المتتاليات العددية (1)
مراجعة المتتاليات الحسابية و الهندسية

تمرين 01 :

(u_n) متتالية حسابية أساسها r .

(v_n) و (w_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$v_n = \frac{3}{5}u_n - \frac{1}{2} \quad و \quad w_n = u_{3n} + \sqrt{7}$$

بين أن المتتاليتان (v_n) و (w_n) حسابيتان يطلب تعيين الأساس لكل منهما

تمرين 02 :

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل n من $\mathbb{N}$ بـ :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad و \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{-1+2u_n}{u_n} \end{cases}$$

1 - بين أن (v_n) متتالية حسابية .

2 - أحسب v_n ثم u_n بدلالة n و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين 03 :

1 - أحسب قيمة العددين :

$S = 6+10+14+.....+1002$ و $T = 3+7+11+.....+999$

2 - أحسب المجموع $S_n = 1+4+7+.....+(3n+1)$ بدلالة n

ثم استنتج قيمة العدد : $X = 1+4+7+...+2008$

تمرين 04 :

(u_n) متتالية هندسية أساسها 3 و $u_1 = -2$

1 - أكتب u_n بدلالة n .

2 - أحسب المجموع $u_1 + u_2 + ...+ u_7$

3 - لتكن (v_n) متتالية بحيث : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$

أحسب المجموع $v_1 + v_2 + ...+ v_n$

تمرين 05 :

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتان بحيث: $v_n = u_n + 3$ و $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$

1 - أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

2 - عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n . استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3 - أحسب : $S_n = v_1 + v_2 + ...+ v_n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

4 - أحسب المجاميع التالية :

$T_n = u_1 + u_2 + ...+ u_n$ و $\Sigma_n = u_1^2 + u_2^2 + ...+ u_n^2$

تمرين 06 :

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ :

$$u_n = \frac{3\times 2^n - 4n + 3}{2} \quad و \quad v_n = \frac{3\times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1 - لتكن (w_n) المتتالية المعرفة بـ : $w_n = u_n + v_n$.

برهن أن (w_n) متتالية هندسية .

2 - لتكن (t_n) المتتالية المعرفة بـ : $t_n = u_n - v_n$.

برهن أن (t_n) متتالية حسابية.

3 - عبر عن المجموع التالي بدلالة n : $S_n = u_0 + u_1 + ...+ u_n$

تمرين 07 :

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل n من $\mathbb{N}$ بـ :

$$v_n = 4u_n - 6n + 15 \quad و \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 1 \end{cases}$$

1 - برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

2 - أحسب v_0 ثم أحسب v_n بدلالة n .

استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{19}{4}\times\frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$

3 - برهن أن المتتالية (u_n) يمكن كتابتها على الشكل $u_n = t_n + w_n$

حيث : t_n متتالية هندسية و w_n متتالية حسابية .

4 - أحسب $T_n = t_0 + t_1 + ...+ t_n$ و $W_n = w_0 + w_1 + ...+ w_n$

ثم إستنتج : $U_n = u_0 + u_1 + ...+ u_n$

تمرين 08 :

ليكن a و b عددان حقيقيان موجبان تماما .

نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $\begin{cases} u_0 = a \ , \ u_1 = b \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

نعتبر المتتاليتان (v_n) و (w_n) المعرفتان من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ :

$$v_n = u_{n+1} - 3u_n \quad و \quad w_n = u_{n+1} + 2u_n$$

1 - برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها -2 و حدها الأول $v_0 = b - 3a$ و أحسب v_n بدلالة n ، a و b

2 - برهن أن (w_n) متتالية هندسية ثم أحسب w_n بدلالة n ، a و b

3 - استنتج عبارة u_n بدلالة n ، a و b و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين 09 :

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ :

$$v_n = u_{n+1} - u_n \quad و \quad \begin{cases} u_0 = 0 \ , \ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \dfrac{1}{3}u_{n+1} + \dfrac{2}{3}u_n \end{cases}$$

1 - برهن أن (v_n) متتالية هندسية و أحسب v_n بدلالة n

2 - أحسب $S_n = v_0 + v_1 + ...+ v_{n-1}$ ثم استنتج u_n بدلالة n

3 - أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين 10 :

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بـ :

$$v_n = u_n + bn - 1 \quad و \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3 \end{cases}$$

1 - بين أنه يوجد عدد طبيعي b تكون من أجله المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول

2 - عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n

3 - أحسب $S_n = u_0 + u_1 + ...+ u_n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2}$

Remilanath