المتتاليات العددية(3)
تقارب متتالية عددية

نوفمبر 2007
Prof : Remila

.1 أدرس تقارب المتتالية (u_n) المقترحة :

1) $u_n = \dfrac{3n^2-2n+4}{4n^2+1}$ 2) $u_n = \dfrac{2n^2-n^3}{n^4+1}$

3) $u_n = \dfrac{5n^3-4n^2}{(n+1)^3}$ 4) $u_n = \sqrt{\dfrac{n^2+2}{n+3}}$

5) $u_n = \dfrac{2\sqrt{n}-3}{n+1}$ 6) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$

7) $u_n = \dfrac{2}{3^n}+3\left(\sqrt{2}\right)^n$ 8) $u_n = 5^n-3^n$

9) $u_n = \dfrac{3^n-5^n}{1+2^n}$ 10) $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$

.2 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n = \dfrac{6n+5\times(-1)^n}{3n}$

تحقق أن : $\dfrac{6n-5}{3n} \le u_n \le \dfrac{6n+5}{3n}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

.3 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ المعرفة بـ : $u_n = \dfrac{(-2)^n-3\cos n}{4^n}$

بين أن : $|u_n| \le \dfrac{3+2^n}{4^n}$; $\forall n\in\mathbb{N}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

.4 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \sqrt{n^2+6n}-n$

1) باستعمال الآلة الحاسبة أعط تخمينا لنهاية المتتالية (u_n)

2) بين أن : $u_n = \dfrac{6}{1+\sqrt{1+\dfrac{6}{n}}}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

.5 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ :

$$u_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+......+\frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

1) K عدد طبيعي حيث : $1\le K\le n$. أعط حصرا لـ $\dfrac{1}{n+\sqrt{K}}$

2) بين أن : $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}} \le u_n \le \dfrac{n}{n+1}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

.6 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$u_0 = 12 \quad \text{و} \quad \forall n\in\mathbb{N} \; ; \; u_{n+1} = 3+\frac{1}{4}u_n$$

1) في م م م م أنشئ (D) التمثيل البياني للدالة $f: x \mapsto 3+\dfrac{1}{4}x$ و المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x$

ـ مثل على المحور (OX) الحدود u_0 , u_1 , u_2 و u_3

ـ ما هو تخمينك حول تقارب المتتالية (u_n).

2) أ ـ بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\,,\, 4\le u_n \le 12$

ب ـ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

جـ ـ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها .

3) أ ـ أحسب العدد a فاصلة نقطة تقاطع (D) و (Δ)

ب ـ نضع : $v_n = u_n - a$

ـ أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين الأساس .

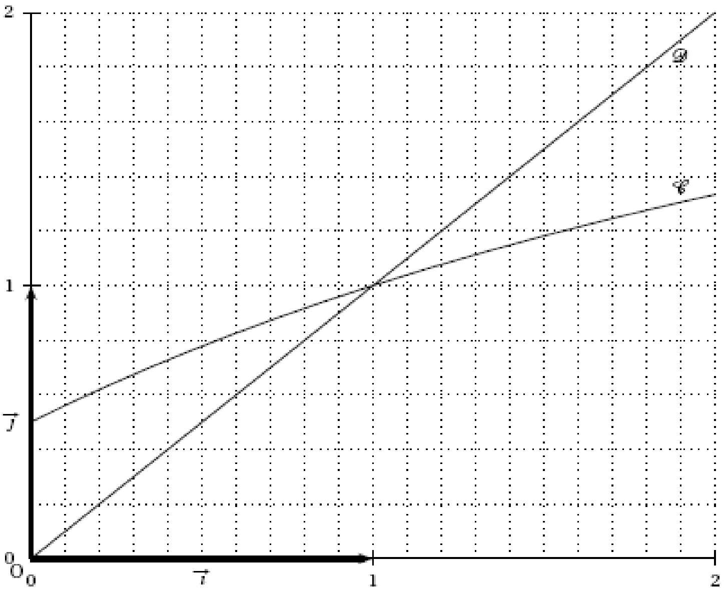
ـ عبر عن (v_n) بدلالة n و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ثم $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

.7 المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$u_0 = 0 \quad \text{و} \quad \forall n\in\mathbb{N}\,,\; u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}$$

1) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $0\le u_n \le 1$

2) يبين الشكل أسفله جزء من المنحنى $\mathscr{C}$ الممثل للدالة $f: x \mapsto \dfrac{3x+2}{x+4}$ و المستقيم $\mathscr{D}$ الذي معادلته : $y=x$



ـ مثل على المحور (OX) الحدود u_0 , u_1 , u_2 و u_3.

ـ ما هو تخمينك حول رتابة و تقارب المتتالية (u_n)

3) ـ بين أن : $u_{n+1}-u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$

ـ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ـ استنتج أن (u_n) متتالية متقاربة

ـ بين أن النهاية ℓ للمتتالية (u_n) تحقق :

$\ell > 0$ و $\ell = f(\ell)$. عين قيمة ℓ

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ : $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+2}$

ـ برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{2}{5}$.

ـ أحسب v_0 و عبر عن v_n بدلالة n.

ـ عبر عن u_n بدلالة v_n ثم بدلالة n .

ـ استنتج أن (u_n) متقاربة و أحسب من جديد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

اقلب الصفحة

.8

1 – أنشئ (C_f) المنحنى الممثل للدالة $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$ ، ثم المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x$

2 – مثل بيانيا على المحور (OX) الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \text{ ، لكل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ و } u_0 = 5$$

– ما هو تخمينك حول رتابة و تقارب المتتالية (u_n).

3 – بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} , u_n \geq 2$.

4 – بين أن (u_n) متتالية متناقصة . ما ذا تستنتج ؟

5 – بين أن النهاية ℓ للمتتالية (u_n) تحقق :

$$\ell \geq 2 \text{ و } \ell = \sqrt{\ell + 2}$$

– استنتج قيمة ℓ .

.9 المتتالية (u_n) معرفة بـ : $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n}$

(1 هل العدد $\frac{3}{2}$ هو عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) ؟

(2 برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة ، و استنتج أنها متقاربة .

(3 أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

.10 لتكن f الدالة المعرفة على $[-1 ; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

(1 أدرس تغيرات الدالة f

(2 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

أ. بين أنه ، من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$

ب. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

ج. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} , \ 0 < 1 - u_{n+1} < \frac{1}{2}(1 - u_n)$

د. استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} , \ 0 < 1 - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 - u_0)$

استنتج نهاية المتتالية (u_n).

.11 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$u_0 = 4 \text{ و } \forall n \in \mathbb{N} , \ u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2}$$

(1 بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} , u_n > 3$

(2 أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(3 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $(u_{n+1} - 3) > \frac{3}{2}(u_n - 3)$

(4 استنتج أن : $u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$

(5 هل المتتالية (u_n) متقاربة.؟

.12 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$

1 – بين أنه : $\forall n \in \mathbb{N} , \ u_n > \sqrt{2}$

2 – بين أن (u_n) متناقصة و استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} , \ u_n \leq 2$

3 – تحقق أن : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{u_n}\right)\left(u_n - \sqrt{2}\right)$

– استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{4}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$

4 – برهن بالتراجع أنه : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{4^n}$

5 – استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و أعط نهايتها.

.13 نعتبر المتتالية (a_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $a_n = \frac{n}{3^n}$

(1 بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3^n > n^2$

(2 استنتج أن $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

(3 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n \ ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

أ – بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n \succ 0$.

(4 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ : $v_n = \frac{u_n}{n}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

أ – بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

ب – عبر عن v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n و أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

.14 θ عدد حقيقي من المجال $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

(u_n) متتالية معرفة بـ : $u_0 = 2\cos\theta$ و $\forall n \in \mathbb{N} , \ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

(1 برهن أنه : $\forall n \in \mathbb{N} , 0 < u_n < 2$

(2 نذكر أنه : $\forall x \in \mathbb{R} , \ \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

أ. أحسب u_1 ، u_2 بدلالة θ

ب. بين أنه : $\forall n \in \mathbb{N}^* , \ u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{2 + u_n} + \sqrt{2 + u_{n-1}}}$

ج. برهن بالتراجع أن (u_n) متزايدة.

د. برهن بالتراجع أنه: $\forall n \in \mathbb{N} , \ u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

(3 نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_0}{2} \times \frac{u_1}{2} \times .... \times \frac{u_n}{2}$

أ. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} , \ v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{\sin(2\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$

ب. أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ علما أن : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

بالتوفيق مع تحيات Remilamath