عبد القادر كاهية

BAC

الميسّر في الرياضيات

3 AS

ملخصات هامة لجميع الدروس

حلول تمارين ومسائل الكتاب المدرسي بالتفصيل

الجزء الأول

الشعب:
علوم تجريبية
رياضيات

وفق المنهاج الجديد لوزارة التربية الوطنية

الملكية

 الفهرس

المحور الأول

النهايات والاستمرارية

I- نهاية دالة عند اللانهاية

1) النهاية المنتهية لدالة عند $+\infty$:

لتكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $[a,+\infty[$ و (C_f) منحناها البياني.

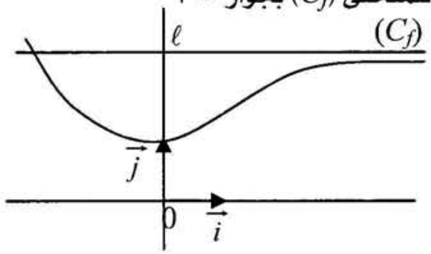
> **تعريف:** الدالة f تؤول إلى ℓ (عددا حقيقيا) لما x تؤول إلى $+\infty$ يعني كل مجال مفتوح يشمل ℓ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

ونرمز $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$

- نعرّف بنفس الكيفية النهاية عند $-\infty$ لدالة f معرفة على مجال من الشكل $]-\infty,b]$.

التفسير الهندسي:

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ فإن المستقيم ذي المعادلة $y=\ell$ مستقيما مقاربا أفقيا للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$



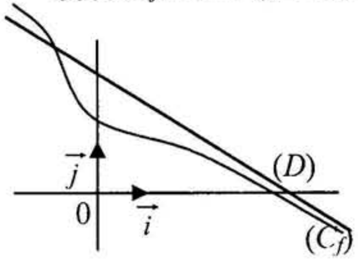
2) النهاية الغير المنتهية لدالة عند $+\infty$:

> **تعريف:** لتكن f دالة لها نهاية $+\infty$ عند $+\infty$ يعني من أجل كل عدد حقيقي $A>0$ لدينا $f(x)>A$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

نعرّف بنفس الكيفية النهاية عند $-\infty$

التفسير الهندسي:

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ وإذا كان $f(x)$ يمكننا كتابته على الشكل $f(x)=ax+b+h(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=a$ فإن المستقيم (D) ذي المعادلة $y=ax+b$ مستقيما مقاربا مائلا لـ (C_f) بجوار $+\infty$.



II- نهاية دالة عند a

1) النهاية المنتهية لدالة عند a:

ليكن a عددا حقيقيا

تعريف: دالة f تقبل نهاية ℓ (عدد حقيقي) عند a يعني كل مجال مفتوح يشمل ℓ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من a.

ونرمز: $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

2) النهاية الغير المنتهية لدالة عند a:

ليكن a عددا حقيقيا

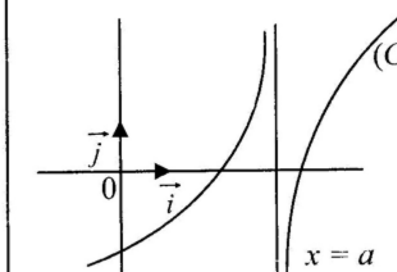
تعريف: دالة f تقبل كنهاية $+\infty$ عند a يعني من أجل كل عدد حقيقي $A > 0$ كل مجال من الشكل $]A, +\infty[$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x قريب بالكافي من a

ونرمز: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

نعرّف بنفس الكيفية: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$

التفسير الهندسي:

إذا كانت $\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = a$ فإن المستقيم ذي المعادلة $x = a$ مستقيما مقاربا عموديا (شاقوليا) للمنحنى (C_f)



استمرارية دالة

تعاريف:

- لتكن f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد الحقيقي a

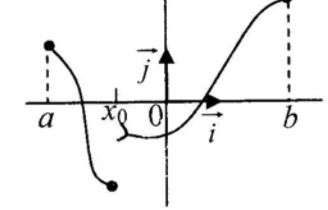
الدالة f مستمرة عند a يعني $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ **أو**

الدالة f مستمرة عند a يعني $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

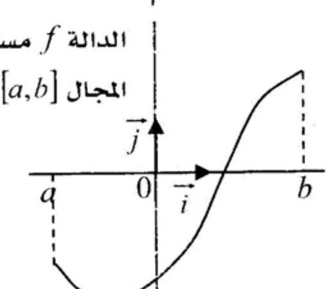
- الدالة f مستمرة على المجال I يعني الدالة f مستمرة عند كل نقطة من I.

بيانيا تفسر أنه يمكننا رسم بيان الدالة f على المجال I بدون رفع اليد أو القلم من الورقة.

الدالة f غير مستمرة عند x_0 | الدالة f غير مستمرة على المجال $[a,b]$



الدالة f مستمرة على المجال $[a,b]$



خواص:

- كل الدوال المحصل عليها بالعمليات على دوال مألوفة أو بتركيبها مستمرة على مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال كثيرات الحدود، $\sin$ ، $\cos$ مستمرة على $\mathbb{R}$
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

العمليات على النهايات

1) نهاية مجموع دالتين أو مجموع متتاليتين:

لأعداد الحقيقية ℓ و ℓ'

$\lim(f(x)+g(x))$	$\lim g(x)$	$\lim f(x)$
$\ell+\ell'$	ℓ'	ℓ
∞	∞	ℓ
∞	ℓ'	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
ح ع ت	$-\infty$	$+\infty$
ح ع ت	$+\infty$	$-\infty$

ح ع ت يعني حالة عدم تعيين

2) نهاية جداء دالة بعدد حقيقي α غير معدوم:

لأعداد ℓ و α أعداد حقيقية

$\lim f(x)$		ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha > 0$	$\lim \alpha f$	$\alpha\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha < 0$	$\lim \alpha f$	$\alpha\ell$	$-\infty$	$+\infty$

3) نهاية جداء دالتين أو جداء متتاليتين:

لأعداد ℓ و ℓ' أعداد حقيقية

$\lim(f \times g)(x)$	$\lim g(x)$	$\lim f(x)$
$\ell \times \ell'$	ℓ'	ℓ
$+\infty$	$+\infty$	$\ell > 0$
$-\infty$	$+\infty$	$\ell < 0$
$-\infty$	$-\infty$	$\ell > 0$
$+\infty$	$-\infty$	$\ell < 0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
ح ع ت	∞	0

4) نهاية حاصل قسمة دالتين أو حاصل قسمة متتاليتين:

لأعداد ℓ و ℓ' أعداد حقيقية

$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$	$\lim g(x)$	$\lim f(x)$
$\frac{\ell}{\ell'}$	$\ell' \neq 0$	ℓ
∞	0	$\ell \neq 0$
0	$\ell' \neq 0$	0
0	∞	ℓ
∞	0	∞
ح ع ت	$-\infty$	$+\infty$
ح ع ت	$+\infty$	$-\infty$
ح ع ت	0	0

5) نهاية مركبة دالتين:

إذا كان $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

و $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$

فإن $\lim\limits_{x \to a} (gof)(x) = c$

نظرية القيم المتوسطة

1) نظرية القيم المتوسطة:

لتكن الدالة f معرفة ومستمرة على مجال I و a ، b عددين حقيقيين من I من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = k$

نص آخر:

إذا كانت الدالة f معرفة ومستمرة على مجال I ، صورة المجال I بالدالة f هو مجال

2) نظرية القيم المتوسطة:

إذا كانت الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a,b]$. إذا من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا c في المجال $[a,b]$

ملاحظة:

يمكننا تمديد هذه النظرية لدالة معرفة على مجال $[a,b[$ ، $]a,b]$ أو $]a,b[$ ، نحدد عندئذ صور هذه الحالات لحساب النهايات عند حدود هذه المجالات.

المجالات - الصور

نرمز لـ J بالمجال الصورة بالدالة f للمجال I علما أن f مستمرة على I أي: $J = f(I)$

I	f متزايدة تماما على I	f متناقصة تماما على I
$[a,b]$	$J = [f(a), f(b)]$	$J = [f(b), f(a)]$
$[a,b[$	$J = \left[f(a), \lim\limits_{x \to b} f(x)\right[$	$J = \left]\lim\limits_{x \to b} f(x), f(a)\right]$
$]a,b]$	$J = \left]\lim\limits_{x \to a} f(x), f(b)\right]$	$J = \left[f(b), \lim\limits_{x \to a} f(x)\right[$
$]a,b[$	$J = \left]\lim\limits_{x \to a} f(x), \lim\limits_{x \to b} f(x)\right[$	$J = \left]\lim\limits_{x \to b} f(x), \lim\limits_{x \to a} f(x)\right[$

نظريات المقارنة:

النتائج التالية تبقى صحيحة إذا كانت الدوال هم متتاليات.

إذا عرفنا تصرّف بعض الدوال يمكننا استنتاج بالمقارنة تصرف دوال أخرى.

في الجدول أدناه الترميز a تمثل عدد أو $+\infty$ أو $-\infty$

ملاحظة: تصرّف يعني $(Comportement)$

تصرّف الدالة f	تصرّف الدوال g و h	العلاقات التي تربط الدوال في جوار a
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$	$f(x) \le g(x)$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$	$f(x) \ge g(x)$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$	$\lvert f(x) - \ell \rvert \le g(x)$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) \le \lim\limits_{x \to a} g(x)$; $\ell \le \ell'$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$	$f(x) \le g(x)$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ (Théorème des gendarmes)	$\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$	$h(x) \le f(x) \le g(x)$

معادلة (Γ) هي $y^2-2xy+1=0$ مع $x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$

4) ليكن الشعاع $\vec{\mu}$ من المستوى حيث $\vec{\mu}=\vec{i}+2\vec{j}$،

ولتكن $M(x,y)$ في المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$

و $M(x',y')$ في المعلم $(o,\vec{i},\vec{\mu})$

ومنه لدينا $\overrightarrow{OM}=x'\vec{i}+y'\vec{\mu}$

و $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$

وبالتالي $x'\vec{i}+y'\vec{\mu}=x\vec{i}+y\vec{j}$

ومنه $x'\vec{i}+y'(\vec{i}+2\vec{j})=x\vec{i}+y\vec{j}$

ومنه $(x'+y')\vec{i}+2y\vec{j}=x\vec{i}+y\vec{j}$

وعليه $\begin{cases}x=x'+y'\\ y=2y'\end{cases}$

ب) معادلة (Γ) في المعلم $(o,\vec{i},\vec{\mu})$ هي

$$(2y')^2-2(x'+y')(2y')+1=0$$

ومنه معادلة (Γ) في المعلم $(o,\vec{i},\vec{\mu})$ هي

$(\Gamma): 1-4xy=0$ أي $y=\dfrac{1}{4x}$

مع $x\neq 0$

ج) طبيعة (Γ) هو قطع زائد معادلته

$$y=\frac{1}{4x}$$

الاشتقاقية

الاشتقاقية

1. العدد المشتق – الدالة المشتقة

تعريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$، **a و** $(a+h)$ عددان حقيقيان من I، $h\neq 0$

نقول أن f تقبل الاشتقاق عند a إذا قبلت **النسبة** $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية محدودة لما **يؤول** h إلى 0

نسمي هذه النهاية العدد المشتق للدالة f عند **a** ونرمز لها بالرمز $f'(a)$

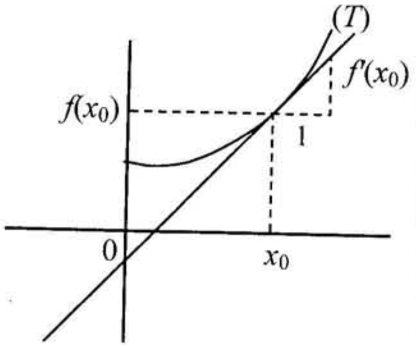
ملاحظة: إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I ونسمي الدالة $f':x\mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f

2. مماس منحنى دالة

تعريف وخاصية: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$

إذا قبلت f الاشتقاق عند x_0 فإن (C) يقبل عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$ مماسا (T) معامل توجيهه $f'(x_0)$ ومعادلته:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$



3. المشتقات المتتابعة

تعريف: f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$

إذا قبلت الدالة f' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة $(f')'$ تسمى المشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بالرمز f'' إذا قبلت الدالة f'' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة $(f'')'$ تسمى المشتقة الثالثة للدالة f ونرمز لها بالرمز f''' تسمى الدوال f'، f''، f'''.....$f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f

4. الاشتقاقية والاستمرارية

خاصية: إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال I فإن مستمرة على هذا المجال.

ملاحظة: عكس هذه الخاصية ليس دائما صحيحا

المشتقات والعمليات

1. مشتقات دوال مألوفة

مجالات قابلية الاشتقاق	$f'(x)$	$f(x)$
$\mathbb{R}$	0	C (حيث C عدد حقيقي ثابت)
$\mathbb{R}$	1	x
$\mathbb{R}$	$n\,x^{n-1}$	$(n\geq 2, n\in\mathbb{N})x^{n}$
$]-\infty,0[$ أو $]0,+\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$]0,+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$

2. المشتقات والعمليات على الدوال

μ و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي

الدالة	المشتقة
$\mu+v$	$\mu'+v'$
$k\mu$	$k\mu'$
$\mu\times v$	$\mu'v+v'\mu$
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
(الدالة v لا تنعدم على I) $\frac{\mu}{v}$	$\frac{\mu'v-v'\mu}{v^2}$

نتائج: ❖ الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

❖ الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها

3. مشتقة الدالة $x\mapsto \mu(ax+b)$

مبرهنة: a و b عددان حقيقيان مع $a\neq 0$، μ دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$. ليكن J المجال المكون من الأعداد الحقيقية x حيث $(ax+b)$ ينتمي إلى I الدالة $f:x\mapsto \mu(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا $f'(x)=a\mu'(ax+b)$

اتجاه تغير دالة

1. المشتقة واتجاه تغير دالة

مبرهنة: f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$

❖ إذا كان من أجل كل x من I: $f'(x)>0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم

التي تنعدم الدالة f من أجلها فإن الدالة f متزايدة تماما على I

◆ إذا كان من أجل كل x من I: $f'(x)<0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها فإن الدالة f متناقصة تماما على I

◆ إذا كان من أجل كل x من I: $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على I

2. القيم الحدية المحلية

تعاريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I

◆ نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J: $f(x)\leq f(x_0)$

◆ نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J: $f(x)\geq f(x_0)$

◆ نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لـ f يعني ان $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى

مبرهنة: f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند x_0 مغيرة إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f

إشتقاق دالة مركبة

1. مشتقة الدالة $(vo\mu)$

مبرهنة: إذا قبلت الدالة μ الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ وقابلت الدالة v الاشتقاق على $\mu(I)$ فإن الدالة $(vo\mu)$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I:

$$(vo\mu)'(x)=\mu'(x)\times v'[\mu(x)]$$

تطبيقات:

❖ مشتقة الدالة: $x\mapsto\sqrt{\mu(x)}$

إذا كانت الدالة μ قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ وكانت موجبة تماما على I فإن الدالة $\sqrt{\mu}$ تقبل للاشتقاق على I ولدينا

$$\left(\sqrt{\mu}\right)'=\frac{\mu'}{2\sqrt{\mu}}$$

❖ مشتقة الدالة: $x\mapsto[\mu(x)]^n$ (n عدد طبيعي يحقق $n\geq 2$)

إذا كانت الدالة μ قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن الدالة μ^n تقبل للاشتقاق على I ولدينا: $(\mu^n)'=n\,\mu'\,\mu^{n-1}$

❖ مشتقة الدالة: $x\mapsto\frac{1}{[\mu(x)]^n}$ (n عدد طبيعي يحقق $n\geq 1$)

إذا كانت الدالة μ قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ ولا تنعدم على I فإن الدالة $\frac{1}{\mu^n}$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا:

$$\left(\frac{1}{\mu^n}\right)' = -\frac{n\,\mu'}{\mu^2}$$

التقريب التآلفي – طريقة أولمر

1. التقريب التآلفي

f دالة معرفة على مجال I مفتوح من $\mathbb{R}$

إذا قبلت f الاشتقاق عند x من I فإنه توجد دالة ε بحيث من كل عدد حقيقي h حيث $(x + h)$ ينتمي إلى I لدينا:

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + h\varepsilon(h)$$

مع $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$

من أجل h قريب من 0 نكتب عندئذ:

$$f(x+h) \cong f(x) + h\,f'(x)$$

نسمي $f(x) + hf'(x)$ التقريب التآلفي لـ $f(x+h)$ من أجل h قريب من 0 المرفق بالدالة f

الكتابة التفاضلية

بوضع $\Delta x = (x+h) - x$

و $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ نكتب المساواة $\Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta x\,\varepsilon(\Delta x)$ ومنه التقريب $\Delta y \cong f'(x)\Delta x$ عندما يكون Δx قريبا من 0

نصطلح الصياغة التفاضلية التالية:

$$dy = f'(x)\,dx \text{ أو } f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

يستعمل هذا الترميز في العلوم الفيزيائيه

وبصفة عامة نكتب: $f' = \dfrac{df}{dx}$ ، $f'' = \dfrac{d^2 f}{dx^2}$

وهكذا $f^{(n)} = \dfrac{d^n f}{dx^n}$

2. طريقة أولمر

تسمح طريقة أولمر بإنشاء تمثيلات بيانية تقريبية لدالة f معرفة بـ f' و $y_0 = f(x_0)$ ترتكز هذه الطريقة على التقريب التآلفي للدالة f بحيث من أجل h قريب من 0 لدينا

$$f(x_0+h) \cong f(x_0) + h\,f'(x_0)$$

انطلاقا من النقطة $A(x_0, y_0)$ بحيث $f'(x_0) \neq 0$ ننشئ النقطة $A_1(x_1, y_1)$ ذات الفاصلة $x_1 = x_0 + h$ والتي تنتمي إلى المستقيم الذي معامل توجيهه $f'(x_0)$ والمار من A_0 وبالتالي $y_1 = f(x_0) + hf'(x_0)$ وبما أن $f(x_0+h) \cong f(x_0) + h\,f'(x_0)$ من أجل h قريب من 0 فإن النقطة $A_1(x_1, y_1)$ قريبة من (C_f) منحنى الدالة f

بنفس الطريقة يمكن إنشاء انطلاقا من A_1 النقطة $A_2(x_1 + h, f(x_1) + h f'(x_1))$ وهكذا على التوالي يمكن إنشاء النقط $A_n(x_n, y_n)$ حيث $x_n = x_{n-1} + h$

و $y_n = f(x_{n-1}) + h f'(x_{n-1})$ مع $n \geq 1$

بربط النقط A_0 ، A_1 ، A_2 ،...... نحصل على تمثيل بياني تقريبي لـ f مرتبط باختيار h الذي يسمى الخطوة ونحصل على أكثر دقة كلما كان h أقرب من 0

المحور الثالث

الدوال الأسية واللوغاريتمية

Hard_equation

تعريف الدالة الأسية

مبرهنة: توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق $f' = f$ و $f(0) = 1$

هذه الدالة تسمى الدالة الأسية ونرمز لها بـ: Exp

نتائج:

❖ $Exp(0) = 1$

❖ الدالة Exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $[Exp(x)]' = Exp(x)$

❖ الدالة Exp موجبة تماما على $\mathbb{R}$

الخاصية الأساسية: من أجل كل x و y من $\mathbb{R}$: $Exp(x+y) = Exp(x) \times Exp(y)$

1) الترميز: e^x

تعريف: العدد الحقيقي $Exp(1)$ يرمز له بـ e أي $Exp(1) = e$

2) خواص:

❖ العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة Exp قريب من 2,718

❖ من أجل كل عدد حقيقي: $Exp(x) = e^x$

نتائج: من أجل كل عددين حقيقيين a و b:

$e^{a+b} = e^a \times e^b$ ، $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ ، $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ ، من أجل كل عدد صحيح r
$(e^a)^r = e^{ar}$

دراسة الدالة: $x \mapsto e^x$

الدالة $x \mapsto e^x$ معرفة، مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $(e^x)' = e^x$ وهي دالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

1) النهايات:

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ ، $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

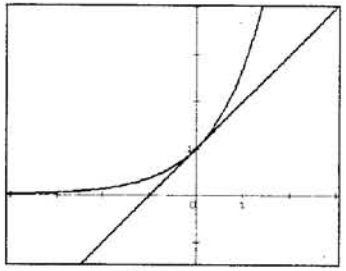
بما أن الدالة الأسية قابلة للاشتقاق عند 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

جدول تغيرات:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Exp	0	1	e	$+\infty$

التمثيل البياني:



من أجل h قريب جدا من 0 لدينا:

$e^h \cong 1 + h$

محور الفواصل هو مستقيم مقارب أفقي للمنحنى الممثل للدالة الأسية عند $-\infty$

معادلات ومتراجحات:

خواص:

❖ من أجل كل عدد حقيقي k موجب تماما المعادلة $e^x = k$ تقبل حلا وحيدا $\mathbb{R}$

❖ من أجل كل عددين حقيقيين x و y:

$e^x = e^y$ تكافئ $x = y$

$e^x > e^y$ تكافئ $x > y$

التزايد المقارن:

خواص: $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ، $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$

ومن أجل كل $n > 0$: $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ ، $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

الدالة e^u:

1) الدالة المشتقة:

مبرهنة: لتكن الدالة u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I. الدالة المركبة $(Expou)$ نرمز لها بـ e^u قابلة للاشتقاق على I ومن أجل كل $x \in I$: $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$

2) الدالة الأصلية:

مبرهنة: لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I. دالة أصلية للدالة $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ هي الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$

الدالة اللوغاريتمية

تعريف 1: ليكن x عدد حقيقي موجب تماما. يوجد عدد حقيقي وحيد y بحيث $e^y = x$ هذا العدد الحقيقي يسمى اللوغاريتم النيبري لـ x ويرمز له بـ Lnx نسمي الدالة اللوغاريتمية النيبرية الدالة التي نرمز لها بـ Ln التي من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$ ترفق العدد الحقيقي Lnx

تعريف 2: الدالة اللوغاريتمية النيبرية هي الدالة الأصلية للدالة المقلوب على $]0,+\infty[$ والتي تنعدم عند 1 أي $Lnx = \int \frac{1}{t} dt$

نتائج:

❖ من أجل كل عدد حقيقي: $x > 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي y:

$x = e^y$ يكافئ $y = Lnx$

❖ من أجل كل $x > 0$: $e^{Lnx} = x$

❖ ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $Ln\, e^x = x$

خاصية أساسية: من أجل كل x و y موجبان تماما: $Ln(x \times y) = Lnx + Lny$

الخواص الجبرية للدالة Ln:

قواعد: من أجل كل عددين حقيقيين $a > 0$ و $b > 0$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$:

❖ $Ln\, a^n = n\, Ln\, a$

❖ $Ln\left(\frac{1}{b}\right) = -Lnb$

❖ $Ln\left(\frac{a}{b}\right) = Lna - Lnb$

❖ $Ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2} Lna$

❖ $Ln\, a^{-n} = -n\, Ln\, a$

دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبرية:

الدالة Ln معرفة، مستمرة وقابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ومن أجل كل عدد حقيقي $x > 0$:

$$(Lnx)' = \frac{1}{x}$$

الدالة Ln متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$

النهايات:

$$\lim_{x \to +\infty} Lnx = +\infty \text{ ، } \lim_{x \xrightarrow{>} 0} Lnx = -\infty$$

❖ بما أن الدالة Ln قابلة للاشتقاق عند 1

فإن: $\lim_{x \to 1} \frac{Lnx}{x-1} = 1$ أو $\lim_{x \to 0} \frac{Ln(x+1)}{x} = 1$

جدول تغيرات:

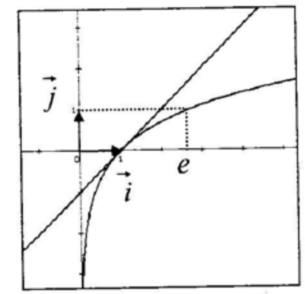
x	0		1		e		$+\infty$
Ln	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

التمثيل البياني:

المنحنى البياني الممثل للدالة Ln يقبل محور التراتيب مستقيم مقارب عمودي (شاقولي)

من أجل h قريب من الصفر أي $h \cong 0$ لدينا

$$Ln(1+h) \cong h$$



معادلات ومتراجحات:

خاصية: من أجل كل عددين حقيقيين a و b موجبين تماما:

$Ln\, a = Ln\, b$ يكافئ $a = b$

$Ln\, a < Ln\, b$ يكافئ $a < b$

التزايد المقارن:

خواص: $\lim_{x \to +\infty} \frac{Lnx}{x} = 0$ ، $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} x\, Ln\, x = 0$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{Lnx}{x^n} = 0 \text{ ، } \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x^n Ln\, x = 0$$

الدالة $(Lnou)$:

المشتقة: مبرهنة

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق وموجب تماما على مجال I فإن الدالة $(Lnou)$ يرمز لها بـ Lnu قابلة للاشتقاق على I ومن أجل كل $x \in I$:

$$\left(Lnu(x)\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

أي $(Lnou)' = (Lnu)' = \frac{u'}{u}$

الدالة الأصلية:

مبرهنة: لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I ولا تنعدم على المجال I

فإن دالة أصلية على المجال I للدالة $\frac{u'}{u}$ هي الدالة $Ln|u|$

ملاحظة: إذا كانت u موجبة تماما على I دالة أصلية للدالة $\frac{u'}{u}$ هي الدالة $Ln|u|$ وبما أن $u > 0$ وبالتالي هي $Ln(u)$

الدالة اللوغاريتمية العشرية:

تعريف: الدالة اللوغاريتمية العشرية هي الدالة التي نرمز لها بـ Log المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ

$$Logx = \frac{Lnx}{Ln10}$$

خواص:

❖ $Log1 = 0$

❖ $Log10 = 1$

ومنه كل عددين حقيقيين a و b موجبين تماما $Log\, ab = Log\, a + Log\, b$

المحور الرابع

التزايد المقارن

Hard_equation

قوى عدد حقيقي موجب تماما

ليكن a عددا حقيقيا موجب تماما وليكن n عددا صحيحا نسبيا

نعلم أن $Ln\, a^n = n\, Ln\, a$

وبالتالي $a^n = e^{n\, Ln\, a}$

وبما أن $Ln\ e = 1$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x: $e^{x\, Ln\, a} = a^x$

تعريف 1: نضع $a^b = e^{b\, Ln\, a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a > 0$ و b كيفي

تعريف 2: a عدد حقيقي موجب تماما

نسمي الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = a^x = e^{x\, Ln\, a}$ الدالة الأسية ذات الأساس a

قواعد الحساب:

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a ، b ومن أجل كل عددين حقيقيين x ، y لدينا

1) $Ln(a^x) = x\, Ln\, a$

2) $a^x \times a^y = a^{x+y}$

3) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

4) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

5) $(a^x)^y = a^{xy}$

6) $(ab)^x = a^x b^x$

7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

الدالة الجذر النوني:

مبرهنة وتعريف: من أجل كل عدد حقيقي a ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يوجد عدد حقيقي وحيد b يحقق $b^n = a$

يسمى b الجذر النوني للعدد a ونرمز إليه بالرمز $\sqrt[n]{a}$

نسمي الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ حيث $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ الدالة الجذر النوني

خاصية 1: من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

ملاحظة: نضع اصطلاحا $0^{\frac{1}{n}} = 0$

التزايد المقارن

1) التزايد المقارن للدالتين: $x \mapsto e^x$ ، $x \mapsto x$

خواص: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$

2) التزايد المقارن للدالتين: $x \mapsto Lnx$ ، $x \mapsto x$

خواص: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{Lnx}{x} = 0$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\, Ln\, x = 0$

3) التزايد المقارن مع الدالة: $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

خواص: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = 0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{Lnx}{x^n} = 0$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^n\, Ln\, x = 0$

خلاصة: كل الدوال $x \mapsto e^x$ ، $x \mapsto Lnx$ ، $x \mapsto x^n$ مع $(n \in \mathbb{N}^*)$ تؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$ إلا أن سلوكها مختلف عند اللانهاية تتفوق الدالة الأسية على الدالة قوّة وتتفوق الدالة قوّة على الدالة اللوغاريتمية النيبرية.

المحور الخامس

الدوال الأصلية

أ. الدوال الأصلية

1) الدالة الأصلية لدالة على مجال:

تعريف: f دالة معرفة على مجال I

نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة للاشتقاق على I مشتقتها F' هي f

من أجل كل x من I: $F'(x) = f(x)$

2) مجموعة الدوال الأصلية لدالة:

خواص:

❖ إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل دوالا أصلية على I

❖ إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال $x \mapsto F(x)+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت.

نتيجة: دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط

3) الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير:

خاصية: f دالة مستمرة على مجال I، x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد كيفي توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0) = y_0$

حساب الدوال الأصلية

1) الدوال الأصلية لدوال مألوفة:

يتم الحصول على النتائج الملخصة في الجدول الموالي انطلاقا من قراءة عكسية لمشتقات دوال مألوفة. الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي الدوال F، يمثل c عددا حقيقيا كيفيا

$f(x)$	$F(x) =$	$I =$
a (a عدد حقيقي)	$ax+c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
x^n $(n\in\mathbb{N}^*)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$]-\infty,0[$ أو $]0,+\infty[$
$(n\geq 2;$ $n\in\mathbb{N})\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$]-\infty,0[$ أو $]0,+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0,+\infty[$
$\sin x$	$-\cos x+c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x+c$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2x = \frac{1}{\cos^2x}$	$\tan x+c$	$\mathbb{R}-\left\{-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ $k\in\mathbb{Z}$

خواص:

❖ إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب لـ f و g على مجال I فإن $(F+G)$ دالة أصلية لـ $(f+g)$ على I

❖ إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن (kF) دالة أصلية للدالة (kf) على المجال I. $(k\in\mathbb{R})$

الدوال الأصلية والعمليات على الدوال:

μ دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة μ
$u'\cdot u$	$\frac{1}{2}u^2+c$	
$u'\cdot u^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$	من أجل كل $x\in I$: $u(x)\neq 0$
$\frac{\mu'}{\mu^n}(n\geq 2;$ $n\in\mathbb{N})$	$\frac{-1}{(n-1)\mu^{n-1}}+c$	من أجل كل $x\in I$: $\mu(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	من أجل كل $x\in I$: $u(x)>0$

المعادلات التفاضلية

تعاريف: معادلة تفاضلية هي معادلة

1) المجهول فيها دالة غالبا ما نرمز إليها بالرمز y، z أو حرف آخر

2) تظهر فيها بعض مشتقات y (المشتقة الأولى y' أو مشتقة من رتبة أكبر y''....)

3) نسمي حلا للمعادلة التفاضلية (E) في مجال I كل دالة φ تحقق (E) في I

المعادلات التفاضلية من الشكل:

$y' = f(x)$:

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكانت F دالة أصلية لها على I فإن حلول المعادلة التفاضلية: $y' = f(x)$ هي الدوال y حيث $y = F(x)+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

المعادلات التفاضلية من الشكل:

$y'' = f(x)$:

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكانت F دالة أصلية لها على I وكانت G دالة أصلية للدالة F على I فإن حلول المعادلة التفاضلية: $y'' = f(x)$ هي الدوال y حيث $y = G(x) + c_1x + c_2$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

المعادلات التفاضلية من الشكل:

$y'' = -\omega^2 y$:

مبرهنة: إذا كان ω عددا حقيقيا غير معدوما فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' = -\omega^2 y$ هي الدوال y حيث $y_1 = c_1 cos\, \omega x + c_2 sin\, \omega x$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

المحور السادس

الحساب التكاملي

تعريف 1: لتكن f دالة مستمرة وموجبة على المجال $[a,b]$ و (ϑ) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$

وحدة المساحة هي مساحة المستطيل $OIKJ$

التكامل المحدود من a إلى b للدالة f نرمز له بـ $\int_a^b f(x)dx$ هو مساحة الحيز تحت المنحنى (ϑ)

تعريف 2: لتكن f دالة مستمرة وسالبة على المجال $[a,b]$ و (ϑ) تمثيلها البياني في معلم متعامد. العدد $\int_a^b f(x)dx$ هو معاكس مساحة الحيز (D) المحدد بمحور الفواصل والمنحنى (ϑ) والمستقيمات ذا المعادلة $x=a$ أو $x=b$

القيمة المتوسطة:

تعريف 3: لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a,b]$ مع $a<b$

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a,b]$ هو العدد الحقيقي

$$u=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$$

التكامل والدالة الأصلية

1) حساب تكامل بواسطة دالة أصلية:

مبرهنة: لتكن f دالة مستمرة على مجال I من أجل كل الأعداد الحقيقية a و b من المجال I. F هي دالة أصلية للدالة f على I

لدينا: $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

2) دالة معرفة بتكامل:

مبرهنة: لتكن الدالة f مستمرة على مجال I وليكن x عدد حقيقي من I الدالة F المعرفة على I بـ: $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ هي الدالة الأصلية الوحيدة لـ f على I التي تنعدم عند a

نتيجة: الدالة F قابلة للاشتقاق على I و $F'=f$

خواص التكامل: لتكن f دالة مستمرة على مجال I، a و b عددين حقيقيين من I لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

1) علاقة شال: من أجل كل أعداد حقيقية a، b و c من المجال I

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$$

2) خطية التكامل: لتكن f و g دالتان مستمرتان على المجال I من أجل كل عدد حقيقي λ ومن أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا:

$$\int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx$$

3) إيجابية التكامل: لتكن f دالة مستمرة على المجال I، a و b عددان حقيقيان من I

إذا كان $a\le b$ و $f\ge 0$ على المجال $[a,b]$

فإن $\int_a^b f(x)dx\ge 0$

ملاحظات:

1) الشروط $a\le b$ و $f\ge 0$ ضرورية لكي $\int_a^b f(x)dx\ge 0$

2) هذه المبرهنة تسمح لنا بتحديد مباشرة إشارة تكامل بدون حسابه.

4) التكامل والترتيب: ليكن f و g دالتان مستمرتان على مجال I، a و b عددان حقيقيان من المجال I

إذا كان $a\le b$ و $f\le g$ على المجال $[a,b]$

فإن $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

ملاحظة: هذه المبرهنة تساعدنا عمليا لمقارنة تكاملين بدون حسابهما

5) حصر القيمة المتوسطة:

مبرهنة: لتكن f دالة مستمرة على مجال I وليكن m و M عددين حقيقيين

a و b عددين حقيقيين من I بحيث: $a\le b$

إذا كان من أجل كل $x\in[a,b]$:

$m\le f(x)\le M$ فإن:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

ملاحظة: هذه المبرهنة تسمح لنا بحصر تكامل بدون حسابه.

التكامل بالتجزئة:

مبرهنة: لتكن u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال بحيث u' و v' مستمرتان على المجال I فإن من أجل كل عددين حقيقيين a و b من المجال I

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt=[u(t)v(t)]_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)dt$$

ملاحظة: التكامل بالتجزئة يسمح لنا بتعويض حساب التكامل لدالة التي لا نعلم لها دالة أصلية بتكامل بسيط يمكننا حسابه.

المحور السابع

مجموعة الأعداد المركبة

Hard_equation

الشكل الجبري لعدد مركب:

المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(o,\vec{u},\vec{v})$

تعريف 1: لتكن النقطة M للمستوي ذات الإحداثيات (x,y) لاحقة النقطة M هو العدد المركب $\mathbb{Z}=x+iy$ حيث i هو عدد تخيلي بحيث $i^2=-1$ مجموعة الأعداد المركبة نرمز لها بـ $\mathbb{C}$

الكتابة $(x+iy)$ تسمى العبارة الجبرية للعدد المركب $\mathbb{Z}$

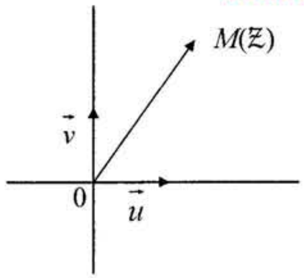
العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب $\mathbb{Z}$ ونرمز بـ: $x=\Re e(\mathbb{Z})$

والعدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد المركب $\mathbb{Z}$ ويرمز له بـ: $y=Im(\mathbb{Z})$

تعريف 2: عددان مركبان متساويان معناه لهما نفس الجزء الحقيقي ونفس الجزء التخيلي أي $\mathbb{Z}=x+iy$ و $\mathbb{Z}'=x'+iy'$

$\mathbb{Z}=\mathbb{Z}'$ معناه $\begin{cases} x'=x \\ \text{و} \\ y'=y \end{cases}$

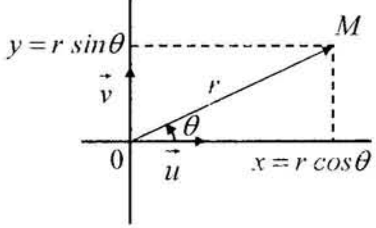
أي $\begin{cases} \Re e(\mathbb{Z}')=\Re e(\mathbb{Z}) \\ \text{و} \\ Im(\mathbb{Z}')=Im(\mathbb{Z}) \end{cases}$



الشكل المثلثي لعدد مركب:

تعريف: ليكن $\mathbb{Z}$ عددا مركبا غير معدوم و M النقطة التي لاحقتها $\mathbb{Z}$ ليكن (r,θ) الثنائية القطبية للنقطة M ومنه r يسمى طويلة العدد المركب $\mathbb{Z}$ ونرمز له بـ: $r=|\mathbb{Z}|$ و θ يسمى عمدة للعدد المركب $\mathbb{Z}$ ونرمز له بـ: $\theta=Arg(\mathbb{Z})$

الكتابة $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ تسمى الشكل المثلثي للعدد المركب $\mathbb{Z}$



العدد المركب المرافق:

تعريف: ليكن $\mathbb{Z}$ عدد مركب حيث $\mathbb{Z}=x+iy$ ، مع $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

نسمي مرافق العدد المركب $\mathbb{Z}$ العدد المركب $\overline{\mathbb{Z}}$ بحيث $\overline{\mathbb{Z}}=x-iy$

خواص:

1) النقط M ذات اللاحقة $\mathbb{Z}$ و M' ذات اللاحقة $\overline{\mathbb{Z}}$ متناظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل.

2) $\mathbb{Z}\in\mathbb{R}$ معناه $\mathbb{Z}=\overline{\mathbb{Z}}$

3) $\mathbb{Z}$ تخيلي صرف معناه $\mathbb{Z}=-\overline{\mathbb{Z}}$

4) $\overline{(\overline{\mathbb{Z}})}=\mathbb{Z}$

5) $\mathbb{Z}\overline{\mathbb{Z}}=x^2+y^2=r^2$

العمليات في $\mathbb{C}$:

الجمع:

تعريف: ليكن $\mathbb{Z}=x+iy$ و $\mathbb{Z}'=x'+iy'$ فإن $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}'=(x+x')+i(y+y')$

خاصية: كل عدد مركب $\mathbb{Z}=x+iy$ ، $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ يقبل معاكس $(-\mathbb{Z})=-x-iy$

نتيجة: الشعاع $\overrightarrow{AB}$ لاحقته $(\mathbb{Z}_B-\mathbb{Z}_A)$

خاصية: $\overline{\mathbb{Z}+\mathbb{Z}'}=\overline{\mathbb{Z}}+\overline{\mathbb{Z}'}$

الضرب:

تعريف: ليكن $\mathbb{Z}=(x+iy)$ ، $\mathbb{Z}'=x'+iy'$ فإن $\mathbb{Z}\mathbb{Z}'=(xx'-yy')+i(xy'+yx')$

خواص:

1) كل عدد مركب غير معدوم $\mathbb{Z}=x+iy$ يقبل مقلوب يرمز له بـ: $\frac{1}{\mathbb{Z}}=\frac{1}{x+iy}$ ومنه $\frac{1}{\mathbb{Z}}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$ ومنه $\frac{1}{\mathbb{Z}}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$

2) $\overline{\mathbb{Z}\mathbb{Z}'}=\overline{\mathbb{Z}}\times\overline{\mathbb{Z}'}$

3) من أجل كل عدد طبيعي $n\in\mathbb{N}$: $\overline{\mathbb{Z}^n}=(\overline{\mathbb{Z}})^n$

4) من أجل كل عدد مركب $\mathbb{Z}'$ غير معدوم: $\overline{\left(\frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}'}\right)}=\frac{\overline{\mathbb{Z}}}{\overline{\mathbb{Z}'}}$

5) $|\mathbb{Z}\mathbb{Z}'|=|\mathbb{Z}|\,|\mathbb{Z}'|$

6) $Arg(\mathbb{Z}\mathbb{Z}')=Arg\mathbb{Z}+Arg(\mathbb{Z}')+2k\pi$

7) $\left|\frac{1}{\mathbb{Z}}\right|=\frac{1}{|\mathbb{Z}|}$ مع $\mathbb{Z}\neq 0$

8) $Arg\left(\frac{1}{\mathbb{Z}}\right)=-Arg\mathbb{Z}+2k\pi$

9) $\left|\frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}'}\right|=\frac{|\mathbb{Z}|}{|\mathbb{Z}'|}$ مع $\mathbb{Z}'\neq 0$

10) $Arg\left(\frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}'}\right)=Arg(\mathbb{Z})-Arg(\mathbb{Z}')+2k\pi$

11) من أجل كل عدد طبيعي n: $|\mathbb{Z}^n|=|\mathbb{Z}|^n$

12) من أجل كل عدد طبيعي n ومن أجل كل عدد مركب $\mathbb{Z}$ غير معدوم: $Arg(\mathbb{Z}^n)=nArg(\mathbb{Z})+2k\pi$

13) **قانون موافر:** من أجل كل عدد حقيقي θ:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

الشكل الأسي لعدد مركب:

تعريف: من أجل كل عدد حقيقي θ نرمز:

$$e^{i\theta} = cos\theta + i\, sin\theta$$

نتيجة: كل عدد مركب $\mathbb{Z}$ غير معدوم طويلته r وعمدة له θ يكتب على الشكل

$$\mathbb{Z} = r\, e^{i\theta}$$

هذه الكتابة تسمى الشكل الأسي للعدد المركب $\mathbb{Z}$

قوانين أولر: "***Formule D'EULER***" من أجل كل عدد حقيقي θ لدينا:

$$sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \text{ و } cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

قوانين أولر تسمح لنا بتخطيط كثيرات الحدود المثلثية.

المعادلات من الدرجة الثانية ذات معاملات حقيقية:

لتكن المعادلة $a\mathbb{Z}^2 + b\mathbb{Z}^2 + c = 0$ ذات المجهول $\mathbb{Z}$ و a ، b ، c أعداد حقيقية بحيث $a \neq 0$

نسمي مميز المعادلة العدد الحقيقي

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- إذا كان $\Delta > 0$ المعادلة تقبل حلين حقيقيين

$$\mathbb{Z}_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ، } \mathbb{Z}_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- إذا كان $\Delta = 0$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا حقيقيا $\mathbb{Z} = \frac{-b}{2a}$
- إذا كان $\Delta < 0$ المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين $\mathbb{Z}_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ،

$$\mathbb{Z}_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

الأعداد المركبة والتحويلات النقطية:

الانسحاب: الكتابة المركبة المرفقة للانسحاب الذي شعاعه $\vec{\mu}$ ذات اللاحقة b هي $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} + b$

التحاكي: ليكن k عدد حقيقي غير معدوم. الكتابة المركبة المرفقة للتحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k هي $\mathbb{Z}' - \omega = k(\mathbb{Z} - \omega)$ حيث ω هي لاحقة النقطة Ω

حالة خاصة: في حالة $\Omega = 0$: $\mathbb{Z}' = k\mathbb{Z}$

الدوران: الكتابة المركبة للدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ هي $\mathbb{Z}' - \omega = e^{i\theta}(\mathbb{Z} - \omega)$ حيث ω لاحقة النقطة Ω

حالة خاصة: في حالة $\Omega = 0$: $\mathbb{Z}' = e^{i\theta}\mathbb{Z}$

المتتاليات العددية

Hard_equation

الاستدلال بالتراجع (البرهان بالتراجع):

(بديهية التراجع (*Axiome* (*récurrence*

لتكن $P(n)$ خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n

- إذا كان $P(0)$ صحيحة
- ومن أجل كل عدد طبيعي n: كون $P(n)$ صحيحة تستلزم $P(n+1)$ صحيحة فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

ملاحظات:

- من فرض "$P(n)$ صحيحة" تستلزم $P(n+1)$ صحيحة نقول: $P(n)$ وراثية
- لبرهنة بالتراجع على خاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 مع $\left(n_0 \in \mathbb{N}^*\right)$ نتحقق من صحة $P(n_0)$ ونبرهن أن الخاصية $P(n)$ وراثية أي نفرض $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ ونبرهن صحة $P(n+1)$
- البرهان بالتراجع يشمل مبدأين: مبدأ الابتدائية ومبدأ الوراثية

مفهوم متتالية: متتالية عددية هي دالة من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$

ترميز: صورة عدد طبيعي ، نرمز له بـ: u_n، نقول أن العدد الحـ ـو الحد العام للمتتالية u أو الحد الذ، دليله n المتتالية u نرمز لها أيضا بـ (u_n) أو $\left(u_n\right)_{n\geq n_0}$

تعريف متتالية: متتالية يمكن أن تكون معرفة

- بمعرفة حدها العام المعبر بدلالة n
- بمعرفة حدها الأول وعلاقة تراجعية

المتتاليات الحسابية – المتتاليات الهندسية

المتتاليات الحسابية:

المتتالية (u_n) متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r بحيث من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

العدد الحقيقي r يسمى أساس المتتالية

عبارة الحد العام بدلالة n:

من أجل كل عددين طبيعيين n و p لدينا:

$$u_n = u_p + (n-p)\,r$$

وعلى الخصوص: $u_n = u_0 + n\,r$

نهاية متتالية حسابية:

- إذا كان $r > 0$ فإن $+\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- إذا كان $r < 0$ فإن $-\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

مجموع لـ $(n+1)$ الحدود الأولى لمتتالية حسابية: ليكن $n\in\mathbb{N}^*$:

$S_n=u_0+u_1+.......+u_n$ فإن

$$S_n=\left(\frac{n+1}{2}\right)(u_0+u_n)$$

نستنتج من هذه العلاقة مجموع n الأعداد الطبيعية الأولى أي:

$$1+2+........+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

المتتاليات الهندسية:

المتتالية (u_n) هندسية إذا وفقط إذا يوجد عدد حقيقي q بحيث من أجل كل عدد طبيعي n:

$u_{n+1}=q\,u_n$

العدد الحقيقي q يسمى أساس المتتالية

عبارة الحد العام بدلالة n:

من أجل كل عددين طبيعيين n و p لدينا:

$u_n=u_p\times q^{n-p}$

على الخصوص: $u_n=u_0\times q^n$

نهاية متتالية هندسية:

* إذا كان $|q|<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$
* إذا كان $q>1$ و $u_0>0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$
* إذا كان $q>1$ و $u_0<0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$
* إذا كان $q<-1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ غير موجودة

مجموع لـ $(n+1)$ الحدود الأولى لمتتالية هندسية: ليكن $n\in\mathbb{N}^*$:

$S_n=u_0+u_1+.......+u_n$

* إذا كان $q=1$: $S_n=(n+1)u_0$
* إذا كان $q\neq1$: $S_n=u_0\times\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

نستنتج من هذه العلاقة أنه إذا كان $q\neq1$:

$$1+q+q^2+.......+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

المتتاليات الرتيبة -المحدودة من الأعلى -المحدودة من الأسفل

تعريف 1:

* متتالية (u_n) متزايدة معناه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}\geq u_n$
* متتالية (u_n) متناقصة معناه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}\leq u_n$

نقول عن متتالية أنها رتيبة إذا وفقط إذا كانت إما متزايدة أو إما متناقصة

تعريف 2:

* متتالية (u_n) محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي M بحيث من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\leq M$
* متتالية (u_n) محدودة من الأسفل إذا وجد عدد حقيقي m بحيث من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\geq m$
* متتالية (u_n) محدودة إذا كانت محدودة من الأسفل ومن الأعلى

ملاحظات:

* يجب أن يكونا الأعداد الحقيقية M و m مستقلان عن n
* إذا كان M عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) ومنه كل عدد أكبر من M هو أيضا عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n)
* إذا كان m عنصر حاد من الأسفل للمتتالية (u_n) ومنه كل عدد أصغر من m هو أيضا عنصر حاد من الأسفل للمتتالية (u_n)
* كل متتالية متزايدة محدودة من الأسفل بحدها الأول
* كل متتالية متناقصة محدودة من الأعلى بحدها الأول
* يوجد متتاليات غير محدودة من الأعلى ولا من الأسفل على سبيل المثال: $u_n=(-1)^n(n+1)$

نهاية متتالية

تعريف 1: لتكن (u_n) متتالية عددية و ℓ عدد حقيقي نقول أن المتتالية (u_n) تتقارب نحو ℓ معناه كل مجال مفتوح يشمل ℓ يحوي كل حدود المتتالية إبتداءا من رتبة معينة ونكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$

إذا كانت المتتالية (u_n) تتقارب نحو ℓ نقول أنها متقاربة فعكس ذلك نقول أنها متباعدة

ملاحظة: قول أن متتالية متباعدة معناه إما ليس لها نهاية مثال: $u_n=(-1)^n$ (النهاية غير موجودة)

أو نهايتها لما $n\to+\infty$ هي إما $+\infty$ أو $-\infty$ مثال: $u_n=3^n$

وحدانية النهاية: إذا كانت متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة.

مبرهنة: كل متتالية متقاربة هي متتالية محدودة.

عكس هذه المبرهنة غير صحيح: يوجد متتاليات محدودة وغير متقاربة مثال: $u_n=(-1)^n$

تعريف 2: لتكن (u_n) متتالية عددية نقول أن المتتالية (u_n) تؤول إلى $+\infty$ معناه كل مجال من الشكل $]A,+\infty[$، A عدد حقيقي يشمل كل حدود المتتالية إبتداءا من رتبة معينة

تعريف 3: نقول أن المتتالية (u_n) تؤول إلى $-\infty$ معناه كل مجال من الشكل $]-\infty,A[$، A عدد حقيقي يشمل كل حدود المتتالية إبتداءا من رتبة معينة

مبرهنة: كل متتالية متزايدة غير محدودة من الأعلى تؤول إلى $+\infty$

وكل متتالية متناقصة غير محدودة من الأسفل تؤول إلى $-\infty$

العمليات على النهايات : هي نفسها العمليات على

النهايات والترتيب: لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتان حقيقيتان إذا كان:

- ❖ (u_n) متقاربة نحو ℓ
- ❖ (v_n) متقاربة نحو ℓ'
- ❖ وابتداء من رتبة معينة $u_n \le v_n$ فإن $\ell \le \ell'$
- ❖ إذا كان $u_n \le a$ $(a \in \mathbb{R})$ و (u_n) متقاربة نحو ℓ فإن $\ell \le a$
- ❖ إذا كان (u_n) متتالية موجبة وتتقارب نحو ℓ فإن $\ell \ge 0$
- ❖ إذا كانت المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة نحو ℓ فإن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_n \le \ell$
- ❖ إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة ومتقاربة نحو ℓ فإن من اجل كل عدد طبيعي n $u_n \ge \ell$
- ❖ لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين بحيث ابتداء من رتبة معينة $u_n \le v_n$
  - ❖إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
  - ❖إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

النهايات بالحصر: لتكن (u_n)، (v_n) و (w_n) ثلاثة متتاليات عددية نفرض أن (v_n) و (w_n) متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ وابتداء من رتبة معينة $w_n \le u_n \le v_n$ فإن المتتالية (u_n) متقاربة وتتقارب نحو ℓ

مبرهنة:

- ❖ كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى متقاربة
- ❖ كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل متقاربة

ملاحظة: هذه المبرهنة تسمح لنا بمعرفة تقارب أو عدم تقارب متتالية ولا تعطيا قيمة النهاية التي تتقارب لها

المتتاليتان المتجاورتان

متتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان معناه إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة و $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$

مبرهنة: إذا كانت المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان فإنهما متقاربتان ولهما نفس النهاية

ملاحظة:

- ❖ هذه المبرهنة تعطينا وجود النهاية المشتركة للمتتاليتان ولا تعطينا قيمة النهاية
- ❖ إذا كان المتتالية (u_n) متزايدة والمتتالية (v_n) متناقصة ونهايتهما المشتركة ℓ بحيث من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \le \ell \le v_n$

ملاحظة: إذا كان المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_{n+1} = f(u_n)$ وإذا كانت (u_n) متقاربة نحو ℓ والدالة f مستمرة عند ℓ فإن $f(\ell) = \ell$

ومنه إذا كانت (u_n) متقاربة نحو ℓ فإن ℓ هي حل المعادلة $f(x) = x$

وبالتالي هي فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C) الممثل للدالة f مع المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x$

 ☆ الفهرس ☆

المحور التاسع

الجداء السلّمي في الفضاء

تذكير حول الجداء السلمي في المستوى

تعريف: ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين من المستوى (P) الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في المستوى (P) ونرمز له بـ: $\vec{u}\cdot\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

ونكتب $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

ملاحظة:

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ إذا وفقط إذا $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ أو $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان
- $\vec{u}\cdot\vec{u}$ نرمز له بـ: $\vec{u}^2$ ويسمى المربع السلمي لـ $\vec{u}$ ولدينا $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$

خواص: ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث أشعة من المستوى (P) و k عدد حقيقي

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot(k\vec{v})$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ للمستوى (P) إذا كان للأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مركبات على الترتيب (x,y) و (x',y') فإن:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$$

نتيجة: $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

بعد نقطة عن مستقيم

تعريف: ليكن (D) مستقيم شعاع توجيه له $\vec{u}$ نسمي شعاعا ناظمي لـ (D) كل شعاع غير معدوم عمودي على $\vec{u}$

خواص:

1) لتكن A نقطة من المستوى و $\vec{n}$ شعاع غير معدوم. مجموعة النقط M من المستوى بحيث $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ هي المستقيم المار من A وشعاع ناظمي له $\vec{n}$

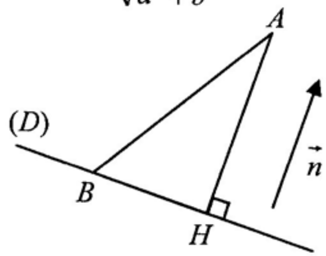
2) في معلم متعامد ومتجانس المستقيم (D) ذي المعادلة: $ax+by+c=0$ مع $(a,b)\neq(0,0)$ يقبل شعاع ناظمي $\vec{n}$ حيث $\vec{n}(a,b)$

3) لتكن A نقطة من المستوى (P) و (D) مستقيم من المستوى ولتكن B نقطة من (D) و $\vec{n}$ شعاع ناظمي لـ (D)

بعد النقطة A إلى المستقيم (D) هي:

$$AH = \frac{\left|\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$$

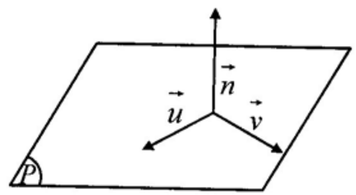
4) في معلم متعامد ومتجانس إذا كان $A(x_A,y_A)$ و (D) معادلة له هي: $ax+by+c=0$ فإن بعد النقطة A إلى المستقيم (D) هي: $AH = \frac{\left|ax_A+by_A+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



الجداء السلمي في الفضاء

المستويات المتعامدة:

تعريف: كل شعاع غير معدوم عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا لمستو (P) هو شعاع ناظمي للمستوى (P)



خواص:

❖ ليكن (P) مستو و A نقطة من (P) و $\vec{n}$ شعاع ناظمي لـ (P) فإن المستوى (P) هو مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

تعريف: ليكن (P) و (P') مستويان شعاعا ناظميهما على الترتيب $\vec{n}$ و $\vec{n'}$

(P) و (P') متعامدان معناه $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ متعامدان

مثال: ليكن A ، B ، C ثلاث نقط متمايزة من الفضاء. ما هي مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}$ معناه

$\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AM}=0$ معناه

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

ومنه مجموعة النقط M هو المستوى المار من A وشعاع ناظمي له $\overrightarrow{CB}$

الاسقاط العمودي:

تعريف 1: نسمي المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم (D) النقطة M' تقاطع المستقيم (D) والمستوى (P) الذي يشمل M وعمودي على (D)

تعريف 2: نسمي المسقط العمودي للنقطة M على المستوى (P) النقطة M' تقاطع المستوى (P) والمستقيم (D) المار من M وعمودي على المستوى (P)

تعريف الجداء السلمي:

تعريف: الجداء السلمي في الفضاء للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في كل مستو يشمل هذين الشعاعين

عبارة الجداء السلمي: في معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ للفضاء الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}(x,y,z)$ ، $\vec{v}(x',y',z')$ هو: $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

خواص الجداء السلمي: ليكن $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ ثلاث أشعة من الفضاء و k عدد حقيقي

❖ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

❖ $\left(k\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right)=k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$

❖ $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)+\left(\vec{u}\cdot\vec{w}\right)$

بعد نقطة عن مستو

تعريف:

❖ ليكن (P) مستو و M من الفضاء نسمي بعد النقطة M عن المستوى (P) المسافة MH للنقطة M عن مسقطها العمودي H على المستوى (P)

❖ ليكن (P) مستو شعاع ناظمه $\vec{n}$ و A نقطة من المستوى (P). المسافة للنقطة M من الفضاء عن المستوى (P) هي: $d=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$

❖ الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ وليكن (P) المستوى ذي المعادلة: $ax+by+cz+d=0$ ؛ $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

بعد النقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ عن المستوى (P) هي: $d=\frac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

طرائق

لبرهنة مستقيم عمودي على مستوي:

❖ إذا كان مستقيم عمودي على مستقيمين متقاطعين من نفس المستوى فإنه عمودي على هذا المستوى

❖ يمكن استعمال طريقة شعاعية إذا كان الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

- إما أن نبرهن أن شعاع توجيه المستقيم عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا عن المستوى (حساب الجداء السلمي)
- إما أن نبرهن أن شعاع توجيه المستقيم مرتبط خطيا مع شعاع ناظمي للمستوي

لبرهنة تعامد مستويان:

مستويان متعامدان إذا وفقط إذا أحدهما يحوي مستقيم عمودي على الآخر ولهذا نبرهن أن مستويان (P) و (P') شعاعان ناظميهما على الترتيب $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ متعامدان معناه $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ متعامدان

المحور العاشر

المستقيمات والمستويات في الفضاء

1. التمييز المرجحي

خاصية 1:

❖ المستقيم (AB) هو مجموعة مراجح النقط A و B

❖ القطعة المستقيم $[AB]$ هي مجموعة مراجح النقط A و B المرفقة بالمعاملات من نفس الإشارة

ملاحظة: هذه الخاصية تسمح لنا ببرهنة استقامية ثلاث نقط (أي ثلاث نقط في استقامة واحدة) بإثبات أحد النقط هو مرجح النقطتين الآخرين

خاصية 2: المستوي (ABC) هو مجموعة مراجح النقط A، B، C. الحيز داخل المثلث الأضلاع منتمية هي مجموعة المراجح للنقط A، B، C مرفقة بمعاملات لهم نفس الإشارة

ملاحظة: هذه الخاصية تسمح لنا ببرهنة أن أربع نقط من نفس المستوي بإثبات أحد النقط هو مرجح الثلاث النقط المتبقية

2. التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفضاء

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ولتكن النقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ و $\vec{\mu}(a,b,c)$ مع $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

جملة معادلات وسيطية للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة A وشعاع توجيه له هي:

$$\begin{cases} x=x_A+ta\\ y=y_A+tb\\ z=z_A+tc\end{cases}$$ مع $(t\in\mathbb{R})$

ملاحظة: هذا التمثيل ليس وحيد

المعادلة الديكارتية لمستو

تعريف: كل شعاع غير معدوم عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من مستو (P) هو شعاع عمودي على (P)

نتيجة: إذا كان $\vec{n}$ شعاعا ناظميا (عموديا) على (P) فإن $\vec{n}$ عمودي على كل شعاع من المستوى (P)

وبالتالي كل مستقيم موجّه بالشعاع $\vec{n}$ هو مستقيم عمودي على (P)

تعيين مستو: $\vec{n}$ شعاع غير معدوم M نقطة

من الفضاء

مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ هي المستوى (P) الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له

خاصية: كل مستو $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظمي له يقبل معادلة ديكارتية من الشكل: $ax+by+cz+d=0$ حيث d عدد حقيقي

حالات خاصة:

❖ معادلة ديكارتية للمستوي $(o,\vec{i},\vec{j})$ هي $z=0$

❖ معادلة ديكارتية للمستوي $(o,\vec{j},\vec{k})$ هي $x=0$

❖ معادلة ديكارتية للمستوي $(o,\vec{i},\vec{k})$ هي $y=0$

❖ (P) و (P') مستويان $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ ناظميان لهما على الترتيب

(P) يوازي (P') معناه يوجد عدد حقيقي k حيث $\vec{n}=k\vec{n'}$

(P) عمودي على (P') معناه $\vec{n}\cdot\vec{n'}=0$

تقاطع مستقيمات ومستويات

تقاطع مستويين:

ليكن (P) و (P') مستويان ناظميهما على الترتيب $\vec{n}$ و $\vec{n'}$

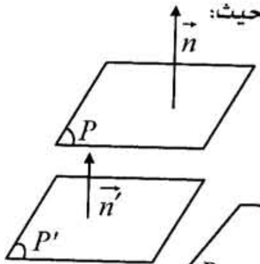
❖ إذا كان $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ مرتبطين خطيا فإن (P) و (P') متوازيان تماما. ليس لهم أي نقطة مشتركة

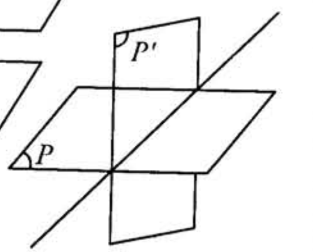
❖ إذا كان $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطين خطيا فإن (P) و (P') متقاطعان، تقاطعهما هو مستقيم

ليكن (P) و (P') المستويان الذي معادلتهما على الترتيب: $ax+by+cz+d=0$ و $a'x+b'y+c'z+d'=0$

المستويان (P) و (P') متقاطعان إذا وفقط إذا (a,b,c) و (a',b',c') غير متناسبين أي لا يوجد عدد حقيقي k بحيث:

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=k$$





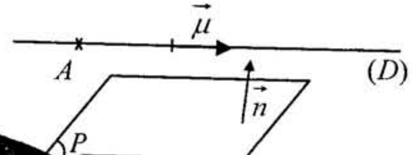
تقاطع مستقيم ومستو:

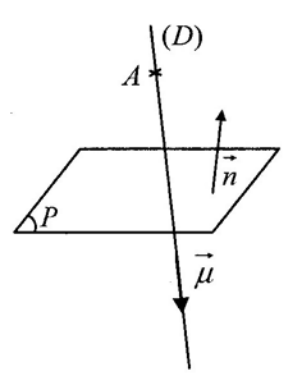
ليكن (P) مستوى شعاعه الناظمي $\vec{n}$ و (D) مستقيم يشمل A وشعاع توجيه $\vec{\mu}$

❖ إذا كان $\vec{\mu}$ و $\vec{n}$ متعامدان فإن (D) و (P) متوازيان

- إذا كان $A\in(P)$ فإن $(D)\subset(P)$
- إذا كان $A\notin(P)$ فإن (D) و (P) ليس لهم أي نقطة مشتركة

❖ إذا كان $\vec{\mu}$ و $\vec{n}$ غير متعامدان فإن المستقيم (D) والمستوى (P) متقاطعان





تقاطع ثلاث مستويات:

ليكن (P_1) ، (P_2) ، (P_3) ثلاث مستويات ذات معادلات على الترتيب:

$$(P_1): a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$(P_2): a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$
$$(P_3): a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$$

نسمي S جملة المعادلات الثلاث اعلاه

حلول الجملة S	تقاطع (P_1)، (P_2)، (P_3)
الجملة S لا تقبل حلول في $\mathbb{R}^3$	أي نقطة مشتركة
الجملة S تقبل حلا وحيدا (x_A, y_A, z_A)	نقطة مشتركة واحدة النقطة A
الجملة S تقبل كحلول كل الثلاثيات حلول للمعادلتين التي تعرّف (Δ)	مستقيم (Δ)
الجملة S تقبل كحلول كل الثلاثيات حلول إحدى المعادلات	(P_1) أو (P_2) أو (P_3)

توجيهات

❖ المستقيم (D) الذي يشمل A وشعاع توجيه $\vec{\mu}$ يمكن تمييزه بثلاث كيفيات:

- **شعاعيا:** $\overrightarrow{AM}=k\vec{\mu};\ k\in\mathbb{R}$ معناه $M\in D_{(A,\vec{\mu})}$
- **تحليليا:** $M(x,y,z)$ نقطة من $D_{(A,\vec{\mu})}$ معناه $\begin{cases} x=x_A+ta \\ y=y_A+tb \\ z=z_A+tc \end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$ و $\vec{\mu}(a,b,c)$
- **تميز مرجحي:** $M\in(D)$ معناه M مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ حيث $B\in(D)$ و $\alpha+\beta\neq0$

❖ القطعة المستقيمة $[AB]$ يمكن تمييزها بكيفيتين:

- **شعاعيا:** $M\in[AB]$ معناه $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ مع $t\in[0,1]$
- **تميز مرجحي:** $M\in[AB]$ معناه M مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ مع $\alpha+\beta\neq0$ و α و β من نفس الإشارة

❖ المستوي (P) الذي يشمل A ، B ، C يمكن تمييزه بثلاث كيفيات:

- **شعاعيا:** $M\in(P)$ معناه $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{\mu}+\beta\vec{v}$ حيث $(A,\vec{\mu},\vec{v})$ معلما لـ (P)
- **تحليليا:** بمعادلة ديكارتية

$ax+by+cz+d=0$ حيث $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

- **تميز مرجحي:** $M\in(P)$ معناه M مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ حيث $\alpha+\beta+\gamma\neq0$

طرائق

دراسة الوضع النسبي لمستقيمين في الفضاء:

ليكن $D_1\left(A_1,\overrightarrow{u_1}\right)$ و $D_2\left(A_2,\overrightarrow{u_2}\right)$ مستقيمين من الفضاء بحيث D_1 يشمل A_1 وشعاع توجيه له هو $\overrightarrow{u_1}$ ، D_2 يشمل A_2 وشعاع توجيه له هو $\overrightarrow{u_2}$

❖ إذا كان $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ مرتبطين خطيا فإن D_1 و D_2 متوازيان

- إذا كان $A_1\in D_2$ فإن المستقيمين منطبقين
- إذا كان $A_1\notin D_2$ فإن المستقيمين متوازيان تماما

❖ إذا كان $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ غير مرتبطين خطيا فإن المستقيمان إما متقاطعان أو لا ينتميان إلى نفس المستوى

- إذا كان $\overrightarrow{u_1}$ ، $\overrightarrow{u_2}$ ، $\overrightarrow{A_1A_2}$ من نفس المستوى فإن D_1 و D_2 متقاطعان
- إذا كان $\overrightarrow{u_1}$ ، $\overrightarrow{u_2}$ ، $\overrightarrow{A_1A_2}$ ليسوا من نفس المستوى فإن D_1 و D_2 ليسوا من نفس المستوى

دراسة الوضعية النسبية لمستقيم ومستو:

ليكن $D\left(A,\vec{u}\right)$ مستقيم من الفضاء و (P) مستو شعاع ناظمي له $\vec{n}$ نحسب $\vec{u}\cdot\vec{n}$

❖ إذا كان $\vec{\mu}\cdot\vec{n}=0$ فإن $\vec{u}$ و $\vec{n}$ متعامدان ومنه (D) و (P) متوازيان

- إذا كان $A\in(P)$ فعندئذ $(D)\subset(P)$
- إذا كان $A\notin(P)$ ومنه (D) و (P) متوازيان تماما وليس لهما أي نقطة مشتركة

❖ إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{n}\neq0$ ومنه $\vec{u}$ و $\vec{n}$ ليسوا متعامدان ومنه (D) و (P) متقاطعان وتقاطعهما نقطة

دراسة الوضعية النسبية لمستويين:

ليكن (P) و (P') مستويان شعاعا ناظميهما $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ على الترتيب

- إذا كان $\vec{n}(a,b,c)$ و $\vec{n'}(a',b',c')$ مرتبطين خطيا أي $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$ فإن المستويان (P) و (P') متوازيان
- إذا كان $A\in(P)$ و $A\in(P')$ فإن (P) و (P') منطبقان أي $(P)=(P')$
- إذا كان $A\in(P)$ و $A\notin(P')$ فإن (P) و (P') متوازيان تماما وليس لهما نقطة مشتركة

❖ إذا كان $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطين خطيا فإن (P) و (P') متقاطعان وتقاطعهما مستقيم

استعمال المرجح

مسألة الاستقامية:

لكي نبرهن أن ثلاث نقط A، B، C على استقامة واحدة يكفي أن نبرهن أن أحد النقط الثلاث هو مرجح النقطتين الآخرين.

مسألة نقطة تقاطع:

لكي نبرهن أن ثلاث مستقيمات (AB)، (CD) و (EF) متقاطعة يكفي أن نبرهن على وجود نقطة G مرجح الثنائية (A,B) و (C,D) و (E,F)

مسألة النقط من نفس المستوي:

لكي نبرهن أن أربع نقط A، B، C، D من نفس المستوي يكفي أن نبرهن أن أحد النقط هو مرجح النقط الثلاث الأخرى

المحور الحادي عشر

التشابه المباشر

Hard_equation

I. عموميات

تعريف: نسمي تشابه للمستوي كل تحويل للمستوي الذي يحافظ على نسب المسافات من أجل كل نقط A ، B ، C ، D من المستوي بحيث $C \neq D$: $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$

- تحويل نقطي f للمستوي هو تشابه إذا وفقط إذا يوجد عدد حقيقي k موجب تماما بحيث من أجل كل نقط A و B صورهما على الترتيب A' و B' لدينا $A'B' = k\,AB$

العدد الحقيقي k يسمى نسبة التشابه

أمثلة:

- ❖ التحويل المطابق، الانسحاب، الدوران، التناظرات المحورية هم تشابهات ذات النسبة 1
- ❖ التحاكيات ذات النسبة k هي تشابهات ذات النسبة $|k|$

خواص:

1) تركيب تشابهيان ذات النسبة k و k' على الترتيب هو تشابه نسبته kk' (التركيب ليس تبديلي)

2) التحويل العكسي لتشابه نسبته k $(k > 0)$ هو تشابه نسبته $\frac{1}{k}$

3) كل تشابه لديه نقطتين صامدتين متمايزتين هو إما تحويل مطابق للمستوي أو تناظر محوري

التقايسات:

تعريف: نسمي تقايس كل تشابه نسبته 1

ملاحظة:

- ❖ تقايس هو تحويل نقطي يحافظ على المسافات
- ❖ تركيب تقايس وتحاكي الذي نسبته k هي تشابه نسبته $|k|$

مثال: انسحاب، دوران أو تناظر محوري هي تقايسات

تصنيف التشابهات

- ❖ تشابه يحافظ على الزوايا الهندسية

تعريف: تشابه مباشر هو تشابه الذي يحافظ على الزوايا الموجهة، تشابه غير مباشر هو تشابه الذي يحول زاوية موجهة إلى معاكستها

التشابه المباشر:

خاصية مميزة: تحويل S هو تشابه مباشر إذا

وفقط إذا كتابته المركبة هي $z' = az + b$ حيث a و b عددان مركبان و a عدد مركب غير معدوم. نسبة التشابه هو طويلة العدد المركب a، زاوية التشابه هي عمدة العدد المركب a

❖ كل تشابه للمستوي مباشر غير الانسحاب يقبل نقطة صامدة وحيدة تسمى مركز التشابه

مبرهنة: تشابه مباشر للمستوي الذي نسبته k وزاويته θ هو:

❖ إما انسحاب إذا كان $k = 1$ و $\theta = 0$

❖ إما تركيب في ترتيب كيفي لدوران مركزه Ω وزاويته θ وتحاكي مركزه Ω ونسبته k

يقبل عندئذ كتابة مركبة من الشكل: $z' - \omega = a(z - \omega)$ حيث ω لاحقة النقطة Ω و $|a| = k$ و $Arg(a) = \theta + 2k\pi$

❖ ليكن A، B، A'، B' أربع نقط من المستوي بحيث: $A \neq B$ و $A' \neq B'$

يوجد تشابه وحيد يحول A إلى A' و B إلى B' نسبته $\frac{A'B'}{AB}$ وزاويته $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$

التشابه الغير المباشر:

❖ تحويل نقطي هو تشابه غير مباشر للمستوي إذا وفقط إذا كتابته المركبة من الشكل $z' = a\bar{z} + b$ حيث a و b عددان مركبان و a عدد مركب غير معدوم نسبته هي $|a|$

تأثير التشابه على الأشكال الهندسية: كل تشابه الذي نسبته k

❖ يضرب المسافات في العدد الحقيقي k والمساحات في k^2

❖ يحافظ على الزوايا الهندسية، التوازي، التعامد، المنتصفات، الاستقامية، التقاطع، المرجح

❖ يحول مستقيم إلى مستقيم، قطعة مستقيمة إلى قطعة مستقيمة

❖ يحول دائرة ϑ ذات المركز I ونصف القطر r إلى دائرة ϑ' ذات المركز I' حيث $I' = S(I)$ ونصف القطر r' حيث $r' = k\,r$

الكتابة المركبة لـ S: $z' = az + b$ مع $a \neq 0$	
a غير حقيقي	
$\lvert a\rvert \neq 1$	$\lvert a\rvert = 1$
S هو التشابه المباشر للمستوي نسبته $k = \lvert a\rvert$ وزاويته θ حيث $\theta = Arg(a)$ ومركزه Ω ذات اللاحقة ω حيث: $\omega = a\omega + b$	S هو الدوران الذي زاويته θ حيث: $\theta = Arg(a)$ ومركزه Ω ذات اللاحقة ω حيث: $\omega = a\omega + b$

الكتابة المركبة لـ S: $z' = az + b$ مع $a \neq 0$	
a حقيقي	
$a \neq 1$	$a = 1$
S هو التحاكي الذي نسبته a ومركزه Ω ذات اللاحقة ω حيث: $\omega = a\omega + b$	❖ S هو الانسحاب الذي شعاعه $\vec{\mu}$ لاحقته b إذا كان $b \neq 0$ ❖ إذا كان $b = 0$: S هو التحويل المطابق

تركيب تشابهيان مباشرين:

تركيب تشابهيان مباشرين للمستوي ذات النسب k و k' والزوايا θ و θ' على الترتيب هو تشابه مباشر للمستوي نسبته kk' وزاويته $(\theta + \theta')$

لتعيين المركز يمكن استعمال العبارات المركبة

حالات خاصة:

تركيب إنسحابين:

❖ $t_{\vec{\mu}} o\, t_{\vec{v}} = t_{\vec{\mu}+\vec{v}} = t_{\vec{v}} o\, t_{\vec{\mu}}$

❖ $r(\Omega,\theta) o\, r(\Omega,\theta') = r(\Omega,\theta') o\, r(\Omega,\theta) = r(\Omega,\theta+\theta')$

❖ $h(\Omega,k) o\, h(\Omega,k') = h(\Omega,k') o\, h(\Omega,k) = h(\Omega,kk')$

باستثناء الحالات الخاصة فالتركيب ليس بعملية تبديلية.

المحور الثاني عشر

الاحتمالات الشرطية

Hard_equation

العد (القوائم – الترتيبات - التبديلات)

1. قوائم عناصر مجموعة منتهية

تعريف: E مجموعة منتهية ذات n عنصرا $(n \geq 1)$ و p عدد طبيعي $(p \geq 1)$

نسمي قائمة ذات p عنصرا من E كل متتالية مرتبة من p عنصرا من عناصر E

إذا أردنا أن تكون هذه العناصر المرتبة متمايزة مثنى مثنى عندئذ لا يمكن للقائمة أن تحتوي أكثر من n عنصرا وهذا ما يقتضي أن يكون $n \geq p \geq 1$

❖ من أجل كل عدد طبيعي p $(p \geq 1)$ عدد قوائم E ذات p عنصرا يساوي n^p بينما يكون عدد قوائم ذات p عنصرا المتمايزة العناصر مثنى مثنى هو $n(n-1)(n-2).....(n-p+1)$ هذا الجداء يحوي p عاملاً

ملاحظة: نسمي القائمة التي عناصرها متمايزة مثنى مثنى بترتيبة ويرمز لعدد ترتيبات p عنصرا من بين n عنصرا بالرمز A_n^p ونكتب:

$$A_n^p = n(n-1)(n-2).....(n-p+1)$$

تعريف: ترتيبة ذات n عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا تسمى تبديلية ذات n عنصرا

عدد التبديلات إذن هو:

$n(n-1)(n-2)\times.....\times 2\times 1$ ويرمز له بالرمز $n!$ ويقرأ مفكوك n أو (n عاملي)

ونكتب: $A_n^n = n!$

ملاحظة: يمكن كتابة عدد الترتيبات ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا بالشكل

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ أي } \frac{n!}{(n-p)!}$$

التوفيقات – دستور ثنائي الحد

1) تعريف: E مجموعة منتهية ذات n عنصرا $(n \geq 1)$ و p عدد طبيعي حيث $(n \geq p \geq 0)$

نسمي توفيقة ذات p عنصرا من عناصر E كل جزء من E ذي p عنصرا من عناصر E

نرمز لعدد التوفيقات ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا بالرمز C_n^p أو الرمز $\binom{p}{n}$

نلاحظ أن: $C_n^1 = n$ أي أن عدد الأجزاء التي تحوي عنصرا واحدا من مجموعة ذات n عنصرا هو n

بينما $1 = C_n^n$) ومنه يوجد جزء واحد يحوي كل العناصر وهو المجموعة نفسها وكذلك يوجد واحد الذي لا يحوي أي عنصر هو الجزء الخالي أي $C_n^0 = 1$

مبرهنة: من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $n \geq p \geq 0$

$$C_n^p = \frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

خواص:

1) من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $n \geq p \geq 0$ لدينا $C_n^p = C_n^{n-p}$

2) من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $n \geq p \geq 0$ لدينا $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

مثلث باسكال (TRIANGLE de PASCAL)

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1	$C_p^n = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$			
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

دستور ثنائي الحد:

a و b عددان طبيعيان، n عدد طبيعي $(n \geq 1)$ لدينا:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

$$= C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

ملاحظة:

❖ معاملات النشر في ثنائي الحد نعطي لجدول باسكال

❖ نسمي أيضا ثنائي الحد لنيوتن (*Binôme de NEWTON*)

نمذجة تجربة عشوائية:

عندما يكون عدد مخارج تجربة عشوائية منتهيا. نعرف على مجموعة المخارج $E = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$ قانون احتمال ودلك باعطاء متتالية أعداد $(P_1, P_2, ..., P_r)$ تحقق: $\sum_{i=1}^{r} P_i = 1$ و $P_i \geq 0$ من اجل كل $1 \leq i \leq r$

يكون النموذج مناسبا إلا في حالة اقتراب التكرارات الإحصائية من الأعداد P_i عندما يكون عدد التجارب أكبر

- **الحدس يقودنا إلى النموذج التالي:**

❖ في حالة تساوي الأعداد P_i نقول أن قانون الاحتمال متساوي التوزيع (أو نقول تساوي الاحتمال).

أي من كل i لدينا $P(x_i) = P_i = \frac{1}{r}$

❖ نذكر أن أمل قانون الاحتمال هو العدد $\mu = \sum_{i=1}^{r} P_i x_i$ تباينية هو العدد

$v=\sum_{i=1}^{r} P_i(x_i-\mu)^2$ وانحرافه المعياري هو العدد $\delta=\sqrt{v}$

❖ ونذكر أن الحادثة هي كل جزء من E وأن $\{x_i\}$ تدعى حادثة أولية E الحادثة الأكيدة و ϕ هي الحادثة المستحيلة

❖ احتمال حادثة A هو مجموع احتمالات كل المخارج التي لا تنتمي إلى A $(P(\phi)=0)$ وفي حالة تساوي احتمال يؤول حساب احتمال A أي $P(A)$ إلى مسألة عد

مبرهنة: في حالة تساوي احتمال على E يكون لدينا من أجل كل حادثة A

$$\boxed{P(A)=\frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } E}}$$

بعض الخواص:

الخاصية	لغة الحوادث	أجزاء E
$0\le P(A)\le 1$	A حادثة كيفية	A
$P(E)=1$ $P(\phi)=0$	الحادثتان الأكيدة والمستحيلة	ϕ, E
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$	A، B غير متلائمتين	$A\cap B=\phi$
$P(\overline{A})=1-P(A)$	$\overline{A}$ الحادثة العكسية للحادثة A	$\overline{A}$
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$	B، A حادثتان كيفيتان	B، A

المتغير العشوائي – الأمل الرياضياتي والتباين لمتغير عشوائي

متغير عشوائي X هو دالة عددية معرفة على مجموعة المخارج E ومزودة باحتمال P

X يأخذ القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ بالاحتمالات $P_1, P_2, \dots, P_n$ معرفة كما:

$$P_i=P(X=x_i)$$

إرفاق القيم P_i بالقيم x_i هو تعريف قانون احتمال جديد على E' هذا القانون يرمز له بـ P' أو P_X ويسمى قانون X

الأمل الرياضياتي لمتغير عشوائي X هو الأمل الرياضياتي لقانون احتماله P_X وكذلك التباين والانحراف المعياري ونرمز لها على الترتيب بالرموز $E(X)$، $Var(X)$، $\delta(X)$

خواص الأمل الرياضياتي والتباين لمتغير عشوائي:

$E(X)$ هو معدل القيم x_i مرفقة بالقيم P_i بالمقارنة مع مجال الاحصاء $E(X)$ هو $\overline{X}$ وفي ميدان الألعاب هو الربح المتوسط الذي يأمله اللاعب بعد تكرار اللعبة مرات كثيرة. فانعدام $E(X)$ يدل أن اللعبة عادلة و $E(X)>0$ يعني أن اللعبة مربحة

وفي حالة $E(X)<0$ فهي ليست في مصلحة اللاعب كما في مجال الإحصاء فإن التباين والانحراف المعياري مقياس للتشتت

مبرهنة: X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس الوضعية و a عدد حقيقي

خواص الخطية للأمل الرياضياتي:

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$
$$E(aX)=aE(X)$$

حيث $E(X+Y)$ و $E(aX)$ هما الأملان الرياضياتيان لكل من $(X+Y)$ و (aX)

ينتج من المبرهنة السابقة:

X متغير عشوائي a و b عددان حقيقيان لدينا:

$$E(X+b)=E(X)+b$$
$$Var(X)=E(X-E(X))^2 = E(X^2)-(E(X))^2$$
$$Var(aX)=a^2Var(X)$$
$$\delta(aX)=|a|\delta(X)$$
$$Var(X+b)=Var(X),$$
$$\delta(X+b)=\delta(X)$$

الاحتمالات الشرطية

تعريف: لتكن A حادثة من مجموع المخارج E حيث $P(A)\neq 0$ نعرّف على E احتمالا جديدا يرمز له بالرمز P_A حيث من أجل كل حادثة B نكتب: $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

P_A يسمى الاحتمال الشرطي علما أن A محققة

$P_A(B)=P(A/B)$ ونقرأ "احتمال B علما أن A محققة"

خواص الاحتمالات الشرطية:

1) لتكن B حادثة من مجموع المخارج E حيث $P(B)\neq 0$ بحيث الحادثة B تستلزم الحادثة A فإن احتمال الحادثة A علما أن B محققة هي 1 أي إذا كان: $B\subset A$ فإن $P_B(A)=1$

2) لتكن A و B حادثتان من مجموع المخارج ذات احتمالات غير معدومة. لدينا

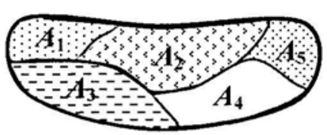
$$P(A\cap B)=P(B)\times P_B(A)$$
$$=P(A)\times P_A(B)$$

دستور الاحتمالات الكلية

1) تجزئة مجموعة: نسمي تجزئة مجموعة أجزاء لهذه المجموعة كلها ليست خالية، منفصلة مثنى مثنى (لا يوجد جزءان لهما عنصر مشترك) واتحادهما المجموعة الكلية أي:

1) $A_i\neq\phi$ ، 2) $A_i\cap A_j=\phi$

3) $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5=E$



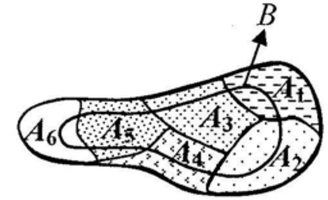
2) لتكن A_1، A_2، A_3، ....، A_n حوادث احتمالاتها غير معدومة تشكل تجزئة للمجموعة الشاملة E

لدينا من أجل كل حادثة B:

$$P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)$$
$$+\ldots\ldots+P(A_n\cap B)$$

مع $P(A_k\cap B)=P(A_k)\times P_{Ak}(B)$

من أجل كل k حيث $1\le k\le n$



ملاحظة:

❖ يمكن أن تكون الحادثة $A_k\cap B=\phi$ من أجل $1\le k\le n$

❖ العائلة $\{A_k\cap B\}$ مع $1\le k\le n$ تشكل تجزئة للحادثة B

الحوادث المستقلة والمتغيرات العشوائية المستقلة

تعريف: نقول عن حادثتين A و B أنهما مستقلتان إذا وفقط إذا كان:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

إذا كان $P(A)\neq 0$ فإن $P(B/A)=P(B)$

تعريف: X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس الفضاء E

لتكن x_1، x_2، ...، x_n قيم المتغير X

و y_1، y_2، ...، y_n قيم المتغير Y

نقول أن X و Y مستقلان عندما تكون الحادثتان $(X = x_i)$ و $(Y = y_j)$ مستقلتان من أجل كل i و j حيث $(1\le i\le n$ و $1\le j\le m)$

❖ في حالة استقلال الحوادث يكون احتمال قائمة النتائج هو جداء احتمالات كل النتائج (يحصل هذا عموما في التجارب العشوائية المكررة)

❖ متغيران عشوائيان مرتبطان بتجربتين مختلفتين مستقلان

❖ الحادثة المستحيلة مستقلة على أي حادثة أخرى

❖ الحادثة الأكيدة مستقلة على أي حادثة أخرى

❖ إذا كانت الحادثة B مستقلة عن الحادثة A فإن B مستقلة عن الحادثة $\overline{A}$

❖ الأمل الرياضياتي لجداء متغيران عشوائيان مستقلان هو جداء الأمل الرياضياتي للمتغيران أي:

$$E(X\times Y)=E(X)\times E(Y)$$

❖ التباين لمجموع متغيران عشوائيان مستقلان هو مجموع تباينان المتغيران العشوائيان أي: $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

المحور الثالث عشر

قوانين الاحتمال

قانون برنولي

تعريف: نسمي تجربة برنولي كل تجربة عشوائية ذات مخرجين متعاكسين S و $\overline{S}$ باحتمالين p و $(1-p)$ على الترتيب

قانون برنولي هو المتغير العشوائي X حيث:

$X = 1$ إذا تحقق المخرج S

$X = 0$ إذا تحقق المخرج $\overline{S}$

قانون احتمال X هو: نسمي p وسيط المتغير العشوائي X

X	0	1
$p(X=x)$	$1-p$	p

خاصية: إذا كان المتغير العشوائي X يتبع قانون برنولي بوسيط p فإن الأمل الرياضياتي $E(X)$ والتباين $V(X)$ يعطيان بالعلاقتين التاليتين:

$V(X) = p(1-p)$ و $E(X) = p$

مخطط برنولي وقانون ثنائي الحد

بتكرار تجربة برنولي n مرة (التجارب مستقلة) نعرّف مخطط برنولي

تعريف: نقول أن متغير عشوائي X يتبع قانون ثنائي الحد بالوسيطين n و p إذا كان X يأخذ كقيمة عدد مرات تحقق المخرج S عند تكرار تجربة برنولي n مرة ونكتب:

$$X \to B(n,p)$$

مبرهنة: ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم و p عددا حقيقيا من المجال $[0,1]$

X متغير عشوائي يتبع قانون ثنائي الحد $B(n,p)$ من أجل كل عدد طبيعي k $0 \le k \le 1$ لدينا:

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$
$$E(X) = n\,p$$
$$V(X) = n\,p(1-p)$$

قوانين الاحتمالات المستمرة

1. الكثافة

تعريف 1: f دالة معرفة على المجال $[a,b]$ حيث: $a < b$

نقول أن f كثافة احتمال على $[a,b]$ إذا تحقق ما يلي:

❖ f مستمرة على $[a,b]$

❖ f موجبة على $[a,b]$

❖ $\int_a^b f(t)dt = 1$

تعريف 2: نقول أن X متغير عشوائي معرّف على المجال $[a,b]$ قانون احتماله P يقبل f دالة كثافة إذا تحقق ما يلي:

من أجل كل عددين α و β من $[a,b]$ ؛ $(\beta \ge \alpha)$ لدينا:

$$P(X \in [a,b]) = \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

خواص: من أجل كل α و β ينتميان إلى المجال $[a,b]$

❖ $P(X=\alpha)=0$

❖ $P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta)$
$= P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X \le \beta)$

2. قانون التوزيعات المنتظمة

تعريف: f دالة نقول أن المتغير العشوائي X يتبع قانون التوزيع المنتظم على المجال $[a,b]$، $(a < b)$ إذا كانت دالة كثافة الاحتمال ثابتة على المجال $[a,b]$

القانون الأسي:

تعريف: نقول أن المتغير العشوائي X يتبع القانون الأسي ذي الوسيط λ إذا كانت دالة كثافة احتماله هي الدالة المعرفة من أجل كل $x \in [0,+\infty[$ بالعبارة $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

نتائج:

1) ليكن x عددا من المجال $]0,+\infty[$ لدينا

$$P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

لدينا $P(X \le x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^x$

ومنه $P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}$

2) الأمل الرياضياتي للمتغير X هو

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

لدينا $E(X) = \int_0^{+\infty} t\,f(t)dt = \int_0^{+\infty} \lambda\,t\,e^{-t}dt$

ومنه $E(X) = \lim_{\alpha \to +\infty} -\frac{1}{\lambda}\left[e^{-\lambda t}\right]_0^\alpha$

وبالتالي $\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$

❖ $P(X > x) = 1 - P(X \le x)$

ومنه $P(X > x) = 1 - \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}dx$

مثال: ليكن X متغير عشوائي يتبع قانونا أسيا بوسيط λ

عين λ إذا علمت أن $P(X \ge 50) = \frac{2}{3}$

لدينا $P(X \ge 50) = 1 - P(X < 50)$

وبالتالي $P(X \ge 50) = 1 - (1 - e^{-50\lambda})$

ومنه $e^{-50\lambda} = \frac{2}{3}$ وبالتالي $\lambda = \frac{1}{50} Ln\left(\frac{3}{2}\right)$

المحور الرابع عشر

القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

1. القسمة في $\mathbb{Z}$

ليكن a و b عددان صحيحان و a غير معدوم القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث: $b = k\,a$

نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول كذلك b مضاعف للعدد a

ونكتب a/b ونقرأ a يقسم b

مثال: $12 = 3\times 4 = (-3)\times(-4)$

ومنه $4/12$ و $-3/12$ وبالتالي مجموعة قواسم 12 في $\mathbb{Z}$ هي:

$D_{12} = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

2. القواسم الخاصة

- من أجل كل عدد صحيح a لدينا $1/a$ و $-1/a$ و a/a و $-a/a$
- قواسم (-1) أو 1 في $\mathbb{Z}$ هي (-1) و 1

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$: من أجل ثلاثة أعداد صحيحة a ، b ، c الغير المعدومة

- إذا كان a/b و b/c فإن a/c
- إذا كان c/a و c/b فإن من أجل كل أعداد صحيحة α و β : $c/\alpha a+\beta b$

القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$:

مبرهنة: a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم. توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة بحيث $a = bq + r$ و $0 \le r < b$

تسمى عملية البحث عن الثنائية (q,r) بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b

يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل وباقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b

ملاحظة: يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح غير معدوم b ونحصل على $a = bq + r$ و $0 \le r < |b|$

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين: a عدد طبيعي غير معدوم ونرمز بـ D_a إلى مجموعة قواسم العدد a

ملاحظة: لدينا مجموعة قواسم هي $\mathbb{N}^*$

تعريف: ليكن a و b عددان طبيعيان غير معدومين، D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب، $D_a \cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b

يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a \cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ونرمز له بـ: $PGCD(a,b)$

ملاحظة: يرمز أيضا لمجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b بـ: $D_{a,b}$

ملاحظات: لدينا $PGCD(a,a) = a$

و $PGCD(1,a) = 1$ و $PGCD(0,a) = a$

حيث (a غير معدوم)

لدينا $\boxed{D_{a,b} = D_a \cap D_b = D_{PGCD(a,b)}}$

أي مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.

خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

خاصية 1: a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a \ge b$ ، r باقي قسمة a على b فإن $PGCD(a,b) = PGCD(b,r)$

خوارزمية إقليدس: a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a > b$ بقسمة a على b نحصل على $a = bq_1 + r_1$ مع $0 \le r_1 < b$ حيث q_1 و r_1 عددان طبيعيان

- إذا كان $r_1 = 0$ (أي b يقسم a) فإن
$PGCD(a,b) = b$

- إذا كان $r_1 \ne 0$ فإن
$PGCD(a,b) = PGCD(b,r_1)$

نقسم b على r_1 نحصل على $b = q_2 r_1 + r_2$ مع $0 \le r_2 < r_1$ حيث q_2 و r_2 عددان طبيعيان

- إذا كان $r_2 = 0$ (أي r_1 يقسم b) فإن
$PGCD(a,b) = PGCD(b,r_1) = r_1$

- إذا كان $r_2 \ne 0$ فإن
$$PGCD(a,b) = PGCD(b,r_1) = PGCD(r_1,r_2)$$

نواصل هكذا حتى نجد باقيا معدوما ونسمي r_n آخر باقي غير معدوم وعليه

$$PGCD(a,b) = PGCD(b,r_1) = PGCD(r_1,r_2) = \ldots = PGCD(r_n,0) = r_n$$

هذه الطريقة لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b تسمى بخوارزمية إقليدس.

خاصية 2: القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس.

خاصية 3: a و b عددان طبيعيان غير معدومين، k عدد طبيعي غير معدوم

لدينا $\boxed{PGCD(ka,kb) = k\,PGCD(a,b)}$

تعريف: a و b عددان طبيعيان غير معدومين يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1

خاصية 4: a و b عددان طبيعيان غير معدومين، d قاسم مشترك للعددين a و b

نضع $a = da'$ ، $b = db'$

يكون d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا وفقط إذا كان العددان الطبيعيان a' و b' أوليين فيما بينهما

تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين:

تعريف: a و b عددان طبيعيان غير معدومين القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي الوحيد d حيث:

$\boxed{d = PGCD(|a|,|b|)}$

خاصية: a و b عددان صحيحان غير معدومين و k عدد صحيح غير معدوم

$PGCD(ka,kb) = |k|PGCD(a,b)$

ملاحظة: a و b عددان صحيحان غير معدومين

إذا كان b يقسم a فإن $PGCD(a,b) = |b|$

الموافقات في $\mathbb{Z}$

أ. الموافقات في $\mathbb{Z}$

1) تعريف: n عدد طبيعي غير معدوم، القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n ونرمز $a \equiv b[n]$ ونقرأ a يوافق b بترديد n

أمثلة: $27 \equiv 92[5]$ ، $12 \equiv 34[11]$ ،
$-20 \equiv 1[7]$ ، $-59 \equiv -3[8]$

ملاحظات: من أجل كل عدد صحيح x:
$x \equiv 0[1]$ ، ترميز آخر $a \equiv b(n)$

مبرهنة: a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم، a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n إذا وفقط إذا كان $(a-b)$ مضاعف لـ n

نتيجة: a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم، a و b متوافقان بترديد n إذا وفقط إذا كان $(a-b)$ مضاعف لـ n

خواص:

خاصية 1: n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 $(n \geq 2)$، كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمة بترديد n أي $a \equiv r[n]$ حيث r هو باقي قسمة a على n

خاصية 2: n عدد طبيعي غير معدوم من أجل كل عدد صحيح a لدينا: $a \equiv a[n]$

خاصية 3: n عدد طبيعي غير معدوم a و b عددان صحيحان إذا كان:
$a \equiv b[n]$ فإن $b \equiv a[n]$

خاصية 4: n عدد طبيعي غير معدوم، a، b و c أعداد صحيحة إذا كان:
$a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$ فإن $a \equiv c[n]$

خاصية 5: n عدد طبيعي، a، b، c و d أعداد صحيحة إذا كان:
($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) فإن $ac \equiv bd[n]$

خاصية 6: n عدد طبيعي غير معدوم، a، b، c، d أعداد صحيحة إذا كان:
($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) فإن
$(a+c) \equiv (b+d)[n]$

خاصية 7: n عدد طبيعي غير معدوم a و b عددان صحيحان، من أجل كل عدد صحيح k إذا كان: $a \equiv b[n]$ فإن $ka \equiv kb[n]$

خاصية 8: n و p عددان طبيعيان غير معدومين، a و b عددان صحيحان إذا كان:
$a \equiv b[n]$ فإن $a^p \equiv b^p[n]$

التعداد

مبرهنة: x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1 كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يكتب بطريقة وحيدة على الشكل:

$$a = q\,x^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \ldots\ldots + r_2 x^2 + r_1 x + r_0$$

حيث $0 < q < x$ و $0 \leq r_k < x$

مع $r_k \in \{0,1,2,\ldots\ldots,(n-1)\}$

التعداد ذو الأساس x:

قاعدة: x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. يعتمد التعداد ذو الأساس x على الاصطلاحين التاليين:

1) إذا كان $a < x$ (a عدد طبيعي). a يمثل برمز وحيد يسمى رقما

2) إذا كان $a \geq x$ (a عدد طبيعي) من المبرهنة a ينشر بطريقة وحيدة وفق العدد x:

$$a = q\,x^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \ldots\ldots + r_1 x + r_0$$

حيث $0 < q < x$ و $0 \leq r_k < x$

مع $r_k \in \{0,1,2,\ldots\ldots,n-1\}$

يمثل العدد a كما يلي:

$$a = \overline{q\,r_{n-1}\,r_{n-2}\ldots\ldots r_1\,r_0}$$

الكتابة $a = \overline{q\,r_{n-1}\,r_{n-2}\ldots\ldots r_1\,r_0}$ هي كتابة العدد a في النظام ذي الأساس x

إذا كان $x = 10$ يكتب

$$a = q\,r_{n-1}\,r_{n-2}\ldots\,r_1\,r_0$$

المحور السادس عشر

الأعداد الأولية

Hard_equation

1) تعريف: القول أن العدد الطبيعي n عدد أولي معناه أن n يقبل قاسمين بالضبط في $\mathbb{N}$: 1 و n نفسه

ملاحظات ونتائج:

- 0 غير أولي لأنه يقبل ما لا نهاية من القواسم
- 1 غير أولي لأنه يقبل قاسم واحد هو 1
- 2 هو العدد الأولي الزوجي الوحيد
- 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23 هي الأعداد الأولية الأصغر من 25

2) خواص:

خاصية 1: كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 $(n\geq 2)$ يقبل على الأقل قاسما أوليا

خاصية 2: كل عدد طبيعي n غير أولي أكبر تماما من 1 $(n\geq 2)$ يقبل قاسما أوليا a حيث $a\leq\sqrt{n}$

خاصية 3: مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية

طرائق:

1) لمعرفة إذا كان عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 $(n\geq 2)$ أوليا أم لا نحسب $\sqrt{n}$

- إذا كان $\sqrt{n}$ عددا طبيعيا أي n مربع تام فإن n غير أولي
- إذا كان $\sqrt{n}$ غير طبيعي نقسم n على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ على الترتيب
  - إذا وجدنا أحد البواقي معدوما نتوقف ونقرأ أن n غير أولي
  - إذا كانت كل البواقي غير معدومة نقرأ أن n أولي

2) للبرهان على أن عدد طبيعي n حيث $n\geq 4$ غير أولي يكفي كتابته على الشكل $n=p\times q$ حيث p و q عددان طبيعيان أكبر تماما من 1

تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية

مبرهنة: كل عدد طبيعي غير أولي n حيث $n\geq 2$ يمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية

تحليل n إلى جداء عوامل أولية هو:

$$n=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times.....\times p_k^{\alpha_k}$$

حيث α_1، α_2، ....، α_k أعداد طبيعية وتمثل تكرارات العامل الأولي p_k

ملاحظة: نقبل أن كل عدد طبيعي n يقبل تحليلا وحيدا إلى جداء عوامل أولية

خاصية: a و b عددان طبيعيان كلاهما أكبر تماما من 1

يكون العدد b قاسما للعدد a إذا وفقط إذا كان كل عامل أولي في تحليل b موجودا في تحليل a وبأسس إما مساو وإما أصغر من أسه في تحليل a

طريقة: لإيجاد عدد قواسم a نحلل a إلى جداء عوامل أولية. إلى كل أس في التحليل نضيف 1 ثم نحسب جداء الأعداد المحصل عليها.

مثال: $9604 = 2^2\times 7^4$ ومنه عدد قواسم 9604 هي: $(2+1)\times(4+1)=15$

القواسم	العوامل	
1		
2	2	9604
4	2	4802
7, 14, 28	7	2401
49, 98, 196	7	343
343, 686, 1372	7	49
2401, 4802, 9604	7	7
		1

المضاعف المشترك الأصغر لعددين

a عدد طبيعي غير معدوم نرمز بـ: M_a مجموعة مضاعفات العدد a

مثال: مجموعة مضاعفات 6 هي:

$M_6 \; \{0, 6, 12, 18, \ldots\ldots\}$

- المضاعف الوحيد لـ 0 هو 0

تعريف: a و b عددان طبيعيان غير معدومين M_a مجموعة مضاعفات a ، M_b مجموعة مضاعفات b

$(M_a \cap M_b)$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b

يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $(M_a \cap M_b)$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b ونرمز له $PPCM(a,b)$

ملاحظات:

❖ $PPCM(1,a)=a$ ، $PPCM(a,a)=a$

❖ مجموعة المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة المضاعفات للمضاعف المشترك الأصغر لهما أي $M_a \cap M_b = M_{PPCM(a,b)}$

تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين:

تعريف: a و b عددان صحيحان غير معدومين المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر عدد طبيعي m غير معدوم حيث $m = PPCM(|a|,|b|)$

خاصية للمضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين:

خاصية: a و b عددان طبيعيان غير معدومين، k عدد صحيح غير معدوم $PPCM(ka,kb) = k\,PPCM(a,b)$

❖ حساب القاسم المشترك الأكبر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:

خاصية: القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة وبأصغر أسس.

❖ حساب المضاعف المشترك الأصغر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:

خاصية: المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة في تحليلي a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة وبأصغر أسس.

❖ العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

خاصية: جداء عددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 مساو لجداء قاسمهما المشترك الأكبر ومضاعفهما المشترك الأصغر أي

$$\boxed{PGCD(a,b)\times PPCM(a,b) = a\times b}$$

مبرهنة بيزو (*Théorème de BEZOUT*):

يكون عددان صحيحان a و b أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان μ و v حيث $a\mu+bv=1$

خواص:

خاصية 1: إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان μ و v حيث $a\mu+bv=d$

خاصية 2: إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها

خاصية 3: إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جداءهما bc

مبرهنة غوص (*Théorème de GAUSS*):

a ، b ، c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة إذا كان a يقسم الجداء bc وكان a أوليا مع b فإن a يقسم c

خواص:

خاصية 1: a و b عددان طبيعيان غير معدومين و p عدد أولي، إذا كان p يقسم الجداء ab فإن p يقسم a أو p يقسم b

خاصية 2: a ، b ، c أعداد طبيعية غير معدومة إذا كان a مضاعف للعددين b و c وكان b و c أوليين فيما بينهما فإن a مضاعف للجداء bc

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير

و النجاح و المغفرة

Hard_equation