الأستاذ محمد الرقبة ثانوية أبي العباس السبتني مراكش

المتتـــاليـــات العـددية

Suites numériques

I- تـمهيـــد :

اشترى عصام سيارة بـ 40.000 درهم وبعد مرور سنة أصبح ثمنها هو ¾ ثمن الشراء ، وبعد مرور سنة أخرى أصبح ثمنها هو ¾ من ثمنها السنة الأولى وهكذا يكون ثمن السيارة في سنة معينة هـو ¾ من ثمنها في السنة السابقة.

1- حدد ثمن السيارة بعد مرور ثلاث سنوات.
2- حدد ثمن السيارة بعد مرور أربع سنوات.
3- حدد ثمن السيارة بعد مرور n سنة بدلالة n.
4- في أية سنة يصبح ثمن السيارة أقل من 15.000 درهم ؟

الجــواب :

1-2-

$$P_1 = \frac{3}{4}P_0 = \frac{3}{4}\cdot 40.000 = 30.000$$

$$P_2 = \frac{3}{4}P_1 = \frac{3}{4}\cdot 30.000 = \frac{90.000}{4} = 22.500$$

$$P_3 = \frac{3}{4}P_2 = \frac{3}{4}\cdot 22.500 = 16.875$$

$$P_4 = \frac{3}{4}P_3 = \frac{3}{4}\cdot 16.875 = 12.656,25$$

3-

$$X \quad \begin{cases} P_1 = \frac{3}{4}P_0 \\ P_2 = \frac{3}{4}P_1 \\ P_3 = \frac{3}{4}P_2 \\ P_4 = \frac{3}{4}P_3 \\ \vdots \\ P_n = \frac{3}{4}P_{n-1} \end{cases}$$

إذن :

$$\cancel{P_1} \cdot \cancel{P_2} \cdot \cancel{P_3} \cdot \cancel{P_4} \dots P_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot P_0 \cdot \cancel{P_1} \cdot \cancel{P_2} \cdot \cancel{P_3} \cdot \cancel{P_4} \dots \cancel{P_{n-1}}$$

إذن : $$P_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot P_0$$

4- لنحل في $\mathbb{N}$ المتراجحة :

$$P_n \leq 15.000$$

$$P_n \leq 15.000 \Leftrightarrow P_0 \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 15.000$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{15.000}{40.000}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{3}{8}$$

من أجل $4 \leq n$ ثمن السيارة يصبح أقل من 15.000 .

خلاصة :

الأعداد P_0 ، P_1 ، P_2 . . . P_n تكون متتالية عددية.

II- تعاريف ومصطلحات :

1- تعريف :

ليكن I جزءا من $\mathbb{N}$ $(I \in \mathbb{N})$.

كل تطبيق من I نحو $\mathbb{R}$:

$$u : I \to \mathbb{R}$$
$$n \to u(n)$$

يسمى متتالية عددية .

نكتب u_n عوض $u(n)$.

ونرمز لهاته المتتالية بـ : $(u_n)_{n\in I}$

عادة تكون $I = \mathbb{N}$ أو $I = \mathbb{N}^*$

العدد u_n يسمى الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n\in I}$

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\geq 0} = (u_n)$$

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (u_n)_{n\geq 1} = (u_n)_{n\succ 0}$$

u_n هو الحد ذا المدل n.

أمثلة :

حدد الحدود الأولى للمتتالية المعرفة بما يلي :

-1 $u_n = 2n - 1$ $\qquad$ $I = \mathbb{N}$

$u_0 = -1$

$$u_1 = 1$$
$$u_2 = 3$$

-2 $u_n = \sqrt[n]{2}$ $\quad 2 \le n$

$$u_4 = \sqrt[4]{2} \quad ; \quad u_3 = \sqrt[3]{2} \quad ; \quad u_2 = \sqrt{2}$$

-3 $u_n = Arc\tan n$ $\quad n \in \mathbb{N}$

$$u_2 = Arc\tan 2 \quad ; \quad u_1 = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad u_0 = 0$$

2- تساوي متتاليتين :

نعتبر المتتاليتين :

$$(u_n)_{n\in I} \quad ; \quad (v_n)_{n\in J}$$

$$(u_n)_{n\in I} = (v_n)_{n\in J} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} I = J \\ \forall n \in I \ ; \ u_n = v_n \end{cases}$$

مثال :

$$v_n = \cos n\pi \qquad u_n = (-1)^n$$

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ (-1)^n = \cos n\pi$

إذن : $(u_n) = (v_n)$

III- تحديد متتالية :

1- المتتالية المعرفة بصيغة صريحة لحدها العام :

لتكن f دالة عددية $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية .

إذا كان : $\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ u_n = f(n)$

المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ هي متتالية معرفة بصيغة صريحة لحدها العام.

2- المتتالية الترجعية :

المتتالية الترجعية هي كل متتالية يكون كل حد من حدودها معرفا بواسطة الحد (أو الحدود) السابقة.

مثال :

$$u_0 = 2$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 1}$$

أحسب u_3.

$$u_1 = \frac{1}{u_0 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$u_2 = \frac{1}{u_1 + 1} = \frac{3}{4}$$

$$u_3 = \frac{1}{u_2 + 1} = \frac{4}{7}$$

IV- المتتـالية المحـدودة   Suite bornée

1- المتتالية المكبورة   Suite majorée

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة ، إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي M حيث :

$$\forall n \in I \qquad u_n \le M$$

أمثلة :

- $$n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n = \frac{1}{n}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n \le 1$$

- $$n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = Arc\tan n$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad Arc\tan n \prec \frac{\pi}{2}$$

2- المتتالية المصغورة   Suite minorée

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مصغورة ، إذا وفقط إذا وجد m حيث :

$$\forall n \in I \qquad m \le u_n$$

أمثلة :

- $$n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n = \frac{1}{n}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad 0 \le u_n$$

- $$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = Arc\tan n$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \le u_n$$

3- المتتالية المحـدودة :

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ محـدودة ، إذا وفقط إذا كانت مكبورة ومصغورة.

مثـال :

$$u_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad n^2 - 1 \leq n^2 + 1$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \dfrac{n^2-1}{n^2+1} \leq 1$

أي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 1$

بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq u_n$

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} \quad -n^2 \leq n^2$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad -n^2 - 1 \leq n^2 - 1$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq u_n$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad -1 \leq u_n \leq 1$

إذن : (u_n) متتالية محـدودة.

V- المتتـاليـة الـرتيـبـة Suite monotone

تعاريف :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$

- نقول أن المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ تزايديـة قطعا إذا وفقط إذا كان :

$$\forall n \geq n_0 \quad ; \quad u_{n+1} \succeq u_n$$

- نقول أن المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ تناقصية قطعا إذا وفقط إذا كان :

$$\forall n \geq n_0 \quad ; \quad u_{n+1} \preceq u_n$$

- نقول أن المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ رتيبـة إذا وفقط إذا كانت تزايدية أو تناقصية.

حـالات خاصـة :

a) لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D و $(I \in D)$.

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ المعرفة بـ : $\forall n \in I \quad ; \quad u_n = f(n)$

لدينا : $\forall n \in I \quad ; \quad u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n)$

إذا كانت f تزايديـة قطعا فإن $(u_n)_{n \in I}$ تزايدية قطعا.

إذا كانت f تناقصية قطعا فإن $(u_n)_{n \in I}$ تناقصية قطعا.

مـثــال :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 5}$$

أدرس رتابة المتتالية (u_n).

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 5}$$

لدينا :

$$\forall x \in \mathbb{R} \; ; \quad f'(x) = \frac{4x\left(x^2+5\right) - 2x\left(2x^2+1\right)}{\left(x^2 + 5\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{18x}{\left(x^2 + 5\right)^2}$$

إذن :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad , \quad f'(x) \succ 0$$

ومنه : f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$.

وبالتالية : المتتالية (u_n) تزايدية قطعا.

(b

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 2n + \sin n$$

لدينا :

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad u_{n+1} - u_n = 2\,(n+1) + \sin\,(n+1) - [2n + \sin n]$$

$$= \cancel{2n} + 2 + \sin(n+1) \cancel{-2n} - \sin n$$

$$= \sin(n+1) - \sin n + 2$$

لدينا :

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad -1 \leq \sin(n+1) \leq 1$$

و :

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad -1 \leq \sin n \leq 1$$

إذن :

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad -1 \leq -\sin n \leq 1$$

ومنه :

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad -2 \leq \sin(n+1) - \sin n \leq 2$$

إذن :

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad 0 \leq \sin(n+1) - \sin n + 2 \leq 4$$

إذن :

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$$

ومنه : (u_n) متتالية تزايدية.

(c لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية موجبة قطعا.

(يعني أن : $(u_n \succ 0) \qquad \forall n \in I$)

• إذا كان لكل n من I : $1 \leq \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

فإن $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية.

• إذا كان لكل n من I : $0 \prec \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

فإن $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية.

مثال :

$$u_n = \frac{2^n}{n^2} \quad ; \quad 3 \leq n$$

بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 3}$ تزايدية.

- (طريقة 1)

لدينا :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \iff \frac{\dfrac{2^{(n+1)}}{(n+1)^2}}{\dfrac{2^n}{n^2}} \geq 1$$

$$\iff \frac{2^{(n+1)}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^n} \geq 1$$

$$\iff 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \geq 1$$

$$\iff \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\iff \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\iff \sqrt{2}\, n \geq n+1$$

$$\iff n\left(\sqrt{2}-1\right) \geq 1$$

$$\iff n\,(2-1) \geq \sqrt{2}+1$$

$$\iff n \geq \sqrt{2}+1$$

وبما أن : $n \geq 3$

فإن : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \quad ; \quad \forall n \geq 3$

ومنه : $(u_n)_{n\geq 3}$ متتالية تزايدية.

- (طريقة 2)

$$n \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \geq 1 + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \geq \frac{n+1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \leq \frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{16} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{18}{16} \leq 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

$$\Rightarrow 1 \leq 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

ومنه : $1 \leq \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

وبالتالي $(u_n)_{n\geq 3}$ تزايديـــة.

d) تقنيـة البرهـان بالتـرجـع.

حـالـة خاصـة : $u_{n+1} = f(u_n)$

مـثـــال :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـــ :

$$\begin{cases} u_0 = 16 \\ \forall n \in \mathbb{N} \;;\; u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

بين أن : (u_n) تنـاقصيـــة.

الجــواب :

لنبين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \;;\; u_{n+1} \leq u_n$

- من أجل : $n = 0$ ، $u_1 = 4$ و $u_0 = 16$

إذن : $u_1 \leq u_0$

نفترض أن : $u_{n+1} \leq u_n$

- لنبين أن : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

لدينا : $u_{n+1} \leq u_n$

إذن : $\sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{u_n}$

إذن : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

- الاستنتاج : $u_{n+1} \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ومنه : (u_n) تناقصية.

تطبيـق :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) بين أن : لكل n من $\mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 3$

2) أدرس رتابة (u_n).

الجـواب :

1) لنبين أن : $0 \leq u_n \leq 3 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 0$ إذن : $0 \leq u_n \leq 3$

لنفترض أن : $0 \leq u_n \leq 3$ ولنبين أن : $0 \leq u_{n+1} \leq 3$

لدينا : $0 \leq u_n \leq 3$

إذن : $6 \leq u_n + 6 \leq 9$

إذن : $\sqrt{6} \leq \sqrt{u_n + 6} \leq 3$

وبما أن : $0 \leq \sqrt{6}$

إذن : $0 \leq \sqrt{6 + u_n} \leq 3$

إذن : $0 \leq u_{n+1} \leq 3$

وبالتالي : $0 \leq u_n \leq 3 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) لنبين أن : (u_n) تزايديـة .

يكفي أن نبين أن : $u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- من أجل $n = 0$ $u_1 = \sqrt{6}$

و : $u_0 = 0$

إذن : $u_1 \geq u_0$

نفترض أن : $u_{n+1} \geq u_n$

ولنبين أن : $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

لدينا : $u_{n+1} \geq u_n$

إذن : $6 + u_{n+1} \geq 6 + u_n$

أي : $\sqrt{6 + u_{n+1}} \geq \sqrt{6 + u_n}$

إذن : $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

وبالتالي : $u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ومنه : (u_n) متتالية تزايدية .

طريقة 2 :

لدينا :
$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{6 + u_n} - u_n$$
$$= \frac{6 + u_n - u_n^2}{\sqrt{6 + u_n} - u_n}$$

إذن إشارة $u_{n+1} - u_n$ هي إشارة $-u_n^2 + u_n + 6$.

لندرس إشارة $-u_n^2 + u_n + 6$

لندرس إشارة $-x^2 + x + 6$

$$\Delta = 25$$

إذن : $x_2 = \frac{-1 + 5}{-2}$ و $x_1 = \frac{-1 - 5}{-2}$

$= -2$ و $= 3$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$-x^2 + x + 6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وبما أن : $0 \leq u_n \leq 3 \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}$

فإن : $-u_n^2 + u_n + 6 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ومنه : $u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

وبالتالي : (u_n) متتالية تزايدية .

تمرين تطبيقي :

لتكن المتتالية العددية المعرفة بـ :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_{n+1} = u_n (1 + u_n) \end{cases}$$

1- أحسب u_1 و u_2.

2- بين أن المتتالية (u_n) تزايدية.

ثم استنتج أن $u_n \geq 1 \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}$

3- بين أن : $u_n^2 \geq u_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ثم أن : $u_{n+1} \geq 2\,u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

4- واستنتج أن : $u_n \geq 2^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

الجـواب :

1-

$$u_1 = u_0\,(1 + u_0) = 2$$
$$u_2 = u_1\,(1 + u_1) = 6$$

2- لدينا :

$$\forall n \in \mathbb{N} \;;\quad u_{n+1} - u_n = u_n\,(1 + u_n) - u_n$$
$$= \cancel{u_n} + u_n^2 - \cancel{u_n}$$
$$= u_n^2$$

وبما أن : $u_n^2 \geq 0$

ومنه فإن : (u_n) تزايدية.

وبما أن : $u_0 = 1$ و (u_n) تزايديـة.

فإن : $u_n \geq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

3- لدينا : $u_n \geq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

إذن : $u_n^2 \geq u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

ومنه : $u_n^2 + u_n \geq 2\,u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

إذن : $u_{n+1} \geq 2\,u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

4- لدينا : $u_1 \geq 2\,u_0$

$u_2 \geq 2\,u_1$

$u_3 \geq 2\,u_2$

ومنه : $u_n \geq 2\,u_{n-1}$

ومنه : $u_1 \cdot u_2 \ldots u_n \geq 2^n \cdot u_0 \cdot u_1 \ldots u_{n-1}$

إذن : $u_n \geq 2^n\,u_0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

وبما أن : $u_0 = 1$

فإن : $u_n \geq 2^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

VI- المتتـاليــات الحسـابيــة ، المتتـاليــات الهندسيــة :

Suites géométriques, Suites arithmétiques

1- المتتـاليـات الحسابيـة :

a- تضنـن الحد العام للمتتالية التاليـة :

$$u_0 = \frac{1}{2} \;;\; u_1 = \frac{5}{6} \;;\; u_2 = \frac{7}{6} \;;\; u_3 = \frac{3}{2}$$

لدينا :

$$X \quad \begin{cases} u_1 = u_0 + \frac{1}{3} \\ u_2 = u_1 + \frac{1}{3} \\ u_3 = u_2 + \frac{1}{3} \\ u_4 = u_3 + \frac{1}{3} \\ \vdots \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\cancel{u_1} + \cancel{u_2} + \cancel{u_3} + \ldots u_n = u_0 + \cancel{u_1} + \cancel{u_2} + \cancel{u_3} + \ldots \cancel{u_{n-1}} + \frac{1}{3} n$$

إذن :
$$u_n = u_0 + \frac{1}{3} n$$

ومنه :
$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

هذه المتتالية تسمى متتالـيـة حسابـيـة.

b- تعريــف :

تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ حسابيــة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r ،

بحيث : $u_{n+1} - u_n = r \qquad \forall n \geq n_0$

العدد r يسمــى أساس المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\geq n_0}$

مثـــال : $u_n = \dfrac{2n+1}{3}$

بين أن : (u_n) متتالية حسابية وحدد أساسها.

لدينا :
$$\forall n \in \mathbb{N} \;;\; u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+1}{3} - \frac{2n+1}{3}$$
$$= \frac{\cancel{2n} + 2 \cancel{+1} \cancel{-2n} \cancel{-1}}{3}$$
$$= \frac{2}{3}$$

ومنه : (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \dfrac{2}{3}$.

c- خاصيـة مميـزة :

تمهيــد :

لتكن $(u_n)_{n \succ n_0}$ متتالية حسابية أساسها r.

لدينا : $u_n = u_{n-1} + r$

$u_{n+1} = u_n + r$

إذن : $u_n - u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$

إذن : $2\,u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$

إذن : $u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$

خاصية مميـزة :

u_n متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان : $u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} \qquad \forall n \geq 1$

d- صيغة الحد العام لمتتالية حسابيـة :

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0.

$$X \quad \begin{cases} u_1 = u_0 + r \\ u_2 = u_1 + r \\ \vdots \\ u_{n-1} = u_{n-2} + r \\ u_n = u_{n-1} + r \end{cases}$$

$$u_n = u_0 + n\,r$$

خاصيـة :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

فإن : $\forall n \in \mathbb{N}\ ; \quad u_n = u_0 + n\,r$

استنتـاج :

لدينا : $u_n = u_0 + n\,r$

$u_n = u_0 + r + (n-1)\,r$

$u_n = u_1 + (n-1)\,r$

$u_n = u_1 + r + (n-2)\,r$

$u_n = u_2 + (n-2)\,r$

ومنه : $u_n = u_k + (n-k)\,r$

خاصيـة :

إذا كانت a ، b و c ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية ،
فإن : $a + c = 2b$

e- مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0
لنحسب المجموع S حيث :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$\Rightarrow \quad S = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + (u_0 + 3r) + \dots + (u_0 + nr)$$

$$\Rightarrow \quad S = (n+1)\, u_0 + r\,(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

لنحسب :

$$X = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$X = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$

$$2X = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ من العوامل}}$$

إذن :

$$\Rightarrow \quad 2X = n\,(n+1)$$

$$\Rightarrow \quad X = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

ومنه :

$$S = (n+1)\, u_0 + r\, \frac{n\,(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad S = (n+1)\left(u_0 + \frac{r\,n}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad S = (n+1)\, \frac{2u_0 + n\,r}{2}$$

$$\Rightarrow \quad S = (n+1)\, \frac{u_0 + u_0 + n\,r}{2}$$

$$\Rightarrow \quad S = (n+1)\, \frac{u_0 + u_n}{2}$$

وبالتالي :

عدد الحدود — الحد الأول — الحد الأخير

$$\boxed{u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1)\, \frac{u_0 + u_n}{2}}$$

بنفس الطريقة نحصل على :

- $u_1 + u_2 + \dots + u_n = n\, \dfrac{u_1 + u_n}{2}$

- $u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = n \dfrac{u_0 + u_{n-1}}{2}$
- $u_3 + u_4 + \ldots + u_9 = 7 \dfrac{u_3 + u_9}{2}$

تطبيـق 1 :

أحسب u_0 وأساس المتتالية الحسابية (u_n) إذا علمت أن :

$$\begin{cases} u_4 + u_6 = 6 \\ u_8 + u_{10} + u_{12} + u_{14} = 228 \end{cases}$$

لدينا :

$$2 u_5 = 6$$
$$u_5 = 3$$

ولدينا :

$$u_9 + u_{13} = 114$$
$$(u_5 + 4r) + (u_5 + 8r) = 114$$

إذن :

$$6 + 12 r = 114$$
$$r = \frac{108}{12} = 9$$

ولدينا :

$$u_5 = u_0 + 5r$$

إذن :

$$3 = u_0 + 45$$
$$u_0 = -42$$

تطبيـق 2 :

$(u_n)_{n \succ 0}$ متتالية حسابيـة.

$$S_n = u_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n$$

أحسب n و S_n إذا كانت $u_1 = 23$ و $u_n = 5$ و $r = -2$

الـجــواب :

لدينا :

$$u_n = u_1 + (n - 1) r$$
$$5 = 23 + (n - 1)(-2)$$
$$2n = 18 + 2$$
$$n = 10$$

إذن :

$$S_n = S_{10} = u_1 + \ldots + u_{10} = 10 \cdot \frac{u_1 + u_{10}}{2} = 140$$

2- المتـتـاليـات الهندسيـة :

1-2 : تمهيـد :

تضـنـن الحد العام للمتتالية (u_n).

إذا علمت أن :

$$u_0 = 2 \quad , \quad u_1 = \sqrt{2}^3 \quad , \quad u_2 = 4 \quad , \quad u_3 = \sqrt{32} \quad , \quad ....$$

نلاحظ أن :

$$u_1 = u_0 \cdot \sqrt{2}$$

$$u_2 = u_1 \cdot \sqrt{2}$$

$$u_3 = u_2 \cdot \sqrt{2}$$

ومنه : $u_{n+1} = \sqrt{2} \cdot u_n$

لدينا :

$$X \quad \begin{cases} \cancel{u_1} = \sqrt{2} \cdot u_0 \\ \cancel{u_2} = \sqrt{2} \cdot \cancel{u_1} \\ \cancel{u_3} = \sqrt{2} \cdot \cancel{u_2} \\ \vdots \\ u_n = \sqrt{2} \cdot \cancel{u_{n-1}} \end{cases}$$

$$u_n = u_0 \cdot \sqrt{2}^n$$

$$n \in \mathbb{N} \ ; \quad u_n = 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^n$$

$$= 2 \cdot 2^{\frac{n}{2}}$$

$$= 2^{\frac{n+2}{2}}$$

هـذه المتتاليـة متتاليـة هندسيـة.

2-2 : تـعريــف :

تكون المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ هـنـدسيـــة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q ،

حيث : $u_{n+1} = q\, u_n \qquad \forall n \geq n_0$

- العدد q يسمـى أسـاس المتتالية الهندسية $(u_n)_{n \geq n_0}$.
- العدد q غير مرتبط بــ n.
- العدد q غيـر منعـدم.

خاصية مميـزة :

تمهيـد : لتكن $(v_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q.

$$\forall n \succ n_0$$

لدينا :

$$v_n = q \cdot v_{n-1}$$

$$v_{n+1} = q \cdot v_n$$

إذن :
$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

$$v_n^2 = v_{n-1} \cdot v_{n+1}$$

خاصية مميزة :

تكون $(v_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان :

$$\forall n \succ n_0 \qquad v_{n+1} \cdot v_{n-1} = v_n^2$$

3-2 : صيغة الحد العام لمتتالية هندسية :

لتكن (v_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_0.

لدينا :

$$X \quad \begin{cases} v_1 = q \cdot v_0 \\ v_2 = q \cdot v_1 \\ v_3 = q \cdot v_2 \\ \vdots \\ v_n = q \cdot v_{n-1} \end{cases}$$

نحصل على : $v_n = v_0 \cdot q^n$

استنتاج وخاصية :

إذا كانت (v_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_0 ،
فإن : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad v_n = v_0 \cdot q^n$

لدينا : $v_n = v_0 \cdot q^n$

إذن : $v_n = v_0 \cdot q \cdot q^{n-1}$

إذن : $v_n = v_1 \cdot q^{n-1}$

ولدينا : $v_n = v_1 \cdot q \cdot q^{n-2}$

إذن : $v_n = v_2 \cdot q^{n-2}$

بصفة عامة :

$$v_n = v_k \cdot q^{n-k}$$

4-2 : مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

لتكن (v_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_1.

لنحسب المجموع $S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots\dots\dots + v_n$

لدينا :
$$S = v_0 + v_0\, q + v_0\, q^2 + \ldots\ldots\ldots + v_0\, q^n$$
$$= v_0\left(1 + q + q^2 + \ldots\ldots\ldots + q^n\right)$$

لنحسب المجموع :
$$X = 1 + q + q^2 + \ldots\ldots\ldots + q^n$$

لدينا :
$$q\,X = q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots\ldots + q^n + q^{n+1}$$
$$X = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots\ldots + q^n$$

إذن :
$$X - q\,X = 1 - q^{n+1}$$
$$X\,(1-q) = 1 - q^{n+1}$$

إذن :
$$\boxed{X = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

ومنه :
$$\boxed{1 + q + q^2 + \ldots\ldots\ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

إذن :
$$\boxed{S = \underbrace{v_0}_{\text{الحد الأول}}\,\frac{1-q^{\overbrace{n+1}^{\text{عدد الحدود}}}}{1-\underbrace{q}_{\text{الأساس}}}}$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots\ldots + v_n = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots\ldots + v_n = v_1 \cdot \frac{1-q^{n}}{1-q}$$

$$v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots + v_{n-1} = v_0 \cdot \frac{1-q^{n}}{1-q}$$

<u>تمريـن تطبيقـي :</u>

1) أحسب المجموع :
$$n \prec m$$
$$S_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^m}$$

2) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\succ 0}$ بحيث حدودها العشرة الأولى هـي حدود متتالية حسابية أساسها r.

وابتداءا من u_{10} تصبح الحدود حدود متتالية هندسية أساسها q علما أن :
$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{16} = \dfrac{-1}{27} \\ r\,q = 1 \end{cases}$$

a) أحسب q و r و u_{10} و u_{11}.

b) أحسب :
$$S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$$

في كل من الحالتين :

* $n \leq 10$

* $n \succ 10$

الجــواب :

(1 طريقة 1 :

$2 \prec m$

$$S_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^m}$$

$$S_n = \frac{1}{2^n} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n+1}\right)$$

طريقة 2 :

$$S_n = \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}\right)$$

$$= \frac{1}{2^n} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right)$$

(2

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{16} = \frac{-1}{27} \\ r\,q = 1 \end{cases}$$

(a لدينا : $u_{16} = u_{10} \cdot q^6$

و : $u_{10} = u_1 \cdot 9\,r = 9\,r$

إذن : $u_{16} = 9\,r \cdot q^6$

$u_{16} = 9\,q^6$

(لأن : $r\,q = 1$)

إذن : $\frac{-1}{27} = 9\,q^5$

إذن : $q^5 = \frac{-1}{27 \cdot 9}$

$q^5 = \frac{-1}{3^5}$

إذن : $q^5 = \left(\frac{-1}{3}\right)^5$

$q = \frac{-1}{3}$

ومنه : $r = -3$

و : $u_{10} = -27$

و : $u_{11} = 9$

(b لنحسب : $S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$

* في الحالة : $n \leq 10$

$$S_n = n\frac{u_1 + u_n}{2}$$

$$= n\frac{u_1 + u_1 + (n-1)r}{2}$$

$$S_n = n\frac{-3n(n-1)}{2}$$

* في الحالة : $n \succ 10$

$$S_n = S_1 + \ldots\ldots + u_9 + u_{10} + u_{11} + \ldots\ldots + u_n$$

$$S_n = S_{10} + (u_{11} + \ldots\ldots + u_n)$$

$$S_n = S_{10} + \left(u_{11}\frac{1-q^{(n-10)}}{1-q}\right)$$

VII- نهايات المتتاليات :

1- تمهيد :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ المعرفة بـ $u_n = f(n) \qquad \forall n \in I$

حيث f دالة عددية.

- إذا كانت I منتهية فلا معنى لحساب النهاية.
- إذا كانت I غير منتهية فهنا يمكن حساب نهاية (u_n) عندما تؤول إلى $+\infty$.

ولدينا : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f(n)$

تذكير :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A \succ 0)\ (\exists B \succ 0)\ (\forall x \in D_f)\quad B \prec x \Rightarrow A \prec f(x)$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A \succ 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\quad N \prec n \Rightarrow A \prec f(n)$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow (\forall A \succ 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\quad N \prec n \Rightarrow A \prec u_n$$

أمثلة :

أحسب نهاية المتتالية إذا كانت المتتالية :

(1 $u_n = \sqrt[3]{n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n+1} = +\infty$$

(2 $u_n = n\,Arc\tan n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} n\,Arc\tan n = +\infty \cdot \frac{\pi}{2}$$
$$= +\infty$$

ملاحظة :

$$\lim u_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall A \succ 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})$$
$$N \prec n \quad \Rightarrow \quad u_n \prec -A$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} (-u_n) = +\infty$$

تذكير :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon \succ 0)\ (\exists B \succ 0)\ (\forall x \in D_f)$$
$$B \prec x \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| \prec \varepsilon$$

-2 نهاية (q^n) :

ناقش حسب قيم العدد الحقيقي q نهاية q^n .

الحالة ①: $1 \prec q$

نضع : $(\alpha \succ 0) \ / \ q = 1 + \alpha$

لدينا : $q^n = (1+\alpha)^n$

بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} \ ; \quad (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$

من أجل : $n = 0$

لدينا : $(1+\alpha)^0 = 1 \quad ; \quad 1 + 0\,\alpha = 1$

إذن : $(1+\alpha)^0 \geq 1 + 0\,\alpha$

من أجل : $n = 1$

لدينا : $(1+\alpha)^1 = 1 + \alpha$

إذن : $(1+\alpha)^1 \geq 1 + \alpha$

من أجل : $n = 2$

لدينا : $(1+\alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2$

إذن : $(1+\alpha)^2 \geq 1 + 2\alpha$

نفترض أن : $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$

ونبين أن : $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha$

لدينا : $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$

إذن : $(1+\alpha)^{n+1} \geq (1+\alpha)(1+n\alpha)$

إذن : $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + n\alpha + \alpha + n\alpha^2$

إذن : $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha + n\alpha$

ومنه : $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$

ولدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + n\alpha = +\infty$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+\alpha)^n = +\infty$

ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

الحالة ②: $q = 1$

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} 1^n = 1$$

الحالة ③: $0 \prec q \prec 1$

لدينا : $1 \prec \frac{1}{q}$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = +\infty$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{q^n} = +\infty$

ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

الحالة ④: $q = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

الحالة ⑤: $-1 \prec q \prec 0$

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-q)^n = 0$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n q^n = 0$

إذن : $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$

الحالة ⑥: $q \leq -1$

نهاية q^n غير موجـودة.

خلاصـــة :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & 1 \prec q \\ 1 & 1 = q \\ 0 & -1 \prec q \prec 1 \\ \text{غير موجـودة} & q \leq -1 \end{cases}$$

تطبيقـــات :

أحسب نهاية (u_n) في الحالات التالية :

(1 $u_n = \left(\dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n$

لدينا : $1 - \sqrt{2} \prec 1 + \sqrt{2}$

إذن : $\dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \prec 1$

لدينا : $\dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} + 1 = \dfrac{1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$

$$= \frac{2}{1 + \sqrt{2}} \succ 0$$

إذن : $\dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \succ -1$

ومنه : $-1 \prec \dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \prec +1$

وبالتالي : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

(2 $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1}{\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1}$$

$$= \frac{1}{-1} = -1$$

مصاديـق تقـارب متتـاليـة
Critère de convergence d'une suite.

نعتبر المتتاليات : $(u_n)_{n\geq n_0}$ ، $(v_n)_{n\geq n_0}$ و $(w_n)_{n\geq n_0}$.

1) إذا وجد عدد صحيح طبيعي N حيث : $\forall n \succ N$

$$u_n \prec v_n \prec w_n$$

و : $\lim u_n = \lim w_n = l$

فإن : $\lim v_n = l$

2) إذا وجد عدد صحيح طبيعي N حيث :

$$\forall n \succ N \qquad u_n \prec v_n$$

و : $\lim u_n = +\infty$

فإن : $\lim v_n = +\infty$

3) $\forall n \succ N \qquad u_n \prec v_n$

و : $\lim v_n = -\infty$

فإن : $\lim u_n = -\infty$

4) إذا وجد N من $\mathbb{N}$ حيث :

$$\forall n \succ N \qquad |u_n| \prec v_n$$

و : $\lim v_n = 0$

فإن : $\lim u_n = 0$

5) إذا وجد N من $\mathbb{N}$ حيث :

$$\forall n \succ N \qquad |u_n - l| \prec v_n$$

و : $\lim v_n = 0$

فإن : $\lim u_n = l$

6) إذا وجد N من $\mathbb{N}$ حيث :

$$\forall n \succ N \qquad |u_n - l| \prec \frac{k}{n}$$

فإن : $\lim u_n = l$

تـعريــف :

نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة إذا وفقط إذا كانت لها نـهاية منتهيـة

ونقول أنـها متبـاعـدة إذا كانت غير متقاربة.

خاصيـات :

إذا كانت $\lim v_n = l'$ و $\lim u_n = l$

فإن : $\lim \ u_n + v_n = l + l'$

$\lim \ u_n \cdot v_n = l \cdot l'$

$\lim \ \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'} \quad (l' \neq 0)$

مبرهنـة :

كل متتالية متقاربة وموجبة تكون نـهايتها موجبة.

مبرهنـة :

إذا كان لك $N \prec n$ ، $u_n \prec v_n$

و $\lim v_n = l'$ و $\lim u_n = l$

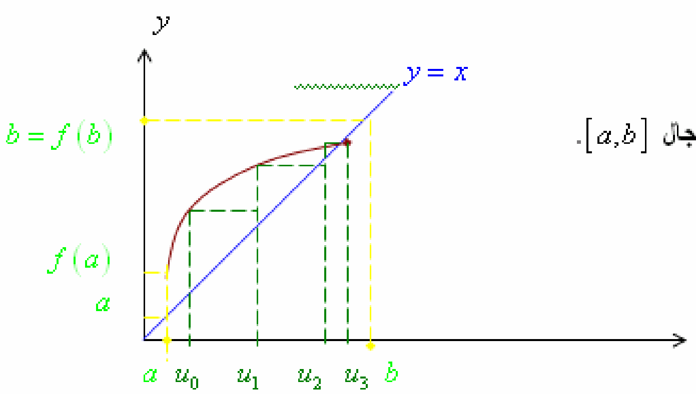
فإن : $l \prec l'$

مبرهنـة :

كل متتالية تزايدية ومكبورة هـي متتالية متقاربة.
كل متتالية تناقصية ومصغورة هـي متتالية متقاربة.

استنتـــاج :

- كل متتالية موجبة وتناقصية هــي متتالية متقاربة.
- كل متتالية سالبة وتزايدية هـي متتالية متقاربة.



متتاليـات مـن نـوع : $u_{n+1} = f(u_n)$

مثـال ① :

ليكن (ℓ_f) المنحنى الممثل للدالة f على المجال $[a,b]$.

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 \in [a\,,\,b] \\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

نلاحظ أن : $\forall\, x \in [a\,,\,b] \quad ; \quad f(x) \in [a\,,\,b]$

يعني أن : $f([a\,,\,b]) \subset [a\,,\,b]$

وبما أن : (ℓ_f) يوجد فوق المنصف.

فإن : $\forall x \in [a\,,\,b] \quad ; \quad f(x) \geq x$

لنبين بالترجع أن (u_n) مكبورة.

- من أجل $n=0$ $\quad a \leq u_0 \leq b$

نفترض أن : $a \leq u_n \leq b$

ونبين أن : $a \leq u_{n+1} \leq b$

نعلم أن لكل x من $[a,b]$ ، $f(x) \in [a\,,\,b]$

وبما أن : $a \leq u_0 \leq b$

فإن : $a \leq f(u_n) \leq b$ إذن : $a \leq u_{n+1} \leq b$

ومنه : $a \leq u_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}\ ; \quad$ ①

ولنبين أن : (u_n) تزايدية.

لدينا : $f(x) \geq x \quad \forall x \in [a,b]$

و : $a \leq u_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$

إذن : $f(u_n) \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

إذن : $u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

وبالتالي : (u_n) تزايدية ②.

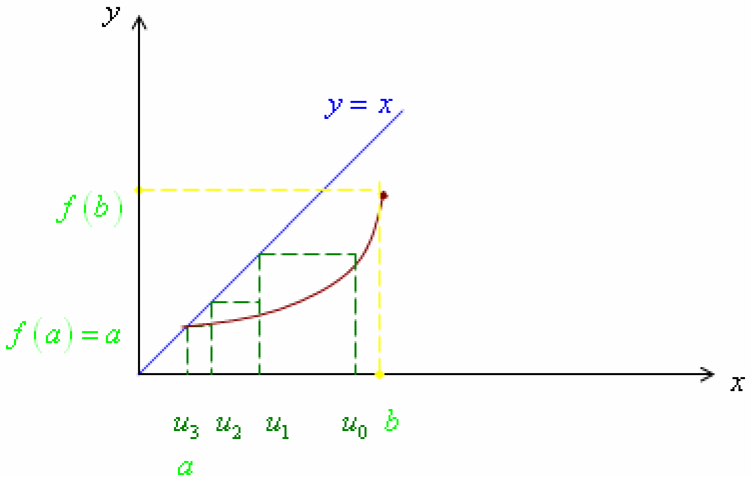
ومن ① و ② نستنتج أن : (u_n) متقاربة.

إذن لها نهاية منتهية l حيث $l = f(l)$

ومنه نهاية (u_n) هي حل المعادلة :

$$a \leq x \leq b \ ; \qquad f(x) = x$$

مثـــال ②:



لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بــ :

$$\begin{cases} u_0 \in [a\ ,\ b] \\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

لدينا : $\forall\, x \in [a\ ,\ b] \quad ; \quad f(x) \in [a\ ,\ b]$

يعني أن : $a \leq x \leq b \quad \Rightarrow \quad a \leq f(x) \leq b$

ولدينا : $\forall x \in [a\ ,\ b] \quad ; \quad f(x) \leq x$

لنبين بالترجع أن : (u_n) مصغـورة.

- من أجل $n = 0$ $\quad a \leq u_0 \leq b$

نفترض أن : $a \leq u_n \leq b$

ونبين أن : $a \leq u_{n+1} \leq b$

نعلم أن لكل x من $[a,b]$ ، $f(x) \in [a\ ,\ b]$

وبما أن : $a \leq u_0 \leq b$

فإن : $a \leq f(u_n) \leq b$

إذن : $a \leq u_{n+1} \leq b$

ومنه : $a \leq u_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}\ ; \quad$ ①

لنبين أن : (u_n) تناقصيــة.

لدينا : $f(x) \leq x \quad \forall x \in [a,b]$

و : $a \leq u_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$f(u_n) \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

إذن : $u_{n+1} \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

وبالتالي : (u_n) تناقصيــة ②.

ومن ① و ② نستنتج أن : (u_n) متقاربــة.

إذن لـها نهاية منتهية l حيث $l = f(l)$

ومنه نهايــة (u_n) هــي حـل المعادلــة :

$$a \le x \le b \; ; \qquad f(x) = x$$

خلاصــة وخـاصيــة :

إذا كانت (u_n) متتالية معرفة بالعلاقـة $u_{n+1} = f(u_n)$

و f متصلة على مجـال I

مـــع : $f(I) \subset I$ و $u_0 \in I$

إذا كانت (u_n) متقاربــة.

فــإن نـهايـتـهـا هـي حـل المعادلــة $f(x) = x$ ، $x \in I$

مثــال :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 1 \end{cases}$$

1) مثل مبيانيــا الدالة المعرفة بـــ :

$$f(x) = \frac{1}{2} x + 1$$

2) بين أن : $f(x) \in [0 , 2]$ ، $\forall x \in [0 , 2]$

3) بين أن : $f(x) \ge x$ ، $\forall x \in [0 , 2]$

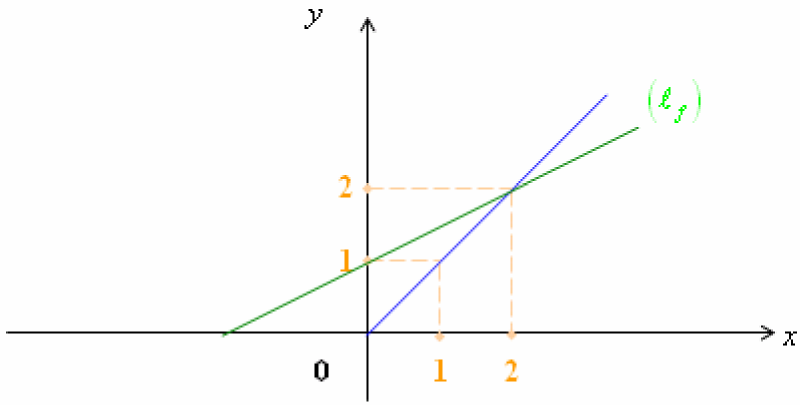
4) بين أن : (u_n) مكبــورة.

5) بين أن : (u_n) تـزايـديـة.

6) استنتج نـهاية (u_n).

الجــواب :

(1



1) بما أن f متصلة وتزايدية على $[0,2]$.

فإن : $f([0,2]) = [1,2] \subset [0,2]$

ومنه : $f(x) \in [0 , 2]$ ، $\forall x \in [0 , 2]$

2) لنبين : $f(x) \ge x$ ، $\forall x \in [0 , 2]$

على المجال $[0,2]$ ، ℓ_f يوجد فوق المنصف.

ومنه : $f(x) \geq x$ ، $\forall x \in [0\,,\,2]$

3) من أجل $n=0$ لدينا : $0 \leq u_0 \leq 2$

لنفترض أن : $0 \leq u_n \leq 2$

بما أن : $f(x) \in [0\,,\,2]$ ، $\forall x \in [0\,,\,2]$

فإن : $0 \leq f(u_n) \leq 2$

أي : $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

ومنه : $0 \leq u_n \leq 2$ ، $\forall x \in [0\,,\,2]$

إذن : (u_n) مكبـورة.

4) لدينا : $f(x) \in [0\,,\,2]$ ، $\forall x \in [0\,,\,2]$

و : $f(x) \geq x$

وبما أن : $u_n \in [0\,,\,2]$ ، $\forall n \in \mathbb{N}$

فإن : $f(u_n) \geq u_n$ ، $\forall n \in \mathbb{N}$

ومنه : $u_{n+1} \geq u_n$

إذن : (u_n) تزايديـة.

5) بما أن : (u_n) تزايديـة ومكبورة .

فإنـها متقاربــة.

ونـهايتها هــي حـل المعادلـة :

$$f(x) = x \quad ، \quad x \in [0\,,\,2]$$

لدينا :

$$f(x) = x \iff \frac{1}{2}x + 1 = x$$

$$\iff x = 2$$

وبما أن : $2 \in [0\,,\,2]$

فإن : $\lim u_n = 2$

تمريـن تطبيـقـي :

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \;;\; u_{n+1} = \dfrac{2 \cdot u_n + 3}{u_n + 2} \end{cases}$$

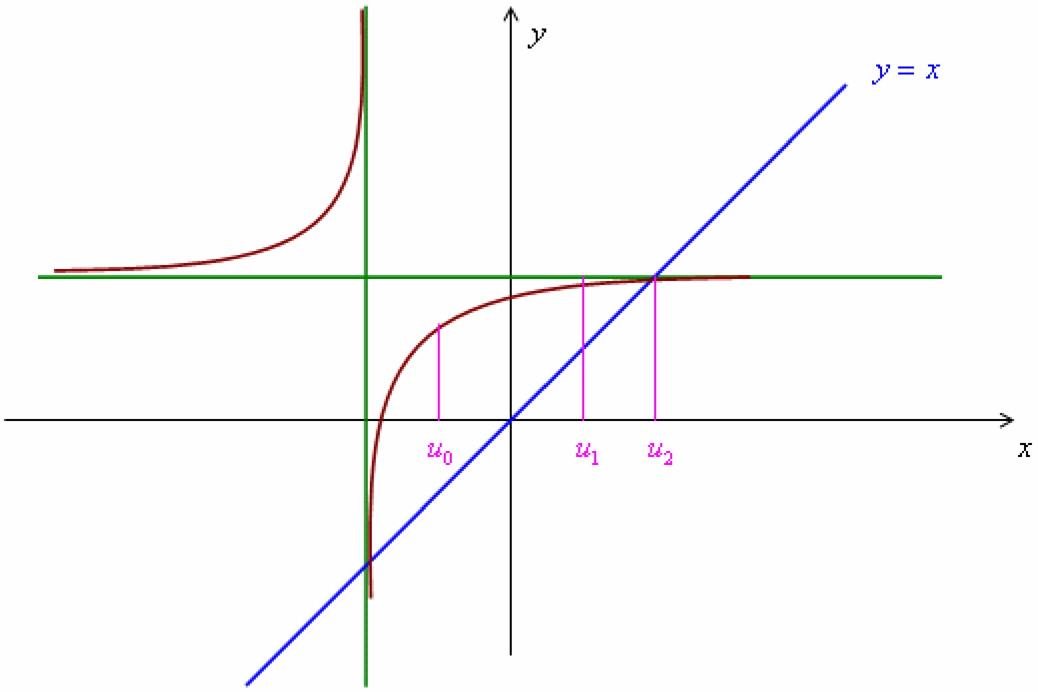
1) أدرس تغيرات الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$

ثم أنشئ (ℓ_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم ، ثم انشئ الحدود الأولى للمتتالية (u_n).

2) بين أن : $-1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

3) استنتج رتابة (u_n) ، u_0 . (u_n) متقاربة.

4) حدد نهاية (u_n).



الجــواب :

1)

1) لنبين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \;;\quad -1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

من أجل $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = -1$

$$-1 \leq u_0 \leq \sqrt{3}$$

من أجل $n = 1$ ، لدينا : $u_1 = 1$

إذن : $-1 \leq u_1 \leq \sqrt{3}$

نفترض أن : $-1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

ونبين أن : $-1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$

لدينا : $-1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

إذن : $f(-1) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt{3})$

إذن : $1 \leq f(u_n) \leq \sqrt{3}$

إذن : $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$

ومنه : $-1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$

وبالتالي : $-1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$