\begin{cases} f(1)=g(1)\\ f'(1)=g'(1)\end{cases}$

لدينا : $f(1)=g(1)=1 \wedge f'(1)=1....①$

و $g'(x)=\frac{2(x^2-x+1)-(2x-1)^2}{(x^2-x+1)^2}$

ومنه : $g'(1)=1.....②$

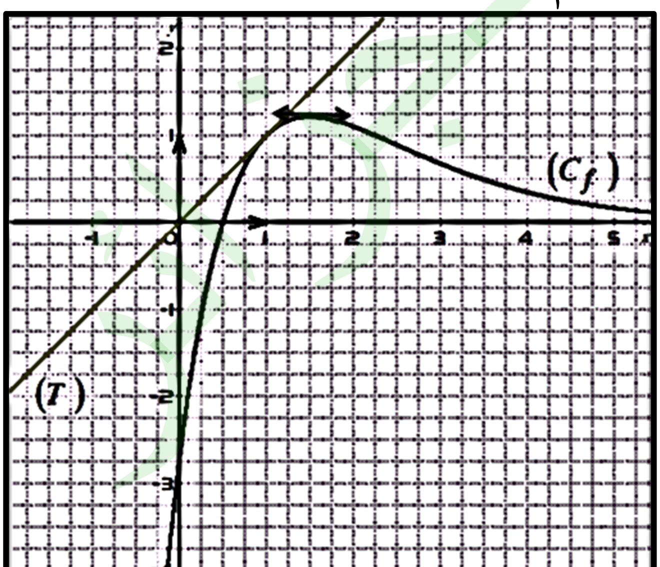
من ① و ② ينتج أنّ الجملة محققة فعلا .

② إيجاد معادلة المماس (T) :

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=x$

ومنه : $(T): y=x$

3) رسم المماس (T) والمنحنى (C_f):



4) أ) إثبات أنّ : $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$

$$f(x)-g(x)=(2x-1)e^{-x+1}-\frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{(2x-1)\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-(2x-1)}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{(2x-1)\left[\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-1\right]}{x^2-x+1}$$

ومنه: $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$

ب) دراسة إشارة $\left(f(x)-g(x)\right)$ **واستنتاج الوضعية النسبية بين المنحنيين** (C_f) و (C_g)

$$f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow(2x-1)\varphi(x)=0$$

ومنه : $\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\vee x=1\vee x=\alpha$

$$(C_f)\cap(C_g)=\left\{\left(\frac{1}{2};0\right);(1;1);(\alpha;f(\alpha))\right\}$$

و إشارة $\left(f(x)-g(x)\right)$ هي إشارة الجداء : $(2x-1)\varphi(x)$ لأنّ : المقام مميزه سالب فيكون $x^2-x+1>0$

x	$-\infty$ …	$\frac{1}{2}$	…	1	…	α	… $+\infty$
$2x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\varphi(x)$	$+$		$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)-g(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) تحت (C_g)		(C_f) فوق (C_g)		(C_f) فوق (C_g)		(C_f) تحت (C_g)

ج) بإستعمال التكامل بالتجزئة المطلوب حساب $\int_1^x f(t)\,dt$ **بدلالة العدد** x **:**

نعلم أنّ :

$$\int_a^b u(t)\times v'(t)\,dt=\left[u(t)\times v(t)\right]_a^b-\int_a^b v(t)\times u'(t)\,dt\ .....\otimes$$

$$\begin{cases}u(t)=2t-1\\ v'(t)=e^{-t+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u'(t)=2\\ v(t)=-e^{-t+1}\end{cases}$$

بالتعويض في $\otimes$ نجد :

$$\int_1^x f(t)\,dt=\left[-(2t-1)e^{-t+1}\right]_1^x+2\int_1^x e^{-t+1}\,dt$$

$$=\left[(1-2t)e^{-t+1}-2e^{-t+1}\right]_1^x$$

$$=\left[(-2t-1)e^{-t+1}\right]_1^x$$

$$=(-2x-1)e^{-x+1}-(-3)$$

ومنه : $\int_1^x f(t)\,dt=(-2x-1)e^{-x+1}+3$

د) حساب للمساحة A : المعرفة بمجموعة النقط $M(x;y)$ **من المستوي :** $\begin{cases}1\le x\le 2\\ g(x)\le y\le f(x)\end{cases}$

$$A=\int_1^2\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_1^2 f(x)\,dx-\int_1^2 g(x)\,dx$$

$$=\left[(-2x-1)e^{-x+1}+3\right]_1^2-\int_1^2\frac{\left(x^2-x+1\right)'}{x^2-x+1}\,dx$$

$$=\left[(-2x-1)e^{-x+1}+3-\ln\left(x^2-x+1\right)\right]_1^2$$

$$=-5e^{-1}+3-\ln 3$$

ومنه : $A=\left(3-\dfrac{5}{e}-\ln 3\right)u.a$

الجزء الثالث : 1) حساب كلاًّ من: $f''(x)$ و $f^{(4)}(x);f^{(3)}(x)$ وإعطاء تخمين لعبارة $f^{(n)}(x)$

$$f(x)=(2x-1)e^{-x+1}\ ;\ f'(x)=(3-2x)e^{-x+1}$$
$$f''(x)=(2x-5)e^{-x+1}\ ;\ f^{(3)}(x)=(-2x+7)e^{-x+1}$$
$$f^{(4)}(x)=(2x-9)e^{-x+1}$$

التخمين :

$$f'(x)=(-1)^{\underline{\underline{1}}}\left(2x-\left(2\times\underline{\underline{1}}+1\right)\right)e^{-x+1}$$
$$f''(x)=(-1)^{\underline{\underline{2}}}\left(2x-\left(2\times\underline{\underline{2}}+1\right)\right)e^{-x+1}$$
$$f^{(3)}(x)=(-1)^{\underline{\underline{3}}}\left(2x-\left(2\times\underline{\underline{3}}+1\right)\right)e^{-x+1}$$
$$f^{(4)}(x)=(-1)^{\underline{\underline{4}}}\left(2x-\left(2\times\underline{\underline{4}}+1\right)\right)e^{-x+1}$$

....

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\left(2x-(2n+1)\right)e^{-x+1}:n\in\mathbb{N}^*$$

2) نضع : $P(n):f^{(n)}(x)=(-1)^n\left(2x-(2n+1)\right)e^{-x+1}$

المرحلة ①: من أجل $n=1$ فإنّ :

$$\begin{cases}T_g=f^{(1)}(x)=(3-2x)e^{-x+1}\\ T_d=(-1)^1(2x-3)e^{-x+1}=(3-2x)e^{-x+1}\end{cases}$$

ومنه $T_g=T_d$ إذن $P(1)$ صحيحة .

المرحلة ②: نفرض أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ $P(n)$ صحيحة أي :

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\left(2x-(2n+1)\right)e^{-x+1}$$

ونبرهن أنّ $P(n+1)$ صحيحة أي نبرهن أنّ :

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\left(2x-(2n+3)\right)e^{-x+1}$$

لدينا : $f^{(n+1)}(x)=\left[f^{(n)}\right]'(x)=$

$$=(-1)^n\left[2e^{-x+1}-e^{-x+1}\left(2x-(2n+1)\right)\right]$$
$$=(-1)^n\times(-1)^1\left[-2e^{-x+1}+e^{-x+1}(2x-2n-1)\right]$$
$$=(-1)^{n+1}(2x-2n-3)e^{-x+1}$$

ومنه: $f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\left(2x-(2n+3)\right)e^{-x+1}$

إذن $P(n+1)$ صحيحة ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع فإنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$:

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\left(2x-(2n+1)\right)e^{-x+1}$$

3) الفرض : $u_n=f^{(n)}(1)=(-1)^n(1-2n)$

أي : $u_n=(-1)^{n+1}(2n-1)$

أ) حساب بدلالة κ مع $\kappa\in\mathbb{N}^*$ المجموع: $u_\kappa+u_{\kappa+1}$

$$u_\kappa+u_{\kappa+1}=(-1)^{\kappa+1}(2\kappa-1)+(-1)^{\kappa+2}(2\kappa+1)$$
$$=(-1)^{\kappa+1}\left[2\kappa-1-(2\kappa+1)\right]$$
$$=(-1)^{\kappa+1}(-2)=(-1)^{\kappa}\times 2$$

ومنه : $u_\kappa+u_{\kappa+1}=2\times(-1)^{\kappa}$

ب) إستنتاج بدلالة n المجموع S_n:

$$S_n=u_1+u_2+\dots\dots+u_n$$

S_n هو مجموع $2n$ حدا لمتتالية عددية (u_n):

$$S_n=(u_1+u_2)+(u_3+u_4)+\dots\dots+(u_{2n-1}+u_{2n})$$
$$=2\times(-1)^1+2\times(-1)^3+2\times(-1)^5+\dots\dots+2\times(-1)^{2n-1}$$
$$=2\left[(-1)^1+(-1)^3+(-1)^5+\dots+(-1)^{2n-1}\right]$$
$$=2\underbrace{(-1-1-1-\dots\dots-1)}_{n\ \text{مــرّة}}$$

ومنه : $S_n=2(-n)=-2n$

إذن : $S_n=u_1+u_2+\dots\dots+u_n=-2n$

❀ إنتــــــــــــهى ❀

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: 2017

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقطتين $A(-1;1;-2)$ و $B(1;-3;-4)$ والمستقيم (Δ) ذا التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x=t-2 \\ y=-t+2 \\ z=2t-4 \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$

وليكن (Δ') المستقيم الذي يشمل النقطة B و $\vec{u}(-1;2;1)$ شعاع توجيه له .

1) بيّن أنّ المستقيمين (Δ) و (Δ') يتقاطعان في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

2) ليكن (P) المستوي المعيّن بالمستقيمين (Δ) و (Δ') .

اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) ، ثم استنتج معادلة ديكارتية له .

3) نسمّي (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $AM^2+BM^2=20$.

بيّن أنّ (S) سطح كرة مركزها منتصف القطعة $[AB]$ ونصف قطرها 2 .

4) حدّد الوضع النسبي للمستوي (P) وسطح الكرة (S) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) نعتبر المعادلة : $104x-20y=272 ....(E)$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان .

أ) احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104 ثم بيّن أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا.

ب) بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x\equiv 3[5]$ ، ثم استنتج حلول المعادلة (E) .

2) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 ، ويكتب $\overline{1\alpha\beta01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6 حيث α و β عددان طبيعيان.

عيّن α و β ، ثم اكتب λ في النظام العشري .

3) تحقق أنّ كلا من 2017 و 1009 عدد أوّلي، ثم عيّن الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق:

$$m=PPCM(a;b)\ ,\ d=PGCD(a;b) \quad \text{حيث} \quad 2m-d=2017$$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z : $(z-2+2i)(z^2-2\sqrt{2}z+8)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ، $z_B=\overline{z}_A$ و $z_C=2(1-i)$.

أ) اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ثم استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (Ω) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيليا صرفا .

جـ) نسمّي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $z=z_C-k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ ، مع k يمسح $\mathbb{R}_+$ تحقّق أنّ النقطة C تنتمي إلى (Γ) ، ثم عيّن وأنشئ (Γ).

3) r الدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ، h التحاكي الذي مركزه النقطة O ونسبته -2 .

عيّن طبيعة التحويل $h\circ r$ وعناصره المميّزة ، ثم استنتج صورة الدائرة (Ω) بالتحويل $h\circ r$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$.

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1-أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحني (C_f) يطلب تعيين معادلة له.

ب) بيّن أنّ : من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$

ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

2) اكتب معادلة (T) مماس المنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 .

3) h الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=x^2e^{-x+2}-4$.

ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج إشارة $h(x)$ حدّد عندئذ وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $]0;+\infty[$.

4) ارسم المماس (T) والمنحني (C_f) على المجال $]0;+\infty[$.

5) نعتبر m وسيط حقيقي والمعادلة ذات المجهول الحقيقي x الموجب: $f(x)=m(x-2)$ ... (E)

ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E).

6) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

اعتمادا على السؤال رقم (1)، شكل جدول تغيّرات الدالة g .

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأوّل $u_0=1$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=7u_n+8$.

1) برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $3u_n=7^{n+1}-4$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=1+7+7^2+......+7^n$ و $S'_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

أ) احسب بدلالة n المجموع S_n ثم جد علاقة بين S_n و S'_n.

ب) استنتج أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $18\times S'_n=7^{n+2}-24n-31$.

3) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5.

ب) عيّن قيم n الطبيعية حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، (P) مستو تمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=-t-2\lambda+2 \\ y=3t+4\lambda-3 \\ z=3t+4\lambda-1 \end{cases}$

حيث t و λ عددان حقيقيان .

1) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P).

2) ليكن α عددا حقيقيا من المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$، ولتكن (E_α) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث

$$x^2+y^2+z^2-2x\cos\alpha-2y\sin\alpha-z-\frac{3}{4}=0 .$$

أ) بيّن أنّ: من اجل كل α من المجال السابق ، (E_α) هي سطح كرة يطلب تعيين إحداثيات مركزها ω_α بدلالة α ونصف قطرها R .

ب) ادرس حسب قيم العدد الحقيقي α الوضع النسبي للمستوي (P) و سطح الكرة (E_α) .

3) في الحالة التي يكون فيها المستوي (P) مماسا لسطح الكرة (E_α)

عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D)الذي يشمل النقطة ω_α والعمودي على المستوي (P)

واستنتج إحداثيات I نقطة تماس (E_α) مع المستوي (P).

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) اكتب العدد $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2$ على الشكل الجبري ثم استنتج الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $\frac{21}{4}+5i$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A , B , C و I ذات اللواحق : $z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=-\frac{3}{2}i$ ، $z_C=-\overline{z}_A$ و $z_I=i$.

1) اكتب z_A و z_C على الشكل الجبري .

2) اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسي مستنتجا طبيعة المثلث ABC .

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه B ويحول A إلى I .

أ) اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S ثم عيّن نسبته وزاويته.

ب) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ التحويل النقطي T_n كما يلي: $T_n = \underbrace{S \circ S \circ \cdots \circ S}_{n \text{ مرة}}$

عيّن قيم n حتى يكون T_n تحاكيا ، عين عندئذ عناصره المميزة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\frac{1}{x}-\ln x$.

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g .

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1,76\,;1,77[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\frac{x+1}{x-\ln x} \;\; ; \;\; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أثبت أن الدالة f مستمرة عند العدد 0 على اليمين ،

ثم احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{x}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

2) بيّن أن: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-\ln x)^2}$.

3) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ وفسّر ذلك بيانيا ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) لتكن الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=x-\ln x$

أ) بيّن أن: من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، $h(x)>0$ ،

واستنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=1$.

ب) ارسم (C_f) . (نأخذ $f(\alpha)\approx 2,31$)

5) لتكن الدالة F المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$.

– بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq 1$ ، $\frac{1}{x}+1 \leq f(x) \leq f(\alpha)$.

– اعط تفسيرا هندسيا للعدد $F(e)$ ثم استنتج حصرا له.

انتهى الموضوع الثاني

الحل المفصل لاختبار الرياضيات شعبة الرياضيات بكالوريا 2017

الموضوع الأول

التمرين الاول :

1) تبين أن المستقيمان (Δ) , (Δ') يتقاطعان في نقطة لدينا: $(\Delta) : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = -t + 2 \\ c = 2t - 4 \end{cases}$ و من المعطيات نجد التمثيل الوسيطي للمستقيم $(\Delta') : \begin{cases} x = -t'+1 \\ y = 2t'-3 \\ z = t'-4 \end{cases}$.

التقاطع : نحل الجملة $\begin{cases} t - 2 = -t'+1 \\ -t + 2 = 2t'-3 \\ 2t - 4 = t'-4 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} t - 2 = -2t + 1 \\ -t + 2 = 4t - 3 \\ 2t = t' \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 3t = 3 \\ -5t = -5 \\ 2t = t' \end{cases}$ إذن $\begin{cases} t = 1 \\ t' = 2 \end{cases}$ بالتعويض في إحدى التمثيلين الوسيطين نجد أن المستقيمان يتقاطعان في نقطة وحيدة هي $A(-1\,;1\,;-2)$.

2) شعاع توجيه (Δ) هو $\vec{v}\,(1\,;-1\,;2)$ وشعاع توجيه المستقيم (Δ') هو $\vec{u}\,(-1\,;2\,;1)$ و منه المستوي (P) المعين بالمستقيمين يشمل النقطة $C(-1\,;1\,;-2)$ تمثيله الوسيطي هو $\begin{cases} x = -t'+t - 1 \\ y = 2t'-t + 1 \\ c = t'+2t - 2 \end{cases} : t \in IR\ ,\ t' \in IR$.

استنتاج معادلة ديكارتية لهذا المستوي : $\begin{cases} x = -t'+t - 1..........(1) \\ y = 2t'-t + 1..........(2) \\ z = t'+2t - 2..........(3) \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x + y = t'......(1)+(2) \\ y = 2t'-t + 1........(2) \\ z = t'+2t - 2........(3) \end{cases}$ و منه

$\begin{cases} t' = x + y \\ y = 2(x + y) - t + 1 \\ z = t'+2t - 2........(3) \end{cases}$ و منه $\begin{cases} t' = x + y \\ t = 2x + y + 1 \\ z = x + y + 4x + 2y + 2 - 2 \end{cases}$

و منه المعادلة الديكارتية لـ (P) هي $5x + 3y - z = 0$.

3) تبين أن (S) سطح كرة لتكن N منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ لدينا $AM^2 + BM^2 = 20$ يكافئ $\left(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NM}\right)^2 = 20$ و منه نجد $AN^2 + NM^2 + 2\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{NM} + BN^2 + NM^2 + 2\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{NM} = 20$

بما أن $AN = BN$ و $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BN} = \vec{0}$ تصبح المعادلة $2AN^2 + 2NM^2 = 20$ و منه $NM^2 = 10 - AN^2$

$N\left(\frac{1+(-1)}{2};\frac{-3+1}{2};\frac{-4+(-2)}{2}\right)$ و منه $N(0;-1;-3)$ إذن $AN = \sqrt{(-1)^2 + (1+1)^2 + (-2+3)^2} = \sqrt{6}$

$NM^2 = 10 - AN^2$ يعني $NM^2 = 10 - 6$ و منه $NM^2 = 4$ إذن $NM = 2$ مجموعة النقط (S) هي سطح كرة مركزه N و نصف قطره 2 .

4) تحديد الوضع النسبي للمستوي (P) و سطح الكرة (S) نحسب البعد بين N منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ و المستوي $d(N;P) = \frac{|5(0) + 3(-1) - (-3)|}{\sqrt{25 + 9 + 1}} = 0$ و منه المستوي و سطح الكرة يتقاطعان وفق دائرة مركزها N و نصف قطرها 2

الاستاذ جواليل أحمد – تمنغست

التمرين الثاني :

1) نعتبر $104x-20y=272......(E)$

أ- حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104 لدينا $PGCD(20;104)=4PGCD(5;26)=4$

بما أن 4 قاسم للعدد 272 فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في مجموعة الاعداد الصحيحة .

ب- إثبات انه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $x\equiv 3[5]$

لدينا (E) تكافئ $104x=20y+272$ و منه $104x\equiv 272[5]$ أي ان $4x\equiv 2[5]$ و$4\equiv -1[5]$ منه $-x\equiv 2[5]$ أي ان $x\equiv -2[5]$ و $-2\equiv 3[5]$ منه $x\equiv 3[5]$ و هو المطلوب .

$x\equiv 3[5]$ يعني ان $k\in Z$: $x=3+5k$ بالتعويض في (E) نجد $104(5k+3)=20y+272$ و منه $520k+40=20y$ أي ان $y=26k+2$: $k\in Z$ مجموعة الحلول هي $S=\{(5k+3;26k+2):k\in Z\}$.

2) تعيين العددان α و β لدينا $\lambda=\overline{1\alpha\alpha\beta01}^{4}$ و $\lambda=\overline{1\alpha\beta01}^{6}$ يعني ان $\begin{cases}\lambda=1+\beta\times 4^2+\alpha\times 4^3+\alpha\times 4^4+4^5\\ \lambda=1+\beta\times 6^2+\alpha\times 6^3+6^4\end{cases}$ و

منه $16\beta+320\alpha+1025=36\beta+216\alpha+1297$ أي ان $104\alpha-20\beta=272$ و منه من حلول المعادلة (E)

نستنتج ان $\begin{cases}\alpha=3+5k\\ \beta=26k+2\end{cases}$ علما ان العددان α و β أقل تماما من 4 و منه $\begin{cases}\alpha=3\\ \beta=2\end{cases}$.

حساب : $\lambda=1+2\times 6^2+3\times 6^3+6^4=2017$.

3) التحقق من أن العددان 2017 و 1009 أوليان

47	41	37	31	29	23	19	17	13	11	7	5	3	2	العدد 2017 يقبل القسمة على
لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا		لا	لا	لا	لا	لا	الاجابة

و منه 2017 عدد أولي لان $47\le\sqrt{2017}$.

37	31	29	23	19	17	13	11	7	5	3	2	العدد 1009 يقبل القسمة على
لا	لا	لا	لا	لا	لا		لا	لا	لا	لا	لا	الاجابة

و منه 1009 عدد أولي لان $37\le\sqrt{1009}$.

تعيين $a\ ;\ b$: d قاسم للعددين $m\ ;\ d$ و منه فهو قاسم للعدد $2m-d$ أي قاسم للعدد 2017 و منه فإن القيم الممكنة لـــ d هي 1 او 2017

- لما $d=1$ فإن $2m-1=2017$ و منه $m=\frac{2018}{2}=1009$ بما ان 1009 عدد اولي و $m\,d=ab$ و منه$ab=1009$ إذن الثنائيات $(a;b)$ هي $(1;1009)$ و $(1009;1)$

لما $d=2017$ فإن $2m-2017=2017$ و منه $m=2017$ و منه $ab=2017^2$ إذن الثنائية $(a;b)$ هي $(2017;2017)$

الاستاذ جواليل أحمد – تمنغست

التمرين الثالث :

1) حل المعادلة $(z-2+2i)(z^2-2\sqrt{2}z+8)=0$ في $\mathbb{C}$ المعادلة تكافئ $\begin{cases} z-2+2i=0......(1) \\ z^2-2\sqrt{2}z+8=0....(2) \end{cases}$ أي

$\begin{cases} z=2-2i \\ z^2-2\sqrt{2}z+8=0....(1) \end{cases}$ نحسب مميز المعادلة (1) و هو $\Delta=(2\sqrt{2})^2-4(8)=8-32=-24$ للمعادلة حلين هما

$\begin{cases} z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{6} \\ z_2=\sqrt{2}-i\sqrt{6} \end{cases}$. حلول المعادلة هي $\begin{cases} z_0=2-2i \\ z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{6} \\ z_2=\sqrt{2}-i\sqrt{6} \end{cases}$

2) أ- كتابة z_A ; z_B ; z_C على الشكل الأسي $|z_A|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ و منه $z_A=2\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i}$

و $z_B=\overline{z_A}=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{3}i}$ و $z_C=2(1-i)$ و منه $|z_C|=2\sqrt{2}$ و منه $z_C=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

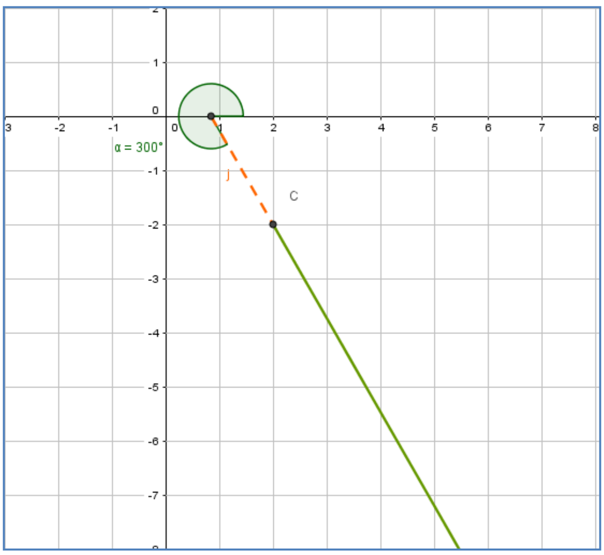
بما ان $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2\sqrt{2}$ و منه النقط A ; B ; C تنتمي الى الدائرة (Ω) التي مركزها O و نصف قطرها $2\sqrt{2}$.

ب-تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيلي صرفا

لدينا $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)=\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}=e^{\frac{7\pi}{12}i}$ و منه $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=e^{\frac{7n\pi}{12}}$ عدد تخيلي صرف يعني ان $\frac{7n\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+\pi k$ و k عدد

صحيح و منه بالضرب في $\frac{12}{\pi}$ نجد $7n=6+12k$ أي ان $7n\equiv 6[12]$ و منه بالضرب في 5 نجد

$35n\equiv 30[12]$ أي $-n\equiv 6[12]$ أي $n\equiv -6[12]$ و منه $n\equiv 6[12]$ إذن $n\equiv 6+12k'$ و k' عدد طبيعي .



ج- التحقق C تنتمي الى (Γ) : $z_C=z_C-k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ يعني

$-k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)=0$ ومنه $k=0$ بما انه عدد من $\mathbb{R}_+$ و منه C تنتمي الى (Γ).

$z=z_C-k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ يعني ان $z-z_C=-k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ و منه

$z-z_C=-ke^{\frac{2\pi}{3}i}$ و منه $z-z_C=ke^{\frac{5\pi}{3}i}$ أي ان

$\arg(z-z_C)=\frac{5\pi}{3}+2\pi k''$ و k'' عدد صحيح مجموعة النقط (Γ) هي نصف مستقيم .

3) تعيين طبيعة التحويل hor هو تشابه غير مباشر نسبته -2 و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و مركزه O

(هو تشابه مباشر نسبته 2 و زاويته $\frac{5\pi}{3}$ و مركزه O) .

الاستاذ جواليل أحمد ــ تمنغست

صورة الدائرة (Ω) بالتحويل hor هي دائرة مركزها O و نصف قطرها هو $2(2\sqrt{2})=4\sqrt{2}$.

التمرين الرابع :

$f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$

1- أ- حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)e^{-x+1}=+\infty$. و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3)e^{-x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{e^{x-1}}=0$.

و منه $y=0$ معادلة للمستقيم المقارب الأفقي للمنحنى (C_f) جهة $+\infty$.

ب-إثبات أن عبارة المشتقة هي $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$:

نحسب المشتقة $f'(x)=(-3x^2+4x)e^{-x+1}-(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$ و منه $f'(x)=(x^3-5x^2+4x)e^{-x+1}$ أي ان $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$ محققة .

استنتاج اتجاه تغير الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x^2-5x+4)$

لدينا (x^2-5x+4) له جذرين هما 1 و 4

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
اشارة (x^2-5x+4)		+		+	0	−	0	+	
اشارة x		−	0	+		+		+	
اشارة $f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

و منه f متزايدة على المجالين $[0\,;1]$ و $[4;+\infty[$ متناقصة على المجالين $]-\infty\,;0]$ و $[1\,;4]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	$-32e^{-3}$	↗	0

2- كتابة معادلة (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 هي $y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$f'(2)=-4e^{-1}$ و $f(2)=0$ و منه معادلة المماس (T) هي $y=-\frac{4}{e}x+\frac{8}{e}$.

3- h دالة معرفة على $[0\,;+\infty[$ بـ $h(x)=x^2.e^{-x+2}-4$

دراسة تغيرات الدالة h : $h'(x)=2x.e^{-x+2}-x^2.e^{-x+2}=x(2-x)e^{-x+2}$ إشارتها من إشارة $(2-x)$

و منه فهي موجبة على المجال $[0\,;2]$ و سالبة على المجال $[2;+\infty[$ و منه الدالة h متزايدة على المجال $[0\,;2]$ و متناقصة على المجال $[2;+\infty[$ و لدينا $h(2)=0$ إذن $h(2)=0$ قيمة حدية كبرى و منه $h(x)$ إشارتها سالبة .

تحديد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $[0\,;+\infty[$:

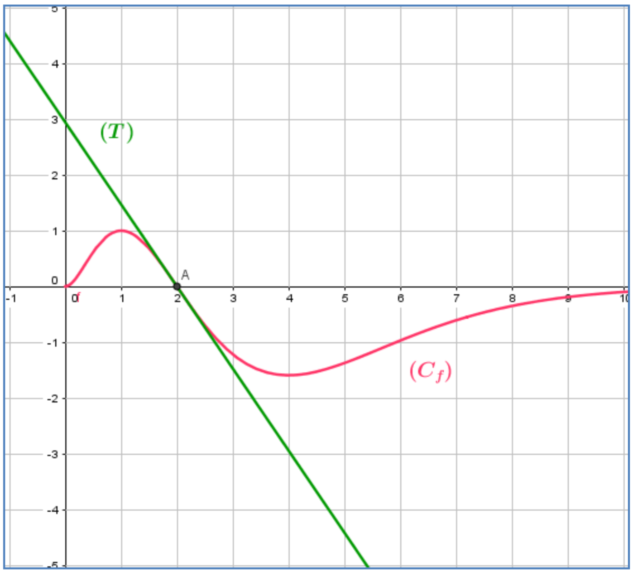
$f(x)-y=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}+4e^{-1}x-8e^{-1}=-x^3.e^{-x+1}+2x^2.e^{-x+1}+4xe^{-1}-8e^{-1}$ و منه

$f(x)-y=-x^3.e^{-x+1}+4x.e^{-1}+2x^2.e^{-x+1}-8e^{-1}=-xe^{-1}(x^2.e^{-x+2}-4)+2e^{-1}(x^2e^{-x+2}-4)$ أي ان

الاستاذ جواليل أحمد – تمنغست

$f(x)-y=(x^2.e^{-x+2}-4)(-x+2)e^{-1}$ أي ان $f(x)-y=h(x)(-x+2)e^{-1}$ بما أن إشارة $h(x)$ سالبة ومنه اشارة الفرق من إشارة $(x-2)$ أي ان (C_f) يقع فوق (T) على المجال $[0;2[$ و (C_f) يقع تحت (T) على المجال $]2;+\infty[$ و يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 2 .

4- رسم المنحنى البياني (C_f) و المماس (T) :



5- المناقشة بيانيا :

المعادلة $f(x)=m(x-2)......(E)$ حلها هو ايجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) والمستقيم $(\Delta_{;m})$ ذو المعادلة $y=m(x-2)$.

لما $m\in\left]-\infty;-\frac{4}{e}\right]$ نلاحظ أن (C_f) و $(\Delta_{;m})$ يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة (E) حل وحيد .

لما $m\in\left]-\frac{4}{e};0\right[$ نلاحظ أن (C_f) و $(\Delta_{;m})$ يتقاطعان في ثلاثة نقاط و منه للمعادلة (E) ثلاثة حلول.

لما $m=0$ نلاحظ أن (C_f) و $(\Delta_{;m})$ يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة (E) حلين .

لما $m\in]0;+\infty[$ نلاحظ أن (C_f) و $(\Delta_{;m})$ يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة (E) حل وحيد .

6- لدينا $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ من السؤال رقم (1) بوضع $t=\frac{1}{x}$

و منه $\lim_{x\to+\infty}t=0$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}0}t=+\infty$ نجد $\lim_{x\overset{>}{\to}0}g(x)=\lim_{t\to+\infty}f(t)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{t\to0}f(t)=0$.

المشتقة : هي $g'(x)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$ و منه $g'(x)=-\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{x^2}-5\frac{1}{x}+4\right)e^{-\frac{1}{x}+1}$ أي

$g'(x)=\frac{1}{x^5}(-1+5x-4x^2)e^{-\frac{1}{x}+1}$ و اشارته منه اشارة $(-1+5x-4x^2)$ و لها جذرين هما 1 و $\frac{1}{4}$

و منه g متزايدة على المجال $\left[\frac{1}{4};1\right]$ و متناقصة على المجالين $[1;+\infty[$; $\left]0;\frac{1}{4}\right]$

و $g\left(\frac{1}{4}\right)=f(4)$, $g(1)=f(1)$

الاستاذ جواليل أحمد – تمنغست

جدول تغيرات الدالة g

x	0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$	
			$-32e^{-3}$				0

الاستاذ جواليل أحمد – تمنغست

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الاول :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 7u_n + 8 \end{cases}$$

1) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 7^{n+1} - 4$

التحقق $3u_0 = 7^1 - 4 = 3$ و $3u_0 = 3\times 1 = 3$ محققة

نفرض صحة $3u_n = 7^{n+1} - 4$ و لنبرهن صحة $3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$

$3u_n = 7^{n+1} - 4$ و $3u_{n+1} = 3[7u_n + 8]$ أي ان $3u_{n+1} = 7(3u_n) + 24$ و منه $3u_{n+1} = 7[7^{n+1} - 4] + 24$ أي ان

$3u_{n+1} = 7^{n+2} - 28 + 24$ أي ان $3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$ و هو المطلوب

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 7^{n+1} - 4$

2) أ- حساب المجاميع $S_n = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + ... + 7^n = \frac{7^{n+1} - 1}{7 - 1} = \frac{1}{6}(7^{n+1} - 1)$.

$S_n' = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ يكافئ $3S_n' = 3u_0 + 3u_1 + 3u_2 + 3u_3 + ... + 3u_n$ و $3u_n = 7^{n+1} - 4$ و منه

$3S_n' = [7 - 4] + [7^2 - 4] + [7^3 - 4] + ... + [7^{n+1} - 4]$ يكافئ أن $3S_n' = [7 + 7 + 7 + ... 7^{n+1}] - 4(n+1)$ هذا يعني ان

$3S_n' = 7S_n - 4(n+1)$ و منه $S_n' = \frac{7}{3}S_n - \frac{4}{3}(n+1)$ يكافئ $S_n' = \frac{7}{18}(7^{n+1} - 1) - \frac{4}{3}(n+1)$ أي ان

$S_n' = \frac{7^{n+2}}{18} - \frac{4}{3}n - \frac{31}{18}$.

ب-من ما سبق لدينا $S_n' = \frac{7^{n+2}}{18} - \frac{4}{3}n - \frac{31}{18}$ بالضرب في 18 نجد $18S_n' = 18\left[\frac{7^{n+2}}{18} - \frac{4}{3}n - \frac{31}{18}\right] = 7^{n+2} - 24n - 31$

أي أن $18S_n' = 7^{n+2} - 24n - 31$ و هو المطلوب .

3) أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 7^n على 5

$7^0 \equiv 1[5]$ و $7 \equiv 2[5]$ و $7^2 \equiv 4[5]$ و $7^3 \equiv 3[5]$ و $7^4 \equiv 1[5]$ و منه بواقي قسمة 7^n على 5 تشكل متتالية دورية و دورها 4

باقي قسمة 7^n على 5 لما n يكتب على الشكل $4k$ هو 1.

باقي قسمة 7^n على 5 لما n يكتب على الشكل $4k+1$ هو 2.

باقي قسمة 7^n على 5 لما n يكتب على الشكل $4k+2$ هو 4.

باقي قسمة 7^n على 5 لما n يكتب على الشكل $4k+3$ هو 3.

ب) تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون S_n' قابلا للقسمة على 5 أي ان $S_n' \equiv 0[5]$ بما ان العددان 18 و 5 أوليان فيما بينهما نجد أن $S_n' \equiv 0[5]$ يكافئ $18S_n' \equiv 0[5]$ أي ان $7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 0[5]$

لدينا $7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 7^{n+2} + n - 1[5]$ لأن $31 \equiv 1[5]$ و $-24 \equiv 1[5]$

- لما $n = 4k$ فإن $7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 4 + 4k - 1[5]$ أي ان $7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 4k + 3[5]$

الاستاذ جواليل أحمد – تمنغست

S_n' يقبل القسمة على 5 يعني ان $4k+3\equiv 0[5]$ و منه$4k\equiv 2[5]$ أي ان $-k\equiv 2[5]$ و منه $k\equiv -2[5]$ إذن $k\equiv 3[5]$ و منه

$k=3+5k''$ بالتعويض نجد $n=12+20k''$ و k'' عدد طبيعي .

- لما $n=4k+1$ فإن $7^{n+2}-24n-31\equiv 3+4k+1-1[5]$ أي ان $7^{n+2}-24n-31\equiv 4k+3[5]$

S_n' يقبل القسمة على 5 يعني ان $4k+3\equiv 0[5]$ و منه$4k\equiv 2[5]$ أي ان $-k\equiv 2[5]$ و منه $k\equiv -2[5]$ إذن $k\equiv 3[5]$ و منه

$k=3+5k''$ بالتعويض نجد $n=12+20k''$ و k'' عدد طبيعي .

- لما $n=4k+2$ فإن $7^{n+2}-24n-31\equiv 1+4k+2-1[5]$ أي ان $7^{n+2}-24n-31\equiv 4k+2[5]$

S_n' يقبل القسمة على 5 يعني ان $4k+2\equiv 0[5]$ و منه$4k\equiv 3[5]$ أي ان $-k\equiv 3[5]$ و منه $k\equiv -3[5]$ إذن $k\equiv 2[5]$ و منه

$k=2+5k'$ بالتعويض نجد $n=10+20k'$ و k' عدد طبيعي

- لما $n=4k+3$ فإن $7^{n+2}-24n-31\equiv 2+4k+3-1[5]$ أي ان $7^{n+2}-24n-31\equiv 4k-1[5]$

S_n' يقبل القسمة على 5 يعني ان $4k-1\equiv 0[5]$ و منه$4k\equiv 1[5]$ أي ان $-k\equiv 1[5]$ و منه $k\equiv -1[5]$ إذن $k\equiv 4[5]$ و منه

$k=4+5k_0$ بالتعويض نجد $n=19+20k_0$ و k_0 عدد طبيعي

التمرين الثاني :

1) تعيين المعادلة الديكارتية للمستوى (P) لدينا $\begin{cases} x=-t-2\lambda+2......(1) \\ y=3t+4\lambda-3.........(2) \\ z=3t+4\lambda-1..........(3) \end{cases}$ بطرح (3) من (2) نجد $y-z=-2$ هي المعادلة الديكارتية للمستوى (P) .

2) أ-لدينا $x^2+y^2+z^2-2x\cos\alpha-2y\sin\alpha-z-\frac{3}{4}=0$ يكافئ $x^2-2x\cos\alpha+y^2-2y\sin\alpha+z^2-z-\frac{3}{4}=0$

أي ان $(x-\cos\alpha)^2-\cos^2\alpha+(y-\sin\alpha)^2-\sin^2\alpha+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=0$ و هذا يكافئ

$(x-\cos\alpha)^2+(y-\sin\alpha)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=2$ و منه (E_α) سطح كرة مركزه $w_\alpha\left(\cos\alpha\ ;\ \sin\alpha ; \frac{1}{2}\right)$ و نصف قطره $\sqrt{2}$.

ب-دراسة الوضع النسبي بين (E_α) و (P)

نحسب المسافة بين (P) و $w_\alpha\left(\cos\alpha\ ;\ \sin\alpha ; \frac{1}{2}\right)$ و هي $d(w_\alpha ; P)=\dfrac{\left|\sin\alpha-\frac{1}{2}+2\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left|\sin\alpha+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{2}}$

الاستاذ جواليل أحمد – تمنغست

المناقشة :

- لما $d(w_\alpha;P)=\sqrt{2}$ يعني ان $\dfrac{\left|\sin\alpha+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ يكافئ $\left|\sin\alpha+\frac{3}{2}\right|=2$ يكافئ $\begin{cases}\sin\alpha+\frac{3}{2}=2\\ \text{او}\\ \sin\alpha+\frac{3}{2}=-2\end{cases}$ و منه $\begin{cases}\sin\alpha=\frac{1}{2}\\ \text{او}\\ \sin\alpha=-\frac{7}{2}\end{cases}$

أي ان $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ لان المعادلة الثانية لا حل لها و $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ في المجال المُعطى يعني أن $\alpha=\frac{\pi}{6}$ في هذه الحالة (E_α) و (P) متماسان في نقطة

- لما $d(w_\alpha;P)<\sqrt{2}$ يعني ان $\dfrac{\left|\sin\alpha+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{2}}<\sqrt{2}$ يكافئ $-2<\sin\alpha+\frac{3}{2}<2$ أي ان $-\frac{7}{2}<\sin\alpha<\frac{1}{2}$ أي ان

أي ان $-1\leq\sin\alpha<\frac{1}{2}$ $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right[$ في هذه الحالة (P) و (E_α) متقاطعان في نقطتين

- لما $d(w_\alpha;P)>\sqrt{2}$ يعني ان $\alpha\in\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$ في هذه الحالة (P) و (E_α) غير متقاطعان .

3) حالة التماس يعني ان $\alpha=\frac{\pi}{6}$ و منه $w_\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ و المستوى $(P):y-z=-2$ شعاعه الناظيمي هو

$\vec{n}(0;1;-1)$ و هو شعاع توجيه المستقيم (D) و منه التمثيل الوسيطي للمستقيم هو $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ y=t+\frac{1}{2}\\ z=-t+\frac{1}{2}\end{cases}:t\in IR$

I نقطة تماس (P) و (E_α) هي نفسها نقطة تقاطع المستقيم (D) و المستوي (P)

بتعويض التمثيل الوسيطي في المعادلة الديكارتية نجد $t+\frac{1}{2}+t-\frac{1}{2}=-2$ أي $t=-1$ و منه نقطة التماس هي

$I\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

التمرين الثالث :

I) كتابة العدد $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2$ على الشكل الجبري $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2=\frac{25}{4}+5i-1=\frac{21}{4}+5i$

و منه الجذران التربيعيين للعدد المركب $\frac{21}{4}+5i$ هما $\left(\frac{5}{2}+i\right)$ و $\left(-\frac{5}{2}-i\right)$.

II) لدينا $z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_B=-\frac{3}{2}i$ و $z_C=-\overline{z_A}$ و $z_I=i$

1) الكتابة على الشكل الجبري : $z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{2}+\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]=\frac{3}{2}+1+i=\frac{5}{2}+i$

الاستاذ جواليل أحمد – تمنغست

$$z_C=-\overline{z_A}=-\frac{3}{2}-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=-\frac{3}{2}-\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=-\frac{3}{2}-1+i=-\frac{5}{2}+i$$

2) كتابة على الشكل الأسي للعدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-\frac{5}{2}+i+\frac{3}{2}i}{\frac{5}{2}+i+\frac{3}{2}i}$ هذا يعني $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\frac{-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i}{\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i}$ و منه

$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-1+i}{1+i}=\frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2i}{2}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ أي $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=e^{i\frac{\pi}{2}}$

مما سبق نستنتج أن $(\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{BC})=\frac{\pi}{2}+2\pi k\ :\ k\in Z$ و $BA=BC$ و منه المثلث ABC قائم في B و متساوي الساقين .

3) التشابه S : $S(B)=B$ و $S(A)=I$

أ) كتابة العبارة المركبة للتشابه S هي من الشكل $z'=az+b$ حيث

$$a=\frac{z_I-z_B}{z_A-z_B}=\frac{i+\frac{3}{2}i}{\frac{5}{2}+i+\frac{3}{2}i}=\frac{\frac{5}{2}i}{\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i}=\frac{i}{1+i}=\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{i+1}{2}$$

$$b=z_B-az_B=-\frac{3}{2}i-\left(\frac{i+1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}i\right)=-\frac{3}{2}i-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i=-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}i$$

$z'=\frac{1+i}{2}z-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}i$ هي العبارة المركبة .

و منه نسبة التشابه S هي $\left|\frac{1+i}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته هي θ حيث

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\[2ex]\sin\theta=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$ و منه $\theta=\frac{\pi}{4}$

ب-التحويل T_n معرف كما يلي $T_n=\underbrace{SoSoSoSo....oS}_{n\ \text{مرة}}$ هو تشابه زاويته هي $n\theta=\frac{n\pi}{4}$ و مركزه B

يكون T_n تحاكي لما $\frac{n\pi}{4}=k\pi : k\in Z$ أي ان $n=4k\pi\ \ : k\in Z$ و هو التحاكي الذي مركزه B و نسبته $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

الاستاذ جواليل أحمد – تمنغست

التمرين الرابع :

I) لدينا $g(x)=\frac{1}{x}-\ln(x)$.

1) دراسة اتجاه تغير الدالة g : $g'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$ و هي موجبة على $]0;+\infty[$ و منه g متناقصة على $]0;+\infty[$

2) إثبات أن للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد في المجال $]1{,}76\ ;\ 1{,}77[$: $g(1{,}77)=-0{,}006$ $\quad g(1{,}76)=0{,}002$
بما أن الدالة g متزايدة و مستمرة على $]1{,}76\ ;\ 1{,}77[$ و $g(1{,}76)\times g(1{,}77)<0$ فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1{,}76\ ;\ 1{,}77[$.

إشارة الدالة g

x	0	α	$+\infty$
إشارة $g(x)$	$+$	0	$-$

II) لدينا $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1}{x-\ln x}\ :\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) إثبات أن f مستمرة عند 0 على اليمين $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x+1}{x-\ln x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}-\frac{1}{\ln x}=0=f(0)$ ومنه الدالة مستمرة على يمين 0.

حساب النهاية $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x+1}{x^2-x\ln x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}-\frac{1}{x\ln x}=+\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x\ln x=0^+$ حسب النهاية بالمقارنة).

التفسير الهندسي للنتيجة هو أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا موازي لحامل محور التراتيب على يمين النقطة $O(0;0)$

2) إثبات إن $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-\ln x)^2}$: لدينا على المجال $]0;+\infty[$

$f'(x)=\frac{(x-\ln x)-\left(1-\frac{1}{x}\right)(x+1)}{(x-\ln x)^2}$ أي ان $f'(x)=\frac{x-\ln x-\frac{(x-1)(x+1)}{x}}{(x-\ln x)^2}$ و منه

$\frac{\frac{1}{x}-\ln x}{(x-\ln x)^2}=\frac{x-\ln x-x+\frac{1}{x}}{(x-\ln x)^2}=\frac{x-\ln x-\frac{x^2-1}{x}}{(x-\ln x)^2}$ $f'(x)=$ أي أن $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-\ln x)^2}$ و هو المطلوب .

3) حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{\ln x}{x}}=1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

التفسير الهندسي : من ما سبق نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=1$.

الاستاذ جواليل أحمد – تمنغست

جدول تغيرات الدالة

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	1

4) الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $h(x)=x-\ln x$

أ) إثبات أن h موجبة على المجال $]0;+\infty[$ لدينا $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ و منه إشارة $h'(x)$ من إشارة $(x-1)$ و هي موجبة على المجال $]1;+\infty[$ و سالبة على المجال $]0;1]$ و منه h متزايدة على المجال $]1;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]0;1]$ و $h(1)=1$ هي قيمة حدية صغرى و منه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ فإن $h(x)>0$.

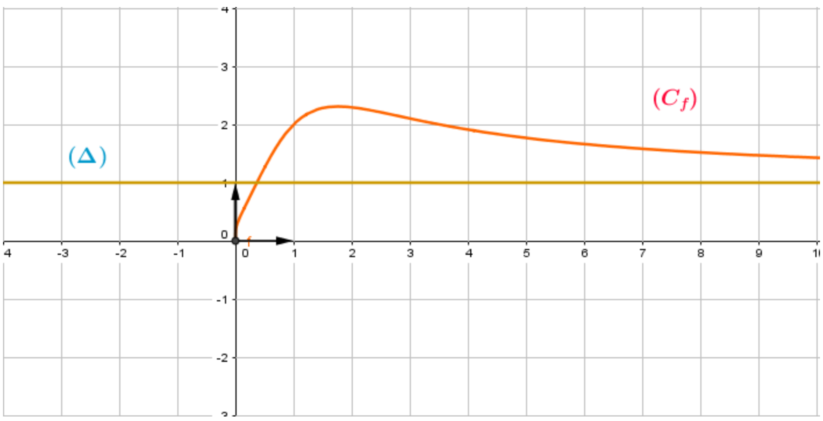
لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) نحسب إشارة الفرق $f(x)-y=\frac{x+1}{x-\ln x}-1=\frac{1+\ln x}{x-\ln x}$

و منه إشارته من إشارة $1+\ln x$

$1+\ln x=0$ يكافئ أن $x=\frac{1}{e}$ و $1+\ln x>0$ يكافئ أن $x>\frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
إشارة $f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

ب) رسم المنحنى (C_f) :



5) لدينا $F(x)=\int_1^x f(t)dt$

- إثبات أن من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$: $\frac{1}{x}+1\leq f(x)\leq f(\alpha)$

من جدول التغيرات او من المنحنى البياني لدينا $f(\alpha)$ قيمة حدية كبرى أي ان $f(x)\leq f(\alpha)$........(1)

و لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$ فإن $\frac{x+1}{x}\leq\frac{x+1}{x-\ln x}$ أي ان $1+\frac{1}{x}\leq f(x)$........(2)

الاستاذ جواليل أحمد – تمنغست

من (1) و (2) نجــــد أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$: $\frac{1}{x}+1 \leq f(x) \leq f(\alpha)$.

التفسير الهندسي لــــ $F(e)=\int_1^e f(t)dt$ و هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمان اللذان معادلاتهما $x=1$ و $x=e$.

- حصر $F(e)$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$: $\frac{1}{x}+1 \leq f(x) \leq f(\alpha)$ و منه المكاملة نجد : $\int_1^e \left(\frac{1}{x}+1\right)dx \leq \int_1^e f(x)dx \leq f(\alpha)\int_1^e dx$

أي ان $[\ln x + x]_1^e \leq F(e) \leq f(\alpha)(e-1)$ و منه $e \leq F(e) \leq f(\alpha)(e-1)$

الاستاذ جواليل أحمد – تمنغست

انتهى الموضوع الثاني

BAC2018SJ-1-CH07R13

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: 2018

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 6 إلى الصفحة 3 من 6)

التمرين الأول: (04 نقاط)

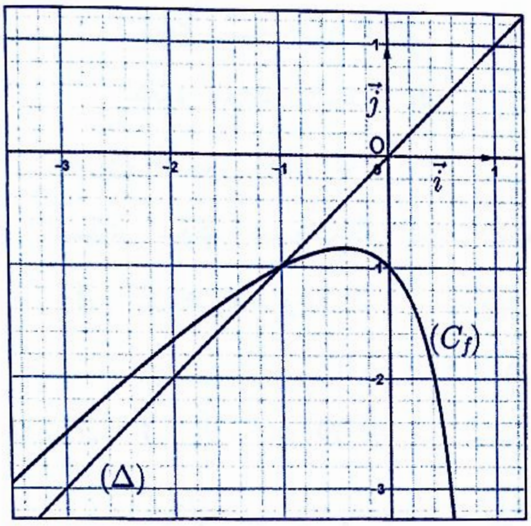
f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0=-3$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (أنظر الشكل المقابل).



1) أعد رسم الشكل على ورقة الاجابة ثم مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل، أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3\leqslant u_n<-1$.

3) أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}+1\geqslant\frac{3}{4}(u_n+1)$.

ب. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n+1\geqslant-2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثم $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) نضع $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leqslant(u_0+1)+(u_1+1)+\cdots+(u_n+1)<0$

واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

https://www.facebook.com/groups/algerieeducation/

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقطتين $A(1;1;3)$ و $B(1;0;2)$.

1) أ) بيّن أنّ النقط O ، A و B ليست في استقامية.

ب) تحقق أنّ $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (OAB) ثم عيّن معادلة ديكارتية له.

2) لتكن (Δ) مجموعة النقط M من الفضاء التي احداثياتها $(x;y;z)$ وتحقق المعادلة التالية:

$$(2x+2y+6z-11)^2+(2x+4z-5)^2=0$$

- بيّن أنّ المجموعة (Δ) هي تقاطع المستويين المحوريين للقطعتين $[OA]$ و $[OB]$، ثم عين تمثيلا وسيطيا للمجموعة (Δ).

3) لتكن M نقطة كيفية من الفضاء

- برهن صحة التكافؤ التالي: $(M\in(\Delta))$ يكافئ $(OM=AM=BM)$ ثم استنتج إحداثيات النقطة Ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OAB.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، θ عدد حقيقي من المجال $]-\pi;\pi]$

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$(z^2-2z+2)(z^2-2(\sin\theta)z+1)=0$$

II. A ، B ، C و D نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب

$z_A=-\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ ، $z_B=1-i$ ، $z_C=\sin\theta+i\cos\theta$ و $z_D=\overline{z_C}$ (يرمز $\overline{z}_c$ الى مرافق z_c)

1) اكتب الأعداد z_A ، z_B ، z_C و z_D على الشكل الأسي.

2) E نقطة من المستوي لاحقتها z_E حيث $z_E=\dfrac{z_A}{z_B}$.

- بيّن أن النقط C ، D و E تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A و زاويته $\dfrac{\pi}{4}$ ونسبته $(2\sqrt{2}-2)$.

- عيّن قيمة θ حتى تكون النقطة B صورة النقطة C بالتشابه المباشر S .

4) نضع $\theta=\dfrac{-3\pi}{4}$. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $(z_D)^n$ تخيليا صرفا.

https://www.facebook.com/groups/algerieeducation/

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $[0;1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $\begin{cases} f(x)=x+1-\dfrac{1}{\ln x}\,; & x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\} \\ f(0)=1 \end{cases}$

(يرمز بـ $\ln$ الى اللوغاريتم النيبيري)

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ/ بيّن أنّ f مستمرة عند 0 بقيم أكبر.

ب/ احسب $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}} \dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2) أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$.

ب/ ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمًا مقاربًا مائلاً (Δ) يطلب تعيين معادلة له ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ).

4) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة ω فاصلتها α حيث $1{,}49<\alpha<1{,}5$

ثم بيّن أنّ معادلة المماس للمنحني (C_f) في النقطة ω تكتب على الشكل $y=\left(\alpha+3+\dfrac{1}{\alpha}\right)(x-\alpha)$

5) ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).

6) h الدالة العددية المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $h(x)=1-x+x\ln x$.

أ/ بيّن أنّ الدالة h متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و استنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب/ بيّن أنّه من أجل كل $x>1$: $f(x)-x+\dfrac{1}{x\ln x}=\dfrac{h(x)}{x\ln x}$

و استنتج أنه من أجل $x>1$: $x-\dfrac{1}{x\ln x}<f(x)<x+1$.

7) $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز من المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=\alpha$ و $x=\mathrm{e}$.(e هو أساس اللوغاريتم النيبيري).

- بيّن أنّ $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^2-\alpha^2)-\ln(\alpha+1)<\mathcal{A}<\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}-\alpha)(\mathrm{e}+\alpha+2)$.

انتهى الموضوع الأول

https://www.facebook.com/groups/algerieeducation/

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على (03) صفحات (من الصفحة 4 من 6 إلى الصفحة 6 من 6)

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) α و β عددان طبيعيان بحيث: $\begin{cases}\alpha+\beta=4035\\ \alpha-\beta=1\end{cases}$

- عيّن العددين α و β، ثم بيّن أنّ العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما.

2) عيّن كل الثنائيات الصحيحة (x,y) التي تحقق المعادلة : $1009x-2017y=1$

3) عيّن الأعداد الصحيحة a التي تحقق الجملة: $\begin{cases}a\equiv 2019[2017]\\ a\equiv 2019[1009]\end{cases}$.

4) أ) n عدد طبيعي، ادرس تبعا لقيم n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 9.

ب) L عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 7 كما يلي : $L=\overline{\underbrace{111...1}_{\text{2018 مرة}}}$

- عيّن باقي القسمة الاقليدية للعدد $42L$ على 9.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس يحوي 9 كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي:

خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 1، 1، 2، 2، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -3، 2، 3 وكرية بيضاء مرقمة بـ: -1

نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد.

1) احسب احتمال الحوادث التالية:

A : "الحصول على أربع كريات من نفس اللون".

B : "الحصول على كرية بيضاء على الأكثر".

C : "الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم".

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس.

أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X ثم عرّف قانون احتماله .

ب) احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X.

ج) احسب احتمال الحادثة : " $X^2-X>0$ " .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) m عدد حقيقي ، نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2+(m+1)z+(2m-1)=0.....(E)$$

- عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين مركبين غير حقيقيين.

https://www.facebook.com/groups/algerieeducation/

2) نضع $m=3$ ، حل المعادلة (E).

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ النقط A ، B ، C و E التي لاحقاتها $z_A=-2+i$ ، $z_B=-2-i$ ، $z_C=\alpha$ و $z_E=\sqrt{3}$ ، حيث α عدد حقيقي و $\alpha>-2$.

- بيّن أنّ قيمة α التي يكون من أجلها المثلث ABC متقايس الأضلاع هي $(-2+\sqrt{3})$.
- نضع في كل ما يأتي $z_C=-2+\sqrt{3}$:

4) اكتب العدد المركب: $\dfrac{z_C-z_E}{z_A-z_B}$ على الشكل الأسي ثم استنتج أن :

أ) المستقيمان (AB) و (EC) متعامدان.

ب) النقط A ، B و E تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

5) ليكن r الدوران الذي يحوّل النقطة B إلى C و يحوّل C إلى A ، عبارته المركبة هي:
$z'=az+\left(\dfrac{\sqrt{3}-6}{2}\right)+i\left(\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ حيث a عدد مركب.

أ) احسب العدد المركب a ثم استنتج زاوية الدوران r.

ب) تحقق أنّ النقطة G مركز ثقل المثلث ABC هي مركز الدوران r.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1$.

1) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g'(x)=\dfrac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ ،
واستنتج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

2) بيَن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.9<\alpha<1$ ،
و استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$.

و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}f(x)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$
واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

2) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{-\frac{1}{x}}-x)=-1$ (يمكن وضع $t=-\dfrac{1}{x}$) ثم استنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

https://www.facebook.com/groups/algerieeducation/

3) h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$.

أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ وادرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$.

ب) تَحقّق أن $f(x)-x=(1+x)\,h(x)$ ثم استنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

4) ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f). (نأخذ $f(\alpha)\simeq 1.73$).

5) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها العام u_n حيث: $u_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2}{n+1}$.

أ) اكتب u_n بدلالة n ثم بيّن أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول u_1.

ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n=\left(\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right).$$

انتهى الموضوع الثاني

https://www.facebook.com/groups/algerieeducation/

ثانوية العقيد سي الحواس بسكرة

بكالوريا دورة جوان 2018

المـــادة: رياضيات

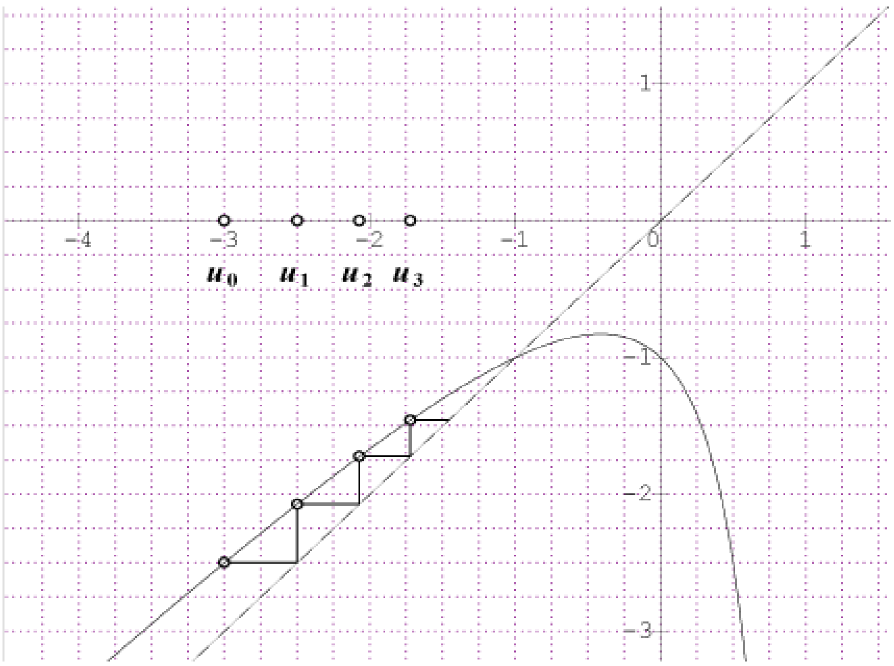
الشعبة: رياضيات

تصحيح مفصل لإختبار مادة الرياضيات

تصحيح الموضوع الأول:

تصحيح التمرين الأول:

1) إعادة رسم الشكل وتمثيل عليه الحدود الأربع الأولى:



- التخمين: من خلال الشكل يتضح لنا أنها متتالية متزايدة تماما ومتقاربة نحو 1- أي متقاربة نحو فاصلة نقطة التقاطع مع المنصف الأول.

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $-3 \le u_n \prec -1$:

* الخاصية الإبتدائية: من أجل n=0 نجد $-3 \le u_0 = -3 \prec -1$ إذن هذه الخاصية محققة من أجل **n=0**.

* الخاصية الوراثية: نفرض أن الخاصية محققة من أجل كل عدد طبيعي **p** أي $-3 \le u_p \prec -1$ ونبرهن على صحتها من أجل **p+1** أي لنبرهن أن $-3 \le u_{p+1} \prec -1$:

لنا الدالة **f** متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ أي تحفظ الترتيب أي مهما كان العنصران x_1 و x_2 من المجال $]-\infty;-1[$ فإن $x_1 \le x \prec x_2$ يكافيء $f(x_1) \le f(x) \prec f(x_2)$ **(1)..............**

لنا $u_{p+1} = f\left(u_p\right)$ و حسب الشكل $f(-1) = -1$ و $f(-3) = -2{,}5$ **(2).......**

و حسب فرضية التراجع $-3 \le u_p \prec -1$ **(3).......................................**

من **(1)** و **(2)** و **(3)** نجد $f(-3) \le f(u_p) \prec f(-1)$ أي $-2{,}5 \le u_{p+1} \prec -1$ أي $-3 \le -2{,}5 \le u_{p+1} \prec -1$ ومنه فإن الخاصية محققة من أجل **p+1**.

- الإستنتاج: من خلال ما سبق نستنتج أنه مهما كان العدد الطبيعي **n** فإن : $-3 \le u_n \prec -1$.

3) أ) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي **n** فإن : $u_{n+1} + 1 \ge \frac{3}{4}(u_n + 1)$:

لنا $$u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{u_n-1} = \frac{u_n^2-1+2}{u_n-1} = u_n + 1 + \frac{2}{u_n-1}$$

و
$$u_{n+1} + 1 - \frac{3}{4}(u_n+1) = u_n + 1 + \frac{2}{u_n-1} + 1 - \frac{3}{4}(u_n+1)$$
$$= \frac{(u_n+3)(u_n+1)}{4(u_n-1)} = \left(\frac{u_n+1}{u_n-1}\right)\left(\frac{u_n+3}{4}\right) \ge 0$$

ذلك لأن $-3 \le u_n \prec -1$ إذن $u_n + 3 \ge 0$ و $u_n + 1 \le 0$ وأيضا $u_n - 1 \le 0$

إذن $u_{n+1} + 1 - \frac{3}{4}(u_n+1) \ge 0$ ومنه $\boxed{u_{n+1} + 1 \ge \frac{3}{4}(u_n+1)}$.

ب) إستنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي **n** فإن : $u_n + 1 \ge -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$:

وجدنا سابقا أن : $u_{n+1} + 1 \ge \frac{3}{4}(u_n+1)$ وهذا يعني $u_1 + 1 \ge \frac{3}{4}(u_0+1)$ و $u_2 + 1 \ge \frac{3}{4}(u_1+1)$ و $u_3 + 1 \ge \frac{3}{4}(u_2+1)$ و .... و $u_{n-1} + 1 \ge \frac{3}{4}(u_{n-2}+1)$ $u_n + 1 \ge \frac{3}{4}(u_{n-1}+1)$ وحسب الخاصية

https://www.facebook.com/groups/algerieeducation/

$a \geq \frac{3}{4}b$ و $b \geq \frac{3}{4}c$ تعطي لنا $a \geq \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} c$ نجد $u_n + 1 \geq \underbrace{\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{3}{4}}_{n\ fois}(u_0 + 1)$ أي

$\boxed{u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n}$ وهو المطلوب.

لنا $u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ووجدنا سابقا أن $-2 \leq u_n + 1 \prec 0$ أي $-2\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq u_n + 1 \prec 0$ وحسب مبرهنة النهاية بالمقارنة أو بالحصر نجد $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[-2\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] \leq \lim\limits_{n \to +\infty}(u_n + 1) \prec 0$ ومنه $0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty}(u_n + 1) \prec 0$ أي $\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n + 1) = 0$ ومنه $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1}$ وهو المطلوب.

4) نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$:

* تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي **n** فإن: $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right] \leq (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \ldots + (u_n + 1) \prec 0$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي **n** : $u_n \prec -1$ أي $u_n + 1 \prec 0$ ومنه $u_0 + 1 \prec 0$ و $u_1 + 1 \prec 0$ و .... و $u_n + 1 \prec 0$ و مجموع أعدا سالبة عدد سالب إذا $(u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \ldots + (u_n + 1) < 0$ **(1)............**

ووجدنا سابقا أن $u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ أي $u_0 + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^0$ و $u_1 + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^1$ و .... و

$u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ بالجميع طرف إلى طرف نجد :

$$(u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \ldots + (u_n + 1) \geq -2\left[\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$$

و $\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$ هو مجموع **n+1** حد لمتتالية هندسة حدها الأول **1** وأساسها $\frac{3}{4}$ فنجد

$\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^n = \dfrac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)} = 4\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$ بالتعويض نجد

أي $(u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1)\geq -8\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$

(2).................. $(u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1)\geq 8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]$

من **(1)** و **(2)** نستنتج أن $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leq(u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1)\prec 0$ وهو المطلوب.

- لدينا $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leq(u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1)\prec 0$ ومنه

أي $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leq u_0+u_1+u_2+...+u_n+\underbrace{1+1+...+1}_{n+1\ fois}\prec 0$

$8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leq S_n+n+1\prec 0$ ومنه $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]-n-1\leq S_n\prec -n-1$

وبإدخال النهاية نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]-n-1\right]\leq\lim\limits_{n\to+\infty}S_n\prec\lim\limits_{n\to+\infty}(-n-1)$ فنجد

$-\infty\leq\lim\limits_{n\to+\infty}S_n\prec-\infty$ ومنه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\infty}$.

تصحيح التمرين الثاني:

1) تبيين أن النقط **O** ، **A** و **B** ليست في إستقامية:

$\overrightarrow{OA}(1;1;3)$ ، $\overrightarrow{OB}(1;0;2)$ نلاحظ أن $\frac{2}{3}\neq\frac{0}{1}\neq\frac{1}{1}$ إذن الشعاعين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ غير مرتبطين خطيا ومنه فالنقط **O** ، **A** و **B** ليست في إستقامية.

ب) $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (OAB) معناه: $\vec{n}.\overrightarrow{OA}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{OB}=0$:

$\vec{n}.\overrightarrow{OA}=2\times1+1\times1+(-1)\times3=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{OB}=2\times1+1\times0+(-1)\times2=0$ إذن $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (OAB) .

معادلة المستوي (OAB) تكتب من الشكل $ax+by+cz+d=0$ حيث **a** و **b** و **c** هي إحداثيات الشعاع الناظمي.

ومنه نجد $2x+y-z+d=0$ وحيث النقطة **O** تنتمي إليه إذن نجد $2\times0+0-0+d=0$ ومنه **d=0**

اذن معادلة (OAB) هي $\boxed{2x+y-z=0}$.

2) (Δ) هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق: $(2x+2y+6z-11)^2+(2x+4z-5)^2=0$.

$(2x+2y+6z-11)^2+(2x+4z-5)^2=0$ معناه: $\begin{cases} 2x+2y+6z-11=0 \\ \text{و} \\ 2x+4z-5=0 \end{cases}$

المستوي المحوري للقطعة $[OA]$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث $OM=AM$ أي
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2}$ ومنه
$x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2$ ومنه نجد $\boxed{2x+2y+6z-11=0}$

و المستوي المحوري للقطعة $[OB]$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث $OM=BM$ أي
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(z-2)^2}$ ومنه
$x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+y^2+(z-2)^2$ ومنه نجد $\boxed{2x+4z-5=0}$

وتقاطع هاذين المحورين هو حل للجملة : $\begin{cases} 2x+2y+6z-11=0 \\ 2x+4z-5=0 \end{cases}$ والتي هي المجموعة (Δ) .

- تعيين تمثيل وسيطي للمجموعة (Δ) :

لنا $\begin{cases} 2x+2y+6z-11=0 \\ 2x+4z-5=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x+y+3z-\dfrac{11}{2}=0 \\ x+2z-\dfrac{5}{2}=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} -2z+\dfrac{5}{2}+y+3z-\dfrac{11}{2}=0 \\ x=-2z+\dfrac{5}{2} \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} y+z-3=0 \\ x=-2z+\dfrac{5}{2} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} y=-z-3 \\ x=-2z+\dfrac{5}{2} \end{cases}$ ومنه

https://www.facebook.com/groups/algerieeducation/

ومنه $\begin{cases} y=-z-3 \\ x=-2(-z-3)+\frac{5}{2}=2z+6+\frac{5}{2}=2z+\frac{17}{2} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} y=-z-3 \\ x=2z+\frac{17}{2} \end{cases}$ بوضع **z=t** حيث $t\in\mathbb{R}$

نجد $\boxed{\begin{cases} x=2t+\frac{17}{2} \\ y=-t-3 \\ z=t \end{cases}}$ وهو التمثيل الوسيطي للمجموعة (Δ)

3) برهان صحة التكافؤ التالي: $[M\in(\Delta)]$ يكافئ $(OM=AM=BM)$:

* لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من (Δ) ومنه فهي نقطة تنتمي إلى كل من المستويين المحورين للقطعتين $[OA]$ و $[OB]$ وحسب تعريف محور قطعة مستقيمة نجد : $\begin{cases} OM=AM \\ OM=BM \end{cases}$ إذن $(OM=AM=BM)$.

* وبطريقة عكسية نجد أيضا $(OM=AM=BM)$ معناه $(OM=AM)$ وهنا مجموعة النقط **M** هي نقاط من المستوي المحوري للقطعة $[OA]$ وكذلك $(OM=BM)$ ومجموعة النقط هي كذلك نقاط من المستوي المحوري للقطعة $[OB]$

إذن $(OM=AM=BM)$ معناه النقط **M** هي النقط المشتركة بين المستويين المحورين وهي المجموعة (Δ).

- بما أن مركز الدائرة المحيطة بالمثلث **OAB** تعريفا هي نقطة تقاطع محاوره ولدينا هنا محورين متوفرين وهما للقطعتين $[OA]$ و $[OB]$ إذن هي احد نقاط تقاطع هاذين المحورين أي هي نقطة من المجموعة (Δ) وهي أيضا تنتمي الى المستوي المحدد بهذا المثلث إذن هي أيضا نقطة من المستوى (OAB) الذي معادلته : $\boxed{2x+y-z=0}$

وعليه $\Omega\in(\Delta)$ ومنه: $\begin{cases} x_\Omega=2t+\frac{17}{2} \\ y_\Omega=-t-3 \\ z_\Omega=t \end{cases}$ **(1)**.....................

وأيضا $\Omega\in(OAB)$ ومنه: $2x_\Omega+y_\Omega-z_\Omega=0$ **(2)**..........

https://www.facebook.com/groups/algerieeducation/

بتعويض (1) في (2) نجد $2\left(2t+\frac{17}{2}\right)+(-t-3)-(t)=0$ ومنه $4t+17-t-3-t=0$ ومنه

نجد $\boxed{t=-2}$

بالتعويض في (1) نجد: $\begin{cases} x_\Omega=-4+\frac{17}{2}=\frac{9}{2} \\ y_\Omega=2-3=-1 \\ z_\Omega=-2 \end{cases}$ أي $\boxed{\Omega\left(\frac{9}{2};-1;-2\right)}$.

تصحيح التمرين الثالث:

I) حل المعادلة: $(z^2-2z+2)(z^2-2(\sin\theta)z+1)=0$.

$(z^2-2z+2)(z^2-2(\sin\theta)z+1)=0$ ومنه إما $z^2-2z+2=0$:

$\Delta=4-8=-4=4i^2=(2i)^2 \rightarrow \boxed{\sqrt{\Delta}=2i}$ ومنه $z_1=\frac{2+2i}{2}=\boxed{1+i}$ و

$z_2=\frac{2-2i}{2}=\boxed{1-i}$.

أو: $z^2-2(\sin\theta)z+1=0$:

$$\Delta=4\sin^2\theta-4=4(\sin^2\theta-1)=4(-\cos^2\theta)=4i^2\cos^2\theta=(2i\cos\theta)^2$$

$$\rightarrow \boxed{\sqrt{\Delta}=2|\cos\theta|i}=\begin{cases} 2i\cos\theta:\theta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ -2i\cos\theta:\theta\in\left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right] \end{cases}$$

وفي كلتا الحالتين المعادلة $z^2-2(\sin\theta)z+1=0$ تقبل حلين مترافقين هما:

$z_3=\frac{2\sin\theta+2i\cos\theta}{2}=\boxed{\sin\theta+i\cos\theta}$ و $z_3=\frac{2\sin\theta-2i\cos\theta}{2}=\boxed{\sin\theta-i\cos\theta}$

إذن من خلال ما تقدم نجد أن للمعادلة $(z^2-2z+2)(z^2-2(\sin\theta)z+1)=0$ أربع حلول وهي :

$\boxed{\{1+i;1-i;\sin\theta+i\cos\theta;\sin\theta-i\cos\theta\}}$.

II) 1) كتابة الأعداد على الشكل الأسي:

$z_A=-\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\pi}e^{i\frac{5\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\left(\pi+\frac{5\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{i\left(\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{i\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)}=\boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$ ،

$z_B=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\boxed{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$ ،

$z_C=\sin\theta+i\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\boxed{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}$ ، $z_D=\overline{z_C}=\boxed{e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}}$.

2) تبيين أن النقط C ، D و E تنتمي إلى دائرة وتعيين مركزها ونصف قطرها:

لنا $z_E=\frac{z_A}{z_B}\rightarrow|z_E|=\left|\frac{z_A}{z_B}\right|=\frac{|z_A|}{|z_B|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1\rightarrow\boxed{OE=1}$ وأيضا لنا $|z_D|=|z_C|=1\rightarrow\boxed{OD=OC=1}$ إذن نجد : $\boxed{OE=OD=OC=1}$ وهذا يعني أن النقط C ، D و E تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها r=1.

3) S هو التشابه المباشر الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته $2\sqrt{2}-2$:

B صورة C بالتشابه S معناه:

$$\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\rightarrow e^{-i\frac{\pi}{4}}-e^{i\frac{\pi}{4}}=\left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\rightarrow e^{-i\frac{\pi}{2}}-1=\left(2-\sqrt{2}\right)\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\rightarrow -i-1=\left(2-\sqrt{2}\right)\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}-1-i\right)$$

$$\rightarrow -i-1=\left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}-\left(2-\sqrt{2}\right)(1+i)$$

$$\rightarrow\left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=-i-1+\left(2-\sqrt{2}\right)(1+i)$$

$$\rightarrow\left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\left(1-\sqrt{2}\right)(1+i)$$

$$\left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\left(\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\rightarrow e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=e^{i\frac{5\pi}{4}}\rightarrow\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{5\pi}{4}+2k\pi\rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{4}-2k\pi=\boxed{-\frac{3\pi}{4}+2k'\pi}$$

4) $(z_D)^n=\left[e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\right]^n=e^{in\left(-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}=\boxed{e^{-in\left(\frac{5\pi}{2}\right)}}$ ويكون تخيليا صرفا إذا كان

$\cos\left(-n\frac{5\pi}{2}\right)=0\to -n\frac{5\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\to\boxed{-5n=1+2k}/k\in\mathbb{Z}$ أي يجب أن يكون **-5n** فردي وبما أن **5** فردي إذن يجب أن يكون **n** فرديا أي $\boxed{n=2k'+1}/k'\in\mathbb{N}$.

تصحيح التمرين الرابع:

f الدالة المعرفة على $[0;1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $\begin{cases} f(x)=x+1-\dfrac{1}{\ln x};x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}\\ f(0)=1\end{cases}$

1) أ) تبيين أن **f** مستمرة عند **0** بقيم أكبر:

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x+1-\dfrac{1}{\ln x}\right)=0+1-\dfrac{1}{-\infty}=1=f(0)$ إذن **f** مستمرة عند **0**.

ب) $\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{h-\dfrac{1}{\ln h}}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}1-\dfrac{1}{h\ln h}=1-\dfrac{1}{0^-}=+\infty$

والتفسير الهندسي أن المنحني يقبل على يمين **0** نصف مماس عمودي على حامل محور الفواصل.

2) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\dfrac{1}{\ln x}\right)=+\infty+1-\dfrac{1}{+\infty}=+\infty$ ،

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(x+1-\dfrac{1}{\ln x}\right)=1+1-\dfrac{1}{0^+}=-\infty$ ،

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(x+1-\dfrac{1}{\ln x}\right)=1+1-\dfrac{1}{0^-}=+\infty$.

ب) إتجاه تغير **f** وجدول تغيراتها:

$f'(x)=1+\dfrac{1}{x[\ln x]^2}\succ0$ إذن **f** متزايدة تماما على مجموعة تعريفها.

https://www.facebook.com/groups/algerieeducation/

جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
f'(x)	+	‖	+
f(x)	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

3) الدالة مكتوبة بالشكل $f(x)=ax+b+g(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}=0$ إذن حسب الدرس فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل بجوار $+\infty$.

4) الدالة f مستمرة على مجموعة تعريفها وبالتالي فهي مستمرة على $[0.49;0.5]$ و لنا $f(1.49)\approx-0.07$ و $f(1.5)\approx0.03$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن للمعادلة $f(x)=0$ حل على الأقل في هذا المجال وبما أن الدالة رتيبة تماما على هذا المجال فان هذا الحل وحيد وبالتالي فالمنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة w فاصلتها α في هذا المجال.

معادلة المماس عند هذه النقطة أي عند $(\alpha;0)$:

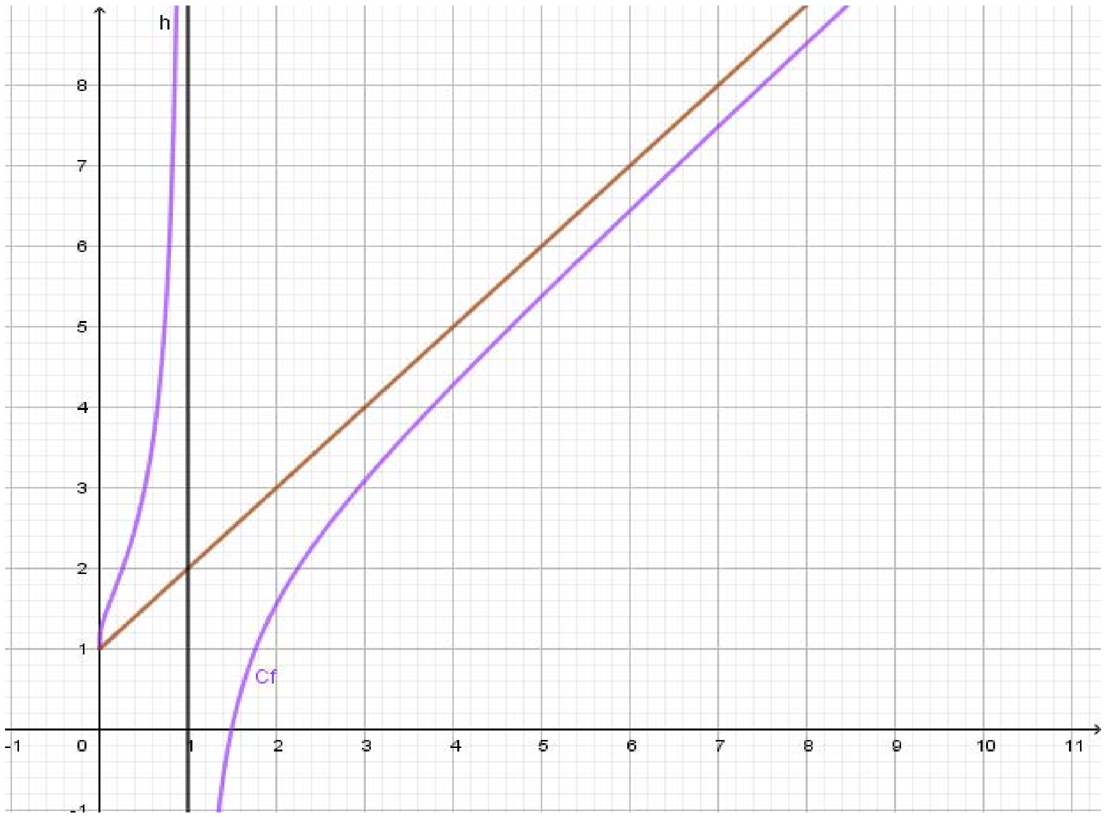
$$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)=\left(1+\frac{1}{\alpha[\ln\alpha]^2}\right)(x-\alpha)+f(\alpha)$$

وبما أن $f(\alpha)=0$ نجد بالتعويض في الدالة $\ln\alpha=\dfrac{1}{\alpha+1}$ فاصبح المعادلة

$$y=\left(1+\frac{1}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^2}\right)(x-\alpha)\to y=\left(1+\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}\right)(x-\alpha)$$ أي

$$\boxed{y=\left(\alpha+3+\frac{1}{\alpha}\right)(x-\alpha)}$$.

5) رسم (Δ) و (C_f) :



6) أ) $h'(x)=-1+\ln x+1=\boxed{\ln x}$ وهي موجبة على $[1;+\infty[$ وتنعدم عند قيمة واحدة فقط وبالتالي فالدالة h متزايدة تماما على هذا المجال.

إذن $h(1)=0$ والدالة متزايدة وهذا يعني ان جميع قيمها موجبة إذن إشارتها هي +.

ب)

$$f(x)-x+\frac{1}{x\ln x}=x+1-\frac{1}{\ln x}-x+\frac{1}{x\ln x}=1-\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{x\ln x}=\frac{x\ln x-x+1}{x\ln x}=\boxed{\frac{h(x)}{x\ln x}}$$

وهو مقدار موجب تماما على المجال $]1;+\infty[$ إذن $f(x)-x+\frac{1}{x\ln x}\succ 0$

ومنه $\boxed{f(x)\succ x-\frac{1}{x\ln x}}$ ....(1)

ومن الرسم نستنتج أن المنحني يقع تحت المقارب في المجال $]1;+\infty[$ ومنه $\boxed{f(x)\prec x+1}$ ....(2)

من (1) و (2) نجد $\boxed{x-\frac{1}{x\ln x}\prec f(x)\prec x+1}$.

https://www.facebook.com/groups/algerieeducation/

7) تبيين أن $\frac{1}{2}(e-\alpha)(e+\alpha+2) \prec A \prec \frac{1}{2}\left(e^2-\alpha^2\right)-\ln(\alpha+1)$:

وجدنا سابقا $x-\frac{1}{x\ln x} \prec f(x) \prec x+1$ والدالة موجبة تماما على المجال $[\alpha;e]$ إذن حسب خواص التكامل

نجد $\int_\alpha^e\left(x-\frac{1}{x\ln x}\right)dx \prec \int_\alpha^e f(x)dx \prec \int_\alpha^e (x+1)dx$ ومنه

$$\int_\alpha^e\left(x-\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right)dx \prec \int_\alpha^e f(x)dx \prec \left[\frac{x^2}{2}+x+k\right]_\alpha^e$$ ومنه

$\left[\frac{x^2}{2}-\ln(\ln x)+k'\right]_\alpha^e \prec \int_\alpha^e f(x)dx \prec \left[\frac{x^2}{2}+x+k\right]_\alpha^e$. (توضيح: حيث $\ln x \succ 0$ على $[\alpha;e]$ و

$\int\frac{u'(x)}{u(x)}dx=\ln(u(x))+k \to \frac{u'(x)}{u(x)} \to \frac{\ln' x}{\ln x}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$ ومنه الدالة الأصلية للدالة $x \to \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$ هي

الدالة $x \to \ln(\ln x)$).

ومنه نجد

$$\left(\frac{e^2}{2}-\ln(\ln e)+k'\right)-\left(\frac{\alpha^2}{2}-\ln(\ln\alpha)+k'\right) \prec \int_\alpha^e f(x)dx \prec \left(\frac{e^2}{2}+e+k\right)-\left(\frac{\alpha^2}{2}+\alpha+k\right)$$

وجدنا سابقا $\ln\alpha=\frac{1}{\alpha+1}$ ومنه نجد

$$\frac{e^2-\alpha^2}{2}+\ln\left(\frac{1}{\alpha+1}\right) \prec \int_\alpha^e f(x)dx \prec \frac{(e-\alpha)(e+\alpha)}{2}+(e-\alpha)$$ ومنه

$$\frac{e^2-\alpha^2}{2}-\ln(\alpha+1) \prec \int_\alpha^e f(x)dx \prec (e-\alpha)\left[\frac{(e+\alpha)}{2}+1\right]$$ وأخيرا نجد

$$\boxed{\frac{e^2-\alpha^2}{2}-\ln(\alpha+1) \prec \int_\alpha^e f(x)dx \prec \frac{1}{2}(e-\alpha)(e+\alpha+2)}$$

https://www.facebook.com/groups/algerieeducation/

تصحيح الموضوع الثاني:

تصحيح التمرين الأول:

1) تعيين العددين α و β :

لنا $\begin{cases} \alpha+\beta=4035 \\ \alpha-\beta=1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2\alpha=4036 \\ \beta=\alpha-1 \end{cases}$ ومنه $\boxed{\begin{cases} \alpha=2018 \\ \beta=2017 \end{cases}}$.

- تبيين أن $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما:

لنا $1009=\frac{2018}{2}=\frac{\alpha}{2}$ ولدينا $\alpha-\beta=1$ ومنه $2\frac{\alpha}{2}-\beta=1$ ومنه $2(1009)+(-1)(2017)=1$ ومنه حسب مبرهنة بيزو نستنتج أن **1009** و **2017** أوليان فيما بينهما أي $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما .

2) تعيين كل الثنائيات الصحيحة (x,y) التي تحقق المعادلة : $1009x-2017y=1$ **(1).......**

وجدنا سابقا $2(1009)+(-1)(2017)=1$ أي $(1009)(2)-(2017)(1)=1$ **(2).....**

بالطرح نجد $1009(x-2)=2017(y-1)$

1009 يقسم $1009(x-2)$ فهو يقسم $2017(y-1)$ وبما أن 1009 أولي مع 2017 إذن حسب مبرهنة غوص نجد **1009** يقسم $y-1$ إذن يوجد عدد صحيح **k** حيث $y-1=1009k$ ومنه $\boxed{y=1009k+1}$.

بالتعويض في المعادلة **(1)** نجد $1009x-2017(1009k+1)=1$ ومنه $1009x=2035153k+2017+1$ أي $\boxed{x=2017k+2}$

إذن الثنائيات الصحيحة (x,y) التي تحقق المعادلة : $1009x-2017y=1$ هي $(x,y)=(2017k+2,1009k+1)$ حيث **k** عدد صحيح.

3) تعيين الأعداد الصحيحة **a** التي تحقق : $\begin{cases} a\equiv 2019[2017] \\ a\equiv 2019[1009] \end{cases}$.

https://www.facebook.com/groups/algerieeducation/

ومنه $\begin{cases} a \equiv 2019[2017] \\ a \equiv 2019[1009] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = 2017p + 2019 \\ a = 1009q + 2019 \end{cases}$ ومنه $2017p + 2019 = 1009q + 2019$

ومنه $2017p = 1009q$ نجد 2017 يقسم 1009q ولكن 2017 أولي مع 1009 وعليه 2017 يقسم q

وهذا حسب مبرهنة غوص ومنه يوجد عدد صحيح k' حيث q=2017k' .

بالتعويض نجد $a = 1009(2017k') + 2019$ ومنه $\boxed{a = 2035153k' + 2019}$.

4) أ) دراسة تبعا لقيم n بواقي قسمة 7^n على 9:

$\begin{matrix} 7^0 \equiv 1[9] & ; & 7^1 \equiv 7[9] \\ 7^2 \equiv 4[9] & ; & 7^3 \equiv 1[9] \end{matrix}$ ومنه فإن البواقي تتلخص في الجدول التالي:

قيم n	3k	3k+1	3k+2
الباقي	1	7	4

ب) تعيين باقي قسمة العدد 42L على 9:

$$L = \underbrace{111...1}_{2018\ fois} = 1\times 7^{2017} + 1\times 7^{2016} + 1\times 7^{2015} + ... + 1\times 7^0$$

لنا

$$= 7^0 + 7^1 + 7^2 + ... + 7^{2017} = 7^0 \frac{7^{2018}-1}{7-1} = \boxed{\frac{7^{2018}-1}{6}}$$

ومنه $42L = 42\frac{7^{2018}-1}{6} = 7\left(7^{2018}-1\right) = \boxed{7^{2019}-7}$

لنا 2019=3*673 ومنه حسب الجدول السابق نجد $7^{2019} \equiv 1[9]$

ولنا $7 \equiv 7[9]$ بالطرح نجد $7^{2019} - 7 \equiv 1 - 7[9]$ ومنه $7^{2019} - 7 \equiv -6[9]$ ومنه حسب خواص الموافقة

نجد $\boxed{7^{2019} - 7 \equiv 3[9]}$ **إذن باقي قسمة 42L على 9 هو 3.**

تصحيح التمرين الثاني:

1) حساب إحتمال الحوادث التالية:

عندما نسحب 4 كريات في آن واحد نجد العدد الكلي للإمكانيات هو $C_9^4 = \frac{9!}{4!\times 5!} = \boxed{126}$.

https://www.facebook.com/groups/algerieeducation/

A: "الحصول على أربع كريات من نفس اللون" يعني يجب أن تكون كلها حمراء ومنه $P(A)=\frac{C_5^4}{126}=\boxed{\frac{5}{126}}$.

B: "الحصول على كرية بيضاء على الأكثر" معناه إما واحدة بيضاء وثلاث من اللونين الآخرين أو الأربع كريات كلها مختلطة بين الأحمر والأخضر ومنه $\boxed{1}=\frac{56+70}{126}=\frac{C_1^1\times C_8^3+C_8^4}{126}=P(B)$.

C: "الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم" أي يجب أن نتحصل على $2;2;-1;-3$ ومنه $P(C)=\frac{C_4^2\times C_1^1\times C_1^1}{126}=\frac{6}{126}=\boxed{\frac{1}{21}}$.

2)أ) X هو عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس : لدينا تسعة كريات من بينها 3 كريات خضراء ومنه عندما نسحب أربع كريان فإما يتبقى 3 خضراء أو 2 خضراء أو 1 خضراء أو 0 خضراء أي $X=\{0;1;2;3\}$.

إذن $P(X=0)=\frac{C_3^3\times C_6^1}{126}=\frac{6}{126}=\boxed{\frac{1}{21}}$ ، $P(X=1)=\frac{C_3^2\times C_6^2}{126}=\frac{45}{126}=\boxed{\frac{5}{14}}$

$P(X=2)=\frac{C_3^1\times C_6^3}{126}=\frac{60}{126}=\boxed{\frac{10}{21}}$ ، $P(X=3)=\frac{C_6^4}{126}=\frac{15}{126}=\boxed{\frac{5}{42}}$

وقانون إحتماله معرف في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/21	5/14	10/21	5/42

ب) حساب الأمل الرياضياتي E(X):

$$E(X)=0\times\frac{1}{21}+1\times\frac{5}{14}+2\times\frac{10}{21}+3\times\frac{5}{42}$$
$$=\frac{5}{14}+\frac{20}{21}+\frac{5}{14}=\frac{10}{14}+\frac{20}{21}=\frac{5}{7}+\frac{20}{21}=\boxed{\frac{35}{21}}$$

ج) حساب إحتمال الحادثة $X^2-X>0$:

$X^2-X\succ 0$ معناه $X(X-1)\succ 0$ أي يجب أن يكون $X=\{2;3\}$ ومنه

$$P\left(X^2-X\succ 0\right)=P(X=2)+P(X=3)$$
$$=\frac{10}{21}+\frac{5}{42}=\boxed{\frac{25}{42}}$$

https://www.facebook.com/groups/algerieeducation/

تصحيح التمرين الثالث:

$$z^2+(m+1)z+(2m-1)=0......(E)$$

1) تعيين قيم العدد الحقيقي **m** حتى تقبل المعادلة (E) حلين غير حقيقيين:

تقبل المعادلة (E) حلين غير حقيقيين إذا وفقط إذا كان مميزها سالب تماما:

$$\Delta=(m+1)^2-4(2m-1)=m^2+2m+1-8m+4=\boxed{m^2-6m+5}$$

ويكون دلتا سالب تماما أي عكس إشارة معامل m^2 إذا كان مميزه موجب وقيم m تقع داخل مجال الجذرين :

$$\Delta_1=(-6)^2-4\times5=36-20=16\succ0$$

وعليه عبارة المميز التي هي كثير حدود من الدرجة الثانية مميزه موجب تماما فهو يقبل جذرين هما :

$m_2=\dfrac{6-4}{2}=1$ و $m_1=\dfrac{6+4}{2}=5$

إذن يكون المميز سالبا تماما إذا كان $\boxed{m\in]1;5[}$.

2) حل المعادلة (E) بوضع **m=3**: نجد $\Delta=3^2-6\times3+5=9-18+5=-4\rightarrow\sqrt{\Delta}=2i$ ومنه

$z_2=\dfrac{-4-2i}{2}=\boxed{-2-i}$ ، $z_1=\dfrac{-4+2i}{2}=\boxed{-2+i}$.

3) $z_A=-2+i$ ، $z_B=-2-i$ ، $z_C=\alpha$ ، $z_E=\sqrt{3}$ حيث α عدد حقيقي و $\alpha\succ-2$.

$AB=|z_B-z_A|=|-2-i+2-i|=|-2i|=2$ ، $AC=|z_C-z_A|=|\alpha+2-i|=\sqrt{(\alpha+2)^2+1}$ ،

$BC=|z_C-z_B|=|\alpha+2+i|=\sqrt{(\alpha+2)^2+1}$.

ABC مثلث متقايس الأضلاع معناه $\sqrt{(\alpha+2)^2+1}=2$ ومنه $(\alpha+2)^2+1=4$ ومنه

$(\alpha+2)^2-3=0$ أي $(\alpha+2+\sqrt{3})(\alpha+2-\sqrt{3})=0$ ومنه إما $\alpha=-2+\sqrt{3}$ أو

$\alpha=-2-\sqrt{3}$ ولكن $\alpha=-2-\sqrt{3}\prec-2$ وهذا مرفوض حسب الشرط ولكن $\alpha=-2+\sqrt{3}\succ-2$

وهو مقبول إذن يكون المثلث **ABC** متقايس الأضلاع إذا كان $\boxed{\alpha=-2+\sqrt{3}}$.

4) نضع $z_C=-2+\sqrt{3}$: $\dfrac{z_C-z_E}{z_A-z_B}=\dfrac{-2+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-2+i+2+i}=\dfrac{-2}{2i}=\dfrac{-1}{i}=i=\boxed{e^{i\frac{\pi}{2}}}$

أ) $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{EC}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; / \; k \in \mathbb{Z}$ أي المستقيمان (BA) و (EC) متعامدان.

ب) لنا المثلث ABC متقايس الأضلاع أي AB=AC=BC هذا من جهة ومن جهة أخرى وجدنا $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B} = i$

أي $\left|\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B}\right| = |i| = 1$ أي AB=CE إذن نستنتج أن AC=BC=EC أي ان النقط A ، B و E تنتمي إلى الدائرة التي مركزها النقطة C ونصف قطرها r=CE=AB=2 .

5) حساب a: العبارة المركبة لهذا الدوران هي $z' = az + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$

يحول B إلى C معناه : $z_C = az_B + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ ومنه

$-2+\sqrt{3} = a(-2-i) + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ ومنه

$-4+2\sqrt{3} = -4a - 2ai + \sqrt{3} - 6 + 2\sqrt{3}i - i$ ومنه $a(4+2i) = -\sqrt{3} - 2 + i\left(2\sqrt{3}-1\right)$

ومنه

$$a = \frac{-\sqrt{3}-2+i\left(2\sqrt{3}-1\right)}{4+2i} = \frac{\left[-\sqrt{3}-2+i\left(2\sqrt{3}-1\right)\right](4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}$$

$$= \frac{-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}i-8+4i+8\sqrt{3}i-4i+4\sqrt{3}-2}{16+4} = \frac{-10+10\sqrt{3}i}{20} = \boxed{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

زاوية هذا الدوران هي عمدة للعدد a ومنه

$$\theta = \arg a \rightarrow \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \boxed{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi} \; / \; k \in \mathbb{Z}$$

ب) لتكن النقطة G هي مركز هذا الدوران: تعريفا هذه النقطة هي النقطة الصامدة بواسطة هذا الدوران أي

$$z_G = \frac{b}{1-a} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)}{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{\sqrt{3}-6+i\left(2\sqrt{3}-1\right)}{3-\sqrt{3}i} = \frac{\left[\sqrt{3}-6+i\left(2\sqrt{3}-1\right)\right]\left(3+\sqrt{3}i\right)}{\left(3-\sqrt{3}i\right)\left(3+\sqrt{3}i\right)}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-18+6\sqrt{3}i-3i+3i-6\sqrt{3}i-6+\sqrt{3}}{12} = \frac{4\sqrt{3}-24}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{3}-6}{3}}$$

نحن نعلم أن لاحقة مركز ثقل مثلث متقايس الأضلاع ABC هي $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{-2+i-2-i-2+\sqrt{3}}{3} = \boxed{\frac{\sqrt{3}-6}{3}}$.

إذن نستنتج أن مركز هذا الدوران هو فعلا مركز ثقل المثلث ABC .

تصحيح التمرين الرابع:

I) 1) تبيين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإن: $g'(x)=\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.

لنا $g(x)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1$ ومنه

$$g'(x)=\left[(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1\right]'=(1+x+x^2)'e^{-\frac{1}{x}}+\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'(1+x+x^2)$$

$$=(1+2x)e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}(1+x+x^2)=\frac{x^2(1+2x)e^{-\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}(1+x+x^2)}{x^2}$$

$$=\frac{x^2+2x^3+1+x+x^2}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{2x^3+2x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{2x^2(x+1)+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

$$=\boxed{\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}$$

- إستنتاج إتجاه تغير g: وجدنا $g'(x)=\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\left[\frac{(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\right](x+1)$

بما أنه مهما كان x من $]0;+\infty[$ فإن $\frac{(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\succ 0$ وأيضا x+1 موجب تماما على هذا المجال إذن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن $g'(x)\succ 0$ أي الدالة g متزايدة تماما على مجموعة تعريفها.

2) $g(1)=3e^{-1}-1=\frac{3}{e}-1\succ 0$ و

$$g(0,9)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1=2,71\times 0,32-1\approx -0,13\prec 0$$

إذن بما أن الدالة g مستمرة على المجال $]0,9;1[$ و $g(0,9)\times g(1)\prec 0$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن للمعادلة g(x)=0 حل على الأقل في المجال $]0,9;1[$ وبما أن الدالة g متزايدة تماما على هذا المجال فإن هذا الحل وحيد وهو α .

إستنتاج إشارة g(x): نستنتج إن g(x) سالب تماما في المجال $]0;\alpha[$ وموجب تماما غي المجال $]\alpha;+\infty[$.

II) $f(x)=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$

(1 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right]=+\infty+1\times e^{-\infty}=\boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right]=0+(+\infty)\times e^{0}=\boxed{+\infty}$

ب) تبيين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

لنا $f(x)=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$ ومنه

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right)'=-\frac{1}{x^2}+e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{-1+x^2e^{-\frac{1}{x}}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}=\frac{(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1}{x^2}=\boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$$

ومنه نستنتج أن إشارة f'(x) من إشارة g(x) أي في المجال $]0;\alpha[$ تكون المشتقة سالبة تماما أي الدالة f متناقصة تماما وفي المجال $]\alpha;+\infty[$ تكون الدالة f متزايدة تماما.

جدول التغيرات:

x	0		α	1		$+\infty$
f'(x)	||	-	0		+	
f(x)	|| $+\infty$		$f(\alpha)$			$+\infty$

(2 تبيين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=-1$.

بوضع $t=-\frac{1}{x}$ ومنه $x=-\frac{1}{t}$ ولما $x\to+\infty$ فإن $t\to0$ فنجد:

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=\lim\limits_{t\to0}\left(-\frac{1}{t}e^{t}+\frac{1}{t}\right)=\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{-(e^{t}-1)}{t}\right)=-\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{e^{t}-1}{t}\right)=-1$$

Y=x مقارب للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$ معناه: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+e^{-\frac{1}{x}}+\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)\right]=0+1-1=0$$

أي أن المستقيم ذو المعادلة **y=x** مقارب مائل للمنحني $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$.

3) $h(x)=\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$.

أ) $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right)=0-1+1=0$.

- دراسة إتجاه تغير الدالة **h**:

$$h'(x)=\left(\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right)'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^2}\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)$$

إذن إشارة **h'(x)** من نفس إشارة $e^{-\frac{1}{x}}-1$

h'(x)<0 معناه $e^{-\frac{1}{x}}-1\prec 0$ أي $e^{-\frac{1}{x}}\prec 1\to e^{-\frac{1}{x}}\prec e^0\to-\frac{1}{x}\prec 0$ إذن الدالة **h** متناقصة تماما

$\to x\succ 0\to \boxed{x\in\left]0;+\infty\right[}$

على المجال المعطى أي على مجموعة تعريفها.

الدالة **f** متناقصة تماما على مجموعة تعريفها ولنا $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$ وعليه نستنتج أن المنحني الممثل لها يقع فوق محور الفواصل بشكل تام ومنه مهما كان **x** من $\left]0;+\infty\right[$ فإن **h(x)>0** .

ب)

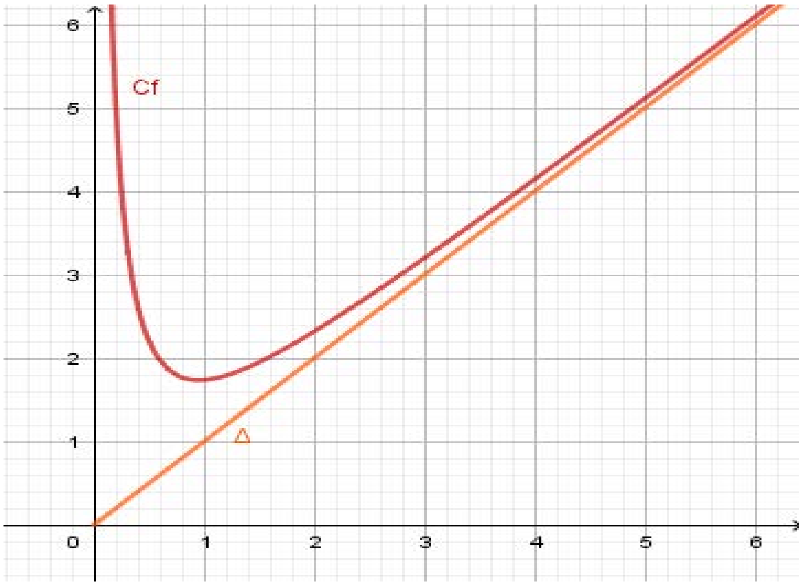
$$f(x)-x=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x=\frac{1}{x}-x+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{1-x^2}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}=\frac{(1-x)(1+x)}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$

$$=(1+x)\left[\frac{1-x}{x}+e^{-\frac{1}{x}}\right]=(1+x)\left[\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right]=\boxed{(1+x)h(x)}$$

نستنتج أن $f(x)-x\succ 0$ إذن المنحني $\left(C_f\right)$ يقع فوق المستقيم (Δ) .

4) رسم (Δ) و (C_f) :



5) أ) كتابة u_n بدلالة n:

$$u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}\left[\frac{1}{\frac{1}{n}} + \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{\frac{1}{n}}}\right] - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n}{n+1}\left[n + \left(\frac{n+1}{n}\right)e^{-n}\right] - \frac{n^2}{n+1}$$

$$= \frac{n^2}{n+1} + e^{-n} - \frac{n^2}{n+1}$$

$$= \boxed{e^{-n}}$$

- تبيين أن (u_n) متتالية هندسية وتعيين أساسها q و حدها الأول u_1 :

لنا $u_n = e^{-n}$ ومنه $u_{n+1} = e^{-n-1} = e^{-n} \times e^{-1} = \frac{1}{e} e^{-n} = \boxed{\frac{1}{e} u_n}$ إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{1}{e}}$ و حدها الأول $u_1 = e^{-1} = \boxed{\frac{1}{e}}$.

- حساب بدلالة n المجموع S_n :

لنا $u_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2}{n+1}$ ومنه $\boxed{\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)=u_n+\frac{n^2}{n+1}}$

$$S_n=\left(\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\left(u_1+\frac{1^2}{1+1}-\frac{1}{1+1}\right)+\left(u_2+\frac{2^2}{2+1}-\frac{1}{2+1}\right)+\left(u_3+\frac{3^2}{3+1}-\frac{1}{3+1}\right)+\ldots+\left(u_n+\frac{n^2}{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\left(u_1+\frac{1^2-1}{1+1}\right)+\left(u_2+\frac{2^2-1}{2+1}\right)+\left(u_3+\frac{3^2-1}{3+1}\right)+\ldots+\left(u_n+\frac{n^2-1}{n+1}\right)$$

$$=\left(u_1+\frac{(1-1)(1+1)}{1+1}\right)+\left(u_2+\frac{(2-1)(2+1)}{2+1}\right)+\left(u_3+\frac{(3-1)(3+1)}{3+1}\right)+\ldots+\left(u_n+\frac{(n-1)(n+1)}{n+1}\right)$$

$$=\left(u_1+(1-1)\right)+\left(u_2+(2-1)\right)+\left(u_3+(3-1)\right)+\ldots+\left(u_n+(n-1)\right)$$

$$=\left(u_1+0\right)+\left(u_2+1\right)+\left(u_3+2\right)+\ldots+\left(u_n+(n-1)\right)$$

$$=\left(u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n\right)+\left(1+2+3+\ldots+(n-1)\right)$$

$$=\left(\frac{1}{e}\times\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{1-\frac{1}{e}}\right)+\frac{n-1}{2}(1+n-1)=\left(\frac{1}{e}\times\frac{1-\frac{1}{e^n}}{\frac{e-1}{e}}\right)+\frac{n(n-1)}{2}=\left(\frac{1}{e}\times\frac{\frac{e^n-1}{e^n}}{\frac{e-1}{e}}\right)+\frac{n(n-1)}{2}$$

$$=\left(\frac{1}{e}\times\frac{e^n-1}{e^n}\times\frac{e}{e-1}\right)+\frac{n(n-1)}{2}=\left(\frac{e^n-1}{(e-1)e^n}\right)+\frac{n(n-1)}{2}=\boxed{\frac{1-e^{-n}}{e-1}+\frac{n(n-1)}{2}}$$

الأستاذ: جمال بورنان