نهائي رياضيات
serie n° 2

المتتاليات العددية (2)
الاســتدلال بالتراجع

أكتوبر 2007
Prof : Remila

.1 المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بـ : $u_0=-1$ و $u_{n+1}=3u_n+2$
برهن بالتراجع أن (u_n) متتالية ثابتة .

.2 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ :
$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ v_{n+1}=v_n+2(n+1)\ \text{ و }\ v_0=1$$
1 – أحسب v_1 ، v_2 ، v_3 و v_4
2 – برهن بالتراجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ v_n=n^2+n+1$

.3 المتتالية (u_n) معرفة بـ :
$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ u_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots\dots+\frac{1}{n(n+1)}$$
بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ u_n=\dfrac{n}{n+1}$

.4 بكالوريا
نضع $S_n=1^2+2^2+3^2+\dots..+n^2$ حيث $n\geq1$
1 – أ) أحسب S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 .
ب) عبر عن S_{n+1} بدلالة S_n .
2 – برهن بالتراجع أنه : $\forall n\geq1\ ,\ S_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

.5 برهن بالتراجع أنه :
1 – $\forall n\geq1\ ,\ 1\times2+2\times3+\dots.+n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
2 – $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ 1^3+2^3+\dots\dots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
3 – $\forall n\geq1\ ,\ 1+2\times2!+3\times3!+\dots.+n(n!)=(n+1)!-1$

.6 بين بالتراجع أنه :
1 – $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ 2^n\geq n$
2 – $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ (1+a)^n\geq1+na\qquad(a\in\mathbb{R}^+)$
3 – $\forall n\geq2\ ,\ 5^n\geq4^n+3^n$
4 – $\forall n\geq3\ ,\ 3^n\geq(n+2)^2$

.7 من أجل كل عدد طبيعي n ، نعتبر الخاصية :
$$P_n\ :\ \ll\ 3^n\geq2^n+5n^2\ \gg$$
1 – بين أن : $\forall n\geq2\ ,\ 3n^2\geq(n+1)^2$
2 – ما هو أصغر عدد طبيعي غير معدوم n الذي من أجله تكون الخاصية P_n صحيحة .
3 – برهن أنه من أجل كل $n\geq5$ تكون P_n صحيحة .

.8 أثبت بالتراجع أنه :
1 – من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n}-2^n$ مضاعف للعدد 7
2 – من أجل كل عدد طبيعي n ، $2^{2n+1}+3^{2n+1}$ مضاعف للعدد 5 .
3 – لكل عدد طبيعي $n\geq1$ ، $3\times5^{2n-1}+2^{3n-2}$ مضاعف للعدد17.
4 – من أجل كل عدد طبيعي n ، $(2n-1)3^n+1$ مضاعف للعدد 4 .

.9 بكالوريا
نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :
$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ u_{n+1}=u_n+2n+3\ \text{ و }\ u_0=1$$
1 – أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
2 – برهن أنه : $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ u_n>n^2$
3 – أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n ثم برهن بالتراجع هذا التخمين.

.10 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ :
$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ v_{n+1}=v_n-\frac{1}{n^2+3n+2}\ \text{ و }\ v_0=1$$
1 – أحسب v_1 ، v_2 ، v_3 و v_4
2 – أعط تخمينا لعبارة v_n بدلالة n ثم برهن بالتراجع هذا التخمين.

.11 المتتالية (u_n) معرفة بـ :
$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}\ \text{ و }\ u_0=1$$
1 – برهن بالتراجع أنه : $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ 0\leq u_n\leq2$
2 – أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

.12 المتتالية (u_n) معرفة بـ :
$$\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\dfrac{5u_n+3}{u_n+3}\ ,n\in\mathbb{N}\end{cases}$$
1 – برهن بالتراجع أنه : $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ 0<u_n\leq3$
2 – أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

.13 المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بـ : $u_0=1$ و $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2(u_n+1)}$
1 – برهن أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ u_n>0$
2 – بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .
3 – أ) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq\dfrac{1}{2}$
ب) استنتج باستعمال التراجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ u_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

.14 المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بـ : $u_0=5$ و $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}(u_n+\dfrac{2}{u_n})$
1 – باستعمال الآلة الحاسبة أحسب u_1 ، u_2 و u_3.
2 – أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)
3 – لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{2}{x})$
– أدرس تغيرات الدالة f
– بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ u_n>\sqrt{2}$ ثم استنتج تغيرات المتتالية (u_n).

.15 المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بـ : $u_0=1$ و $u_1=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n$
برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=2^n$