المتتاليات الحسابية و المتتاليات الهندسية

خلاصة الدرس

	المتتاليات الحسابية	المتتاليات الهندسية
التعريف	من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1}=u_n+r$	من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1}=u_n\times q$
عبارة الحد العام	الحد الأول : $u_0 \leftarrow u_n=u_0+nr$ الحد الأول : $u_1 \leftarrow u_n=u_1+(n-1)r$ الحالة العامة : $u_n=u_\alpha+(n-\alpha)r$	الحد الأول : $u_0 \leftarrow u_n=u_0\times q^n$ أو الحد الأول : $u_1 \leftarrow u_n=u_1\times q^{n-1}$ الحالة العامة : $u_n=u_\alpha\times q^{(n-\alpha)}$
خاصية ثلاثة حدود متتابعة	c,b,a ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية بهذا الترتيب تكافئ : $2b=a+c$	c,b,a ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية بهذا الترتيب تكافئ : $b^2=a\times c$
مجموع حدود متتابعة	$\frac{\text{(عدد الحدود)}}{2}$ × (الحد الأول + الحد الأخير) $S=u_0+u_1+\ldots+u_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)$	(الحد الأول) × $\frac{1-\text{(الأساس)}^{\text{عدد الحدود}}}{1-\text{(الأساس)}}$ ، $q\neq1$ $S=u_0+u_1+\ldots+u_n=u_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

I. تنبيهات و ملاحظات هامة :

BAC 2008

1) كيف نحسب عدد الحدود: $u_{17}+u_9+u_{10}+\ldots+u_{2008}$

عدد الحدود = $(2008-17)+1=1992$

2) تقارب المتتالية الهندسية :

مبرهنة : إذا كان أساس المتتالية الهندسة q ينتمي إلى المجال : $]-1\ ;\ +1[$ فإن المتتالية الهندسية متقاربة .

3) تعريف أخر لمتتالية حسابية :

لإثبات أن : (u_n) متتالية حسابية يكفي أن نبرهن : أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $2u_n=u_{n-1}+u_{n+1}$

II. كيف ندرس إتجاه تغيرمتتالية عددية : (3 طرق)

طريقة : 01	طريقة : 02
إذا كان : $u_{n+1}-u_n\geq0$ **فإن** : (u_n) متزايدة إذا كان : $u_{n+1}-u_n\leq0$ **فإن** : (u_n) متناقصة إذا كان : $u_{n+1}-u_n=0$ **فإن** : (u_n) ثابتة	إذا كانت : $u_n=f(n)$ إذا كانت f متزايدة على المجال: $]0;+\infty[$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة إذا كانت f متناقصة على المجال: $]0;+\infty[$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة

طريقة : 03 إذا كان : $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq1$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة و إذا كان : $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq1$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة .

تستعمل هذه الطريقة إذا كانت حدود المتتالية موجبة تماما .

III. تقارب متتالية عددية :

(u_n) متقاربة معناه : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ ، (L عدد حقيقي)

(u_n) متباعدة معناه : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ أو المتتالية لا تقبل نهاية .

تذكير : إذا كانت المتتالية (u_n) معرفة بـــ : $u_n = f(n)$ فإنه : إذا كانت : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

IV. المتتالية المحدودة :

A و B عددان حقيقيان .

(u_n) محدودة من الأعلى معناه : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le A$
(u_n) محدودة من الأسفل معناه : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \ge B$
(u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل .

مبرهنة :

- إذا كانت (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة .
- إذا كانت (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فإنها متقاربة .

V. متتاليتان متجاورتان :

تكون متتاليتان عدديتان (u_n) و (v_n) متجاورتان إذا و فقط إذا كانت إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة و $\lim\limits_{x\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

VI. دراسة المتتالية التراجعية : $u_{n+1} = au_n + b$ و u_0 هو الحد الأول

الحالات الخاصة :

إذا كان :	فإن :
$a = 0$	(u_n) متتالية ثابتة
$a = 1$ و $b = 0$	(u_n) متتالية ثابتة
$a = 1$ و $b \ne 0$	(u_n) متتالية حسابية أساسها b
$a \ne 0$ و $a \ne 1$ و $b = 0$	(u_n) متتالية هندسية أساسها a

دراسة هذه المتتالية في الحالة العامة : $a \ne 0$ و $a \ne 1$ و $b \ne 0$

- ***النهاية :*** إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد حيث : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = L$ و لدينا كذلك : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_{n+1} = L$

و منه و حسب العمليات على النهايات فإن العدد الحقيقي L يحقق : $\boxed{L = aL + b}$ ، و منه : $\boxed{L = \frac{b}{1-a}}$

- ***عبارة الحد العام :*** لدراسة هذه المتتالية التراجعية نضع : $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$ و نبرهن أن : (v_n) متتالية هندسية ثم نكتب : v_n بدلالة n ثم نستنتج u_n بدلالة n .

ملاحظة : هناك طرق أخرى لدراسة هذه المتتالية التراجعية