# حلول تمارين الكتاب

النهايات و الإستمرارية

## 1- نهاية منتهية أو غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$ :

### حل التمرين 1 ص 26 ج1 :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{3x-2}{x+1}$ .

1) إيجاد عدد حقيقي $A$ حيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]2,9;3,1[$ :

لدينا $2,9<f(x)<3,1$ ومنه $2,9\times\frac{x+1}{x+1}<\frac{3x-2}{x+1}<3,1\times\frac{x+1}{x+1}$ ، أي $2,9(x+1)<3x-2<3,1(x+1)$

ومنه $2,9(x+1)+2<3x<3,1(x+1)+2$ أي $2,9x+4,9<3x<3,1x+5,1$

ولدينا $3x-3,1x-5,1<0$ و $2,9x+4,9-3x<0$ ، ومنه $-0,1x<5,1$ و $-0,1x<-4,9$

إذن : $x>-\frac{5,1}{0,1}$ و $x>\frac{4,9}{0,1}$

أي أن $A=49$ ، لأن $-51$ لا تنتمي إلى مجال تعريف الدالة $f$ .

2) إثبات أن المستقيم $\Delta$ الذي معادلته $y=3$ مقارب للمنحنى $C_f$ الممثل للدالة $f$ :

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=3$ مقارب لمنحنى الدالة $f$ .

3) دراسة وضعية المنحنى $C_f$ بالنسبة إلى المستقيم $\Delta$ :

لدينا : $f(x)-3=\frac{3x-2}{x+1}-3=\frac{3x-2-3x-3}{x+1}=\frac{-5}{x+1}$ ، أي $\frac{-5}{x+1}<0$

ومنه $f(x)-3<0$ ، إذن : المنحنى $C_f$ يقع تحت المستقيم $(\Delta):y=3$ .

### حل التمرين 2 ص 26 ج1 :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ :

1) إيجاد عدد حقيقي $A$ حيث إذا كان $x<A$ فإن $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]0,9;1,1[$ :

لدينا $0,9<f(x)<1,1$ ومنه $0,9\times\frac{x-1}{x-1}<\frac{x+1}{x-1}<1,1\times\frac{x-1}{x-1}$ ، أي $0,9(x-1)<x+1<1,1(x-1)$

ومنه $0,9(x-1)-1<x<1,1(x-1)-1$ أي $0,9x-1,9<x<1,1x+0,1$

ولدينا $x-1,1x-0,1<0$ و $0,9x-1,9-x<0$ ، ومنه $0,1x<0,1$ و $-1,9x<1,9$

إذن : $x<1$ و $x>-1$

أي أن $A=1$ ، لأن $-1$ لا تنتمي إلى مجال تعريف الدالة $f$ .

2) إثبات أن المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحنى $C_f$ الممثل للدالة $f$ :

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب لمنحنى الدالة $f$ .

3) دراسة وضعية المنحنى $C_f$ بالنسبة إلى المستقيم $\Delta$ :

لدينا : $f(x)-1=\frac{x+1}{x-1}-1=\frac{x+1-x+1}{x-1}=\frac{2}{x-1}$ ، أي $\frac{2}{x-1}>0$

ومنه $f(x)-1>0$ ، إذن : المنحنى $C_f$ يقع فوق المستقيم $(\Delta):y=1$ .

## حل التمرين 3 ص 26 ج1 :

- إثبات باستعمال التعريف أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$ :

لدينا حسب التعريف : نهاية $l$ على $+\infty$ أو $-\infty$ يساوي الصفر

ولدينا هنا لمّا $x$ يؤول إلى $+\infty$ : $1$ على $+\infty$ ناقص 1 يساوي حسب التعريف : 0 أي :

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$ .

## حل التمرين 4 ص 26 ج1 :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x-3$ :

- إثبات باستعمال التعريف أن : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ :

لدينا حسب التعريف : نهاية $l>0$ في $+\infty$ تساوي $+\infty$ .

ولدينا هنا لمّا $x$ يؤول إلى $+\infty$ : $2>0$ في $+\infty$ ناقص 3 يساوي حسب التعريف : $+\infty$ ، أي

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ .

## حل التمرين 5 ص 26 ج1 :

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\sqrt{1-x}$ :

- إثبات باستعمال التعريف أن : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ :

لدينا حسب التعريف بغض النظر عن الجذر : نهاية $l<0$ في $-\infty$ تساوي $+\infty$ .

ولدينا هنا لمّا $x$ يؤول إلى $-\infty$ : 1 ناقص $-1<0$ في $-\infty$ يساوي حسب التعريف : $+\infty$ ، أي :

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{1-x}\right]=+\infty$ .

## حل التمرين 6 ص 26 ج1 :

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$ ، وليكن $C_f$ تمثيلها البياني في معلم :

1) إثبات أن المستقيم $\Delta$ الذي معادلته $y=x$ مقارب للمنحنى $C_f$ عند $+\infty$ :

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x+\frac{1}{x-1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x-1}\right]=0$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة

$y=x$ مقارب لمنحنى الدالة $f$ عند $+\infty$ .

2) دراسة وضعية المنحنى $C_f$ بالنسبة إلى المستقيم $\Delta$ :

لدينا $f(x)-(x)=x+\frac{1}{x-1}-x=\frac{1}{x-1}$ ، أي $\frac{1}{x-1}>0$

ومنه $f(x)-(x)>0$ ، إذن : المنحنى $C_f$ يقع فوق المستقيم $(\Delta):y=x$ .

## حل التمرين 7 ص 26 ج1 :

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x-1-\frac{2}{x^2+1}$ ، وليكن $C_f$ تمثيلها البياني في معلم :

1) إثبات أن المستقيم $\Delta$ الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب للمنحنى $C_f$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ :

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-2x-1]=\lim_{x\to-\infty}\left[2x-1-\frac{2}{x^2+1}-2x-1\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{2}{x^2+1}\right]=0$ ، و

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x-1]=\lim_{x\to+\infty}\left[2x-1-\frac{2}{x^2+1}-2x-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{x^2+1}\right]=0$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=2x-1$ مقارب لمنحنى الدالة $f$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ .

2) دراسة وضعية المنحنى $C_f$ بالنسبة إلى المستقيم $\Delta$ :

لدينا $f(x)-(2x-1)=2x-1-\frac{2}{x^2+1}-(2x-1)=-\frac{2}{x^2+1}$ ، أي $-\frac{2}{x^2+1}<0$

ومنه $f(x)-(2x-1)<0$ ، إذن : المنحنى $C_f$ يقع أسفل المستقيم $(\Delta):y=2x-1$ .

## حل التمرين 8 ص 26 ج1 :

أ) لدينا $f$ دالة معرفة بـ : $f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ حيث $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ ، وليكن $C_f$ تمثيلها البياني في معلم :

- إثبات أن $C_f$ يقبل المستقيم $(\Delta):y=1$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$ :

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-1]=\lim_{x\to-\infty}\left[1+\frac{1}{\sqrt{|x|}}-1\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right]=0$ ، و

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1]=\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{1}{\sqrt{|x|}}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right]=0$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب لمنحنى الدالة $f$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ .

- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى $\Delta$ :

لدينا $f(x)-(1)=1+\frac{1}{\sqrt{|x|}}-1=\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ ، أي $\frac{1}{\sqrt{|x|}}>0$

ومنه $f(x)-(1)>0$ ، إذن : المنحنى $C_f$ يقع فوق المستقيم $(\Delta):y=1$ .

ب) لدينا $f$ دالة معرفة بـ : $f(x)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{x^2}$ ، وليكن $C_f$ تمثيلها البياني في معلم :

- إثبات أن $C_f$ يقبل المستقيم $(\Delta):y=-\frac{1}{3}$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$ :

**قاعدة :**

$f$ دالة معرفة بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+d}$ ، لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب لمنحنى الدالة يكفي حساب نهاية الجزء $\frac{c}{x+d}$ عند $-\infty$ أو عند $+\infty$

فإذا كانت النهاية تساوي الصفر فالمستقيم $y=ax+b$ مقارب لمنحنى الدالة عند $-\infty$ أو عند $+\infty$ .

لدينا في هذه الدالة: $\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{x^2}\right]=0$ ومنه المستقيم $(\Delta):y=-\frac{1}{3}$ مستقيم مقارب عند $-\infty$ ، وكذلك عند $+\infty$

- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى $\Delta$ :

لدينا $f(x)-\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{x^2}$ ، أي $-\frac{1}{x^2}<0$ إذن : المنحنى $C_f$ يقع تحت $(\Delta):y=-\frac{1}{3}$

## حل التمرين 9 ص 26 ج1 :

أ) لدينا $f$ دالة معرفة بـ : $f(x)=2x+1+\frac{5}{x-3}$ حيث $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$، وليكن $C_f$ تمثيلها البياني :

- إثبات أن $C_f$ يقبل المستقيم $(\Delta): y=2x+1$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$ :

لدينا في هذه الدالة: $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{5}{x-3}\right]=0$ ومنه المستقيم $(\Delta): y=2x+1$ مستقيم مقارب عند $-\infty$ ،
وكذلك عند $+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{5}{x-3}\right]=0$ .

- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى $\Delta$ :

لدينا $f(x)-(2x+1)=2x+1+\frac{5}{x-3}-2x-1=\frac{5}{x-3}$ ، أي $\frac{5}{x-3}>0$ إذن : المنحنى $C_f$ يقع فوق المستقيم $(\Delta): y=2x+1$

ب) لدينا $f$ دالة معرفة بـ : $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2-1}$ ، وليكن $C_f$ تمثيلها البياني في معلم :

- إثبات أن $C_f$ يقبل المستقيم $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$ :

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x^2-1}\right]=0$ ، و
$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x^2-1}\right]=0$ ، ومنه المستقيم $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x$ مقارب لمنحنى الدالة $f$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ .

- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى $\Delta$ :

لدينا $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{2}x=\frac{x}{x^2-1}$ ، أي $\frac{x}{x^2-1}>0$ إذن : المنحنى $C_f$ يقع فوق المستقيم $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x$ .

## حل التمرين 10 ص 26 ج1 :

أ) لدينا $f$ دالة معرفة بـ : $f(x)=x+3-\frac{2}{|x|}$ ، وليكن $C_f$ تمثيلها البياني في معلم:

- إثبات أن $C_f$ يقبل المستقيم $(\Delta): y=x+3$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$ :

لدينا في هذه الدالة: $\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{2}{|x|}\right]=0$ ومنه المستقيم $(\Delta): y=x+3$ مستقيم مقارب عند $-\infty$ ، وكذلك عند $+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{|x|}\right]=0$ .

- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى $\Delta$ :

لدينا $f(x)-(x+3)=x+3-\frac{2}{|x|}-x-3=-\frac{2}{|x|}$ ، أي $-\frac{2}{|x|}<0$ إذن : المنحنى $C_f$ يقع تحت المستقيم $(\Delta): y=x+3$ .

ب) لدينا $f$ دالة معرفة بـ : $f(x)=\frac{\sin x}{x}-x+1$ ، وليكن $C_f$ تمثيلها البياني في معلم:

- إثبات أن $C_f$ يقبل المستقيم $(\Delta): y=-x+1$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$ :

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{\sin x}{x}-x+1+x-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{\sin x}{x}\right]\neq 0$ ، و نفس الشيء عند $+\infty$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=-x+1$ ليس بمستقيم مقارب لمنحنى الدالة $f$ عند $-\infty$ وَ لا عند $+\infty$

- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى $\Delta$ :

لدينا $f(x)-(-x+1)=f(x)=\frac{\sin x}{x}-x+1+x-1=\frac{\sin x}{x}$ ، أي أنه لا يمكن تحديد إشارة $\frac{\sin x}{x}$

إذن : المنحنى $C_f$ يقع تحت المستقيم $(\Delta): y=x+3$ .

## حل التمرين 11 ص 26 ج1 :

أ) لدينا $f$ دالة معرفة بـ : $f(x)=\frac{x^2+x-1}{1-2x}$ ، حيث $D_f=\mathbb{R}$ ، وليكن $C_f$ تمثيلها البياني في معلم :

- إثبات أن $C_f$ يقبل المستقيم $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$ :

لدينا في هذه الدالة:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+x-1}{1-2x}-\left(-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+x-1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}-x^2-\frac{6x}{4}}{1-2x}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{-\frac{1}{4}}{1-2x}\right]=0$ ومنه المستقيم $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ مستقيم مقارب عند $-\infty$ ، وكذلك عند $+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-\frac{1}{4}}{1-2x}\right]=0$ .

- تحديد وضعية المنحنى $C_f$ بالنسبة إلى $\Delta$ :

لدينا $f(x)-(x+3)=\frac{x^2+x-1}{1-2x}+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}=-\frac{\frac{1}{4}}{1-2x}$ ، أي $-\frac{\frac{1}{4}}{1-2x}<0$ إذن : المنحنى $C_f$ يقع تحت المستقيم $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ .

ب) لدينا $f$ دالة معرفة بـ : $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1}$ ، وليكن $C_f$ تمثيلها البياني في معلم :

- إثبات أن $C_f$ يقبل المستقيم $(\Delta): y=x$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$ :

لدينا في هذه الدالة: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3+1}{x^2-1}-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3+1-x^3+x^2}{x^2-1}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{x^2}\right]=1$

ومنه المستقيم $(\Delta): y=x$ ليس بمستقيم مقارب عند $-\infty$ ، و لا عند $+\infty$ لأن :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x^2}\right]=1$ .

- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى $\Delta$ :

لدينا $f(x)-x=\frac{x^3+1}{x^2-1}-x=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ ، أي $\frac{x^2+1}{x^2-1}>0$ إذن : المنحنى $C_f$ يقع فوق المستقيم $(\Delta): y=x$ .

## 2- نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيقي :

### حل التمرين 12 ص 26 ، 27 ج1 :

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x+3$ ، نريد دراسة سلوك $f(x)$ لمّا $x$ يؤول إلى 2 :

1) وضع تخمين لسلوك $f(x)$ لمّا $x$ يؤول إلى 2 :

عند حساب : $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}[2x+3]=f(2)=2(2)+3=7$ يمكن التخمين بأن نهاية الدالة $f$ هي 7 لمّا $x$ يؤول إلى 2 . أي أن المنحنى الممثل للدالة $f$ يشمل النقطة $(2;7)$ .

2) إيجاد مجال بحيث لما ينتمي $x$ إليه ، $f(x)$ ينتمي إلى $]6,99;7,01[$ :

معناه $6,99<f(x)<7,01$ ، يكافئ $6,99<2x+3<7,01$ ، ومنه $3,99<2x<4,01$

يكافئ $1,995<x<2,005$

إذن: $x\in]1,995;2,005[$ .

3) $\alpha$ عدد حقيقي حيث $0<\alpha<1$ :

- إيجاد المجال الذي يجب أن ينتمي إليه $x$ لمّا $f(x)$ ينتمي إلى $]7-\alpha;7+\alpha[$ :

معناه $7-\alpha<2x+3<7+\alpha$ ، يكافئ $7-\alpha-3<2x+3-3<7+\alpha-3$ ، ومنه $4-\alpha<2x<4+\alpha$ ، وهذا يكافئ $\frac{4-\alpha}{2}<x<\frac{4+\alpha}{2}$ ،

إذن: $x\in\left]\frac{4-\alpha}{2};\frac{4+\alpha}{2}\right[$ .

- عند اختيار $\alpha$ صغير بالقدر الذي نريد ، نجد $x=2$ ومنه نستنتج أن نهاية الدالة $f$ هي 7 لمّا $x$ يؤول إلى 2 . أي أن التخمين السابق صحيح .

### حل التمرين 13 ص 27 ج1 :

- تخمين النهاية عند 4 للدالة $f$ المعرفة بـ : $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$ :

عند حساب : $\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\left[\frac{x+2}{x-2}\right]=f(4)=\frac{4+2}{4-2}=\frac{6}{2}=3$ يمكن التخمين بأن نهاية الدالة $f$ هي 3 لمّا $x$ يؤول إلى 4 .

- إيجاد مجال $I$ مركزه 4 بحيث إذا كان $x\in I$ ، فإن $f(x)\in]2,95;3,05[$ :

معناه $2,95<f(x)<3,05$ ، ومنه $2,95<\frac{x+2}{x-2}<3,05$ ، بضرب طرفي المتراجحة في $(x-2)$

نجد $2,95(x-2)<x+2<3,05(x-2)$ ، ومنه $2,95x-5,9<x+2<3,05x-6,1$ ،

يكافئ $\begin{cases}x+2>2,95x-5,9\\x+2<3,05x-6,1\end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases}1,95x<7,9\\2,05x>8,1\end{cases}$ ، أي $\begin{cases}x<4,05\\x>3,95\end{cases}$ ، يكافئ $3,95<x<4,05$

إذن: $x\in I=]3,95;4,05[$ .

### حل التمرين 14 ص 27 ج1 :

- تخمين النهاية عند 2 للدالة $f$ المعرفة بـ : $f(x)=\frac{3x+4}{(x-2)^2}$ :

عند حساب : $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left[\frac{3x+4}{(x-2)^2}\right]=\frac{6+4}{0^+}=+\infty$ يمكن التخمين بأن نهاية الدالة $f$ هي $(+\infty)$ لمّا $x$ يؤول إلى 2 .

- إيجاد عدد حقيقي $a$ بحيث إذا كان $x \in ]2-a;2+a[$ فإن $f(x)>10^3$ :

$f(x)>10^3$ معناه : $\frac{3x+4}{(x-2)^2}>10^3$ ، ومنه $3x+4>10^3(x-2)^2$ ،

أي $3x+4>10^3(x^2-4x+2)$ ، ومنه $3x+4>1000x^2-4000x+2000$

يكافئ $1000x^2-4003x+3996<0$ ،

نحل المتراجحة:

المميز: $\Delta=4009$ ومنه : $x_1=\frac{4003+\sqrt{4009}}{2000}$ ، $x_1=\frac{4003-\sqrt{4009}}{2000}$

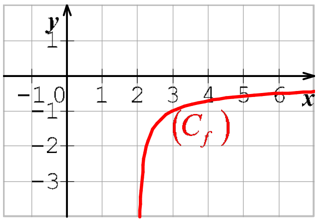
أي $\frac{4003-\sqrt{4009}}{2000}<x<\frac{4003+\sqrt{4009}}{2000}$ ومنه $1,901488751<x<2,101511249$

إذن: $x\in]2-1,9;2+2,1[$ أي $x\in]0,1;4,1[$

يمكن أخذ $\boxed{a=0,1}$ .

## حل التمرين 15 ص 27 ج1 :

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ :




1) لدينا $(C_f)$ هو التمثيل البياني للدالة $f$ :

- يمكن أن نخمن بالنسبة لسلوك الدالة $f$ عندما يؤول $x$ إلى 2 بأن $(C_f)$ يؤول إلى $(-\infty)$ .

2) $A$ عدد حقيقي موجب تماماً:

- إيجاد المجال الذي ينتمي إليه $x$ بحيث يكون $f(x)\leq -A$ :

## حل التمرين 16 ص 27 ج1 :

1) دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ وعند 1 للدالة $f$ المعرفة بـ : $f(x)=\frac{2x+5}{x-1}$ :

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x+5}{x-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x}{x}\right]=2$ .

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x+5}{x-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x}{x}\right]=2$ .

$\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}1}\left[\frac{2x+5}{x-1}\right]=\lim_{x\xrightarrow{<}1}\left[\frac{7}{0^-}\right]=-\infty$ .

$\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\left[\frac{2x+5}{x-1}\right]=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\left[\frac{7}{0^+}\right]=+\infty$ .

2) تحديد معادلات المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة $f$ :

لدينا $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=2$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة $f$ في جوار $-\infty$ وَ $+\infty$ .

ولدينا $f(x)-2=\frac{2x+5}{x-1}-2=\frac{2x+5-2x+2}{x-1}=\frac{7}{x-1}$

ومنه منحنى الدالة $f$ يقع فوق المستقيم ذو المعادلة $y=2$ لمّا $x>1$ ، ويقع تحته لمّا $x<1$ .

و لدينا كذلك $\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة $f$ على يسار 1 .

و لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to 1\\ >}} f(x) = +\infty$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة $f$ على يمين 1 .

## حل التمرين 17 ص 27 ج1 :

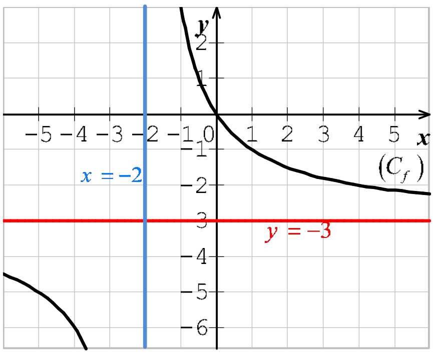
$f$ دالة عددية معرفة بـ : $f(x) = \dfrac{-3x}{x+2}$

1) تعيين مجموعة تعريف الدالة $f$ ثم حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف :

$f(x)$ معرفة معناه $x + 2 \neq 0$ ، ومنه $x \neq -2$ ، أي أن $D_f = \mathbb{R} - \{-2\} = ]-\infty; -2[ \cup ]-2; +\infty[$ .

- النهايات :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{-3x}{x+2}\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{x(-3)}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{-3}{1+\dfrac{2}{x}}\right] = -3$ .




$\lim\limits_{\substack{x \to -2\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2\\ <}} \left[\dfrac{-3x}{x+2}\right] = \left[\dfrac{6}{0^-}\right] = -\infty$ .

$\lim\limits_{\substack{x \to -2\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2\\ >}} \left[\dfrac{-3x}{x+2}\right] = \left[\dfrac{6}{0^+}\right] = +\infty$ .

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{-3x}{x+2}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{-3}{1+\dfrac{2}{x}}\right] = -3$ .

2) تحديد معادلات المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة $f$ ودراسة وضعيته بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي :

لدينا $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -3$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = -3$ مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة $f$ في جوار $-\infty$ و $+\infty$ .

ولدينا $f(x) - 3 = \dfrac{-3x}{x+2} + 3 = \dfrac{6}{x+2}$

ومنه منحنى الدالة $f$ يقع فوق المستقيم ذو المعادلة $y = -3$ لمّا $x > -2$ ، ويقع تحته لمّا $x < -2$ .

و لدينا كذلك $\lim\limits_{\substack{x \to -2\\ <}} f(x) = -\infty$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = -2$ مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة $f$ على يسار $-2$ .

و لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to -2\\ >}} f(x) = +\infty$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = -2$ مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة $f$ على يمين $-2$ .

## 3- تتمات على النهايات :

## حل التمرين 18 ص 27 ج1 :

أ) $f(x) = 2x^3 - x + 1$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ و $+\infty$ :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[2x^3 - x + 1\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[2x^3\right] = -\infty$ .

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[2x^3 - x + 1\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[2x^3\right] = +\infty$ .

ب) $f(x) = -3x^4 + 2x + 4$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ و $+\infty$ :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[-3x^4 + 2x + 4\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[-3x^4\right] = -\infty$ .

. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-3x^4+2x+4\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-3x^4\right]=-\infty$

ج) $f(x)=-x^3+x^2+x+1$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ :

. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x^3+x^2+x+1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x^3\right]=+\infty$

. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x^3+x^2+x+1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x^3\right]=-\infty$

## حل التمرين 19 ص 27 ج1 :

أ) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند $-1$ :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x-1}{x+1}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x}{x}\right]=1$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x-1}{x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{x}\right]=1$ .

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}\left[\dfrac{x-1}{x+1}\right]=\left[\dfrac{-2}{0^-}\right]=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\left[\dfrac{x-1}{x+1}\right]=\left[\dfrac{-2}{0^+}\right]=-\infty$ .

ب) $f(x)=\dfrac{2x^2+5}{x-2}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند 2 :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2x^2+5}{x-2}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2x^2}{x}\right]=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^2+5}{x-2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^2}{x}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\left[\dfrac{2x^2+5}{x-2}\right]=\left[\dfrac{13}{0^-}\right]=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\left[\dfrac{2x^2+5}{x-2}\right]=\left[\dfrac{13}{0^+}\right]=+\infty$ .

ج) $f(x)=\dfrac{-4x+1}{3-x}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند 3 :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{-4x+1}{3-x}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{-4x}{-x}\right]=4$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{-4x+1}{3-x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{-4x}{-x}\right]=4$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}\left[\dfrac{-4x+1}{3-x}\right]=\left[\dfrac{-11}{0^+}\right]=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3}\left[\dfrac{-4x+1}{3-x}\right]=\left[\dfrac{-11}{0^-}\right]=+\infty$

## حل التمرين 20 ص 27 ج1 :

أ) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x}{x^2+1}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x}\right]=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{x^2+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{x^2}\right]=0$

ب) $f(x)=\dfrac{x+1}{(x-2)^2}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند 2 :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x+1}{(x-2)^2}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x+1}{x^2-4x+4}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x}\right]=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x+1}{(x-2)^2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{x^2}\right]=0$

. $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\left[\dfrac{x+1}{(x-2)^2}\right]=\left[\dfrac{3}{0^+}\right]=+\infty$

ج) $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند $0$ :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3+1}{x^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]=-\infty \text{ ، } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+1}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left[\frac{x^3+1}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty \text{ .}$$

## حل التمرين 21 ص 27 ج1 :

أ) $f(x)=2x-1+\frac{3}{x}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند $0$ :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=(-\infty)-1+0=-\infty \text{ ، } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=+\infty \text{ .}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=\left[0-1+\frac{3}{0^-}\right]=-\infty \text{ .}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=\left[0-1+\frac{3}{0^+}\right]=+\infty \text{ .}$$

ب) $f(x)=3-\frac{1}{(x+1)^2}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند $-1$ :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=(-\infty)-1+0=-\infty \text{ ، } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=+\infty \text{ .}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=\left[0-1+\frac{3}{0^-}\right]=-\infty \text{ .}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=\left[0-1+\frac{3}{0^+}\right]=+\infty \text{ .}$$

ج) $f(x)=x^2+x-\frac{1}{x-3}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند $3$ :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^2+x-\frac{1}{x-3}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x^2\right]=+\infty \text{ ، } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2+x-\frac{1}{x-3}\right]=+\infty \text{ .}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}3} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}3}\left[x^2+x-\frac{1}{x-3}\right]=\left[9+3-\frac{1}{0^-}\right]=+\infty \text{ .}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}3} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}3}\left[x^2+x-\frac{1}{x-3}\right]=\left[9+3-\frac{1}{0^+}\right]=-\infty \text{ .}$$

## حل التمرين 22 ص 27 ج1 :

أ) $f(x)=\frac{1}{(x-1)(4-x)}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند $1$ ، وعند $4$ :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{(x-1)(4-x)}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{5x-x^2-4}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{x^2}\right]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{(x-1)(4-x)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{5x-x^2-4}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{x^2}\right]=0 \text{ .}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}1}\left[\frac{1}{(x-1)(4-x)}\right]=\left[\frac{1}{(0^-)3}\right]=-\infty \text{ .}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1}\left[\frac{1}{(x-1)(4-x)}\right] = \left[\frac{1}{(0^+)3}\right] = +\infty$$ •

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 4} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 4}\left[\frac{1}{(x-1)(4-x)}\right] = \left[\frac{1}{3(0^+)}\right] = +\infty$$ •

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 4} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 4}\left[\frac{1}{(x-1)(4-x)}\right] = \left[\frac{1}{3(0^-)}\right] = -\infty$$ •

ب) $f(x) = 2x + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{3-x}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند $-1$ ، وعند $3$ :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}\left[2x + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{3-x}\right] = [-\infty + 0 - 0] = -\infty$$ •

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[2x + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{3-x}\right] = [+\infty + 0 - 0] = +\infty$$ •

$$\lim_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} -1}\left[2x + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{3-x}\right] = \left[-2 + (-\infty) - \frac{1}{2}\right] = -\infty$$ •

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -1}\left[2x + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{3-x}\right] = \left[-2 + (+\infty) - \frac{1}{2}\right] = +\infty$$ •

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 3} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 3}\left[2x + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{3-x}\right] = \left[6 + \frac{1}{4} - (+\infty)\right] = -\infty$$ •

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 3} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 3}\left[2x + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{3-x}\right] = \left[6 + \frac{1}{4} - (-\infty)\right] = +\infty$$ •

ج) $f(x) = x^2 + \frac{1}{(x+2)^2}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند $-2$ :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}\left[x^2 + \frac{1}{(x+2)^2}\right] = [+\infty + 0] = +\infty$$ •

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[x^2 + \frac{1}{(x+2)^2}\right] = [+\infty + 0] = +\infty$$ •

$$\lim_{x \xrightarrow{<} -2} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} -2}\left[x^2 + \frac{1}{(x+2)^2}\right] = \left[4 + \frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$ •

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -2}\left[x^2 + \frac{1}{(x+2)^2}\right] = \left[4 + \frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$ •

## حل التمرين 23 ص 28 ج1 :

أ) $f(x) = 2x^2 + \sqrt{x} + 1$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$ :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[2x^2 + \sqrt{x} + 1\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[2x^2\right] = +\infty$$ •

ب) $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2\sqrt{x}$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$ و عند $1$ :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{1}{x-1} + 2\sqrt{x}\right] = 0 + (+\infty) = +\infty$$ •

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 1}\left[\frac{1}{x-1} + 2\sqrt{x}\right] = \left[\frac{1}{0^-} + 2\right] = -\infty$$ •

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \left[\dfrac{1}{x-1} + 2\sqrt{x}\right] = \left[\dfrac{1}{0^+} + 2\right] = +\infty$ .

## حل التمرين 24 ص 28 ج1 :

أ) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}-2}$ ، دراسة النهاية عند 4 :

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 4} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 4} \left[\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-2}\right] = \left[\dfrac{5}{0^-}\right] = -\infty$ .

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 4} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 4} \left[\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-2}\right] = \left[\dfrac{5}{0^+}\right] = +\infty$ .

ب) $f(x) = (1-x)\left(2-\sqrt{-x}\right)$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ و عند 0 :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[(1-x)\left(2-\sqrt{-x}\right)\right] = (+\infty)(-\infty) = -\infty$ .

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left[(1-x)\left(2-\sqrt{-x}\right)\right] = 1 \times 0 = 0$ .

## حل التمرين 25 ص 28 ج1 :

أ) $f(x) = \dfrac{2}{x} - \cos x$ ، دراسة النهاية عند 0 و عند $+\infty$ :

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \left[\dfrac{2}{x} - \cos x\right] = \left[\dfrac{2}{0^-} + 1\right] = -\infty$ .

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \left[\dfrac{2}{x} - \cos x\right] = \left[\dfrac{2}{0^+} + 1\right] = +\infty$ .

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{2}{x} - \cos x\right] = 0 - \lim\limits_{x \to +\infty} \cos x$ (غير معرفة) .

ب) $f(x) = \sin(2x) + x$ ، دراسة النهاية عند $\dfrac{\pi}{4}$ و عند $+\infty$ :

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\sin(2x) + x\right] = \left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{\pi}{4}\right] = 1 + \dfrac{\pi}{4}$ .

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{2}{x} - \cos x\right] = 0 - \lim\limits_{x \to +\infty} \cos x$ .

## حل التمرين 26 ص 28 ج1 :

أ) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$ :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^3 + x^2 - x - 1\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^3\right] = +\infty$ .

ب) $f(x) = \dfrac{x+2}{3-\sqrt{x}}$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$ :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{x+2}{3-\sqrt{x}}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}} - 1\right)}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{\sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}}{\dfrac{3}{\sqrt{x}} - 1}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[-\sqrt{x}\right] = -\infty$ .

## حل التمرين 27 ص 28 ج1 :

أ) $f(x)=\sqrt{x}-1-2x$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$ :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}-1-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}-2\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-2x\right]=-\infty .$$

ب) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1-\sqrt{x}}{x^2+2}$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$ :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+x+1-\sqrt{x}}{x^2+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x^2}\right]=1 .$$

## حل التمرين 28 ص 28 ج1 :

أ) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$ :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\times\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right]=0$$

ب) $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-x$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$ :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-x+1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)\times\frac{\sqrt{x^2-x+1}+x}{\sqrt{x^2-x+1}+x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{=x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x+1}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+1}\right]=-\frac{1}{2}$$

## حل التمرين 29 ص 28 ج1 :

الحالة (1) :

لدينا حسب التمثيل البياني : محور التراتيب مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة $f$
أي أن الدالة $f$ غير معرفة عند $x=0$
ولدينا المستقيم ذو المعادلة $x=2$ مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة $f$
أي أن الدالة $f$ غير معرفة عند $x=2$ .
ومنه مجموعة تعريف الدالة $f$ هي : $D_f=\mathbb{R}-\{0;2\}=]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[$ .

النهايات:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = -\infty$ ،
$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ .

<u>الحالة (2)</u>:

لدينا حسب التمثيل البياني : محور التراتيب مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة $f$
أي أن الدالة $f$ غير معرفة عند $x = 0$
ومنه مجموعة تعريف الدالة $f$ هي : $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ .

النهايات:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ .

<u>الحالة (3)</u>:

لدينا حسب التمثيل البياني : المستقيمان ذو المعادلتان $x = 1$ و $x = -1$ مقاربان عموديان لمنحنى الدالة $f$ ، أي أن الدالة $f$ غير معرفة عند $x = 1$ و $x = -1$
ومنه مجموعة تعريف الدالة $f$ هي : $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\} = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$ .

النهايات:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = -\infty$ ،
$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ .

<u>الحالة (4)</u>:

لدينا حسب التمثيل البياني : محور التراتيب مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة $f$
أي أن الدالة $f$ غير معرفة عند $x = 0$
ومنه مجموعة تعريف الدالة $f$ هي : $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ .

النهايات:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ .

## 4- نهاية دالة مركبة – النهايات بالمقارنة :

### حل التمرين 30 ص28 ج1 :

حساب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} \left[\sqrt{\dfrac{3x+4}{x-3}}\right] = \sqrt{\dfrac{13}{0^+}} = +\infty$ .

2) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \left[\sqrt{\dfrac{3-6x}{1-x}}\right] = \sqrt{\dfrac{-3}{0^-}} = +\infty$ .

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + x + 1}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2}\right] = +\infty$ .

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\sqrt{-2x^3 + x - 3}\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\sqrt{-2x^3}\right] = -2(-\infty) = +\infty$ .

## حل التمرين 31 ص28 ج1 :

$f$ هي الدالة المعرفة على $]-2;2[$ بـ : $f(x)=\frac{-3}{\sqrt{4-x^2}}$

حساب نهاية الدالة $f$ عند $-2$ و $2$ :

$f$ معرفة إذا كان $4-x^2\geq 0$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-2}\left[\frac{-3}{\sqrt{4-x^2}}\right]=\left[\frac{-3}{0^+}\right]=-\infty\ .$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}2}\left[\frac{-3}{\sqrt{4-x^2}}\right]=\left[\frac{-3}{0^+}\right]=-\infty\ .$$

## حل التمرين 32 ص28 ج1 :

حساب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{x+4}{x^2-3}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{x}{x^2}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\cos(0)\right]=1$ .

2) $\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{\pi x-1}{2x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=0$ .

3) $\lim_{x\to-1}\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{1}{(x+1)^2}\right]=\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{0^+}\right]=1+(+\infty)=+\infty$ .

4) $\lim_{x\to0}\left[\cos\left(\pi\frac{\sin x}{x}\right)\right]=\left[\cos(\pi\times1)\right]=\left[\cos\pi\right]=-1$ ، لأن $\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=1$ .

## حل التمرين 33 ص28 ج1 :

- إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>-1$ : $\frac{-1}{x+1}\leq\frac{\cos x}{x+1}\leq\frac{1}{x+1}$ :

لدينا $x>-1$ و منه $x+1>0$ ، أي $\frac{1}{x+1}>0$

ولدينا كذلك $-1\leq\cos x\leq 1$ ، وبضرب أطراف المتباينة في العدد الموجب $\frac{1}{x+1}$ نحصل على :

$$-1\times\frac{1}{x+1}\leq\cos x\times\frac{1}{x+1}\leq 1\times\frac{1}{x+1}$$

إذن: $\frac{-1}{x+1}\leq\frac{\cos x}{x+1}\leq\frac{1}{x+1}$ .

- حساب نهاية الدالة $f:x\mapsto\frac{\cos x}{x+1}$ عند $+\infty$ :

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x+1}\right]=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1}{x+1}\right]=0$ ، فإنه حسب نظرية الحصر $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\cos x}{x+1}\right]=0$

إذن : الدالة $f:x\mapsto\frac{\cos x}{x+1}$ تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي $0$ .

## حل التمرين 34 ص28 ج1 :

$f$ دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ ، $\frac{3x+\cos x}{x} \le f(x) \le \frac{3x+7}{x-1}$ :

- لنبحث عن نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ :

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{3x+7}{x-1}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{3x}{x}\right] = 3$

و لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{3x+\cos x}{x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{3x}{x}+\frac{\cos x}{x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[3+\frac{\cos x}{x}\right] = 3$ ، لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\cos x}{x}\right] = 0$ .

و لدينا $\frac{3x+\cos x}{x} \le f(x) \le \frac{3x+7}{x-1}$ ، ومنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ .

إذن : الدالة $f$ تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي 3 .

## حل التمرين 35 ص28 ج1 :

$f$ دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \ge 0$ ، $|f(x)-3| \le \frac{1}{x^2+1}$ :

- لنبحث عن نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x \ge 0$ ، $|f(x)-3| \le \frac{1}{x^2+1}$ ، أي $\frac{-1}{x^2+1} \le f(x)-3 \le \frac{1}{x^2+1}$

لأن $\frac{1}{x^2+1} > 0$ ، و منه $3-\frac{1}{x^2+1} \le f(x) \le 3+\frac{1}{x^2+1}$

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3+\frac{1}{x^2+1}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[3-\frac{1}{x^2+1}\right] = 3$ ، لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2+1}\right] = 0$

فإنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ .

إذن : الدالة $f$ تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي 3 .

## حل التمرين 36 ص28 ج1 :

$f$ دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x < 0$ ، $f(x) \le -2x^3$ :

- لنبحث عن نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ :

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-2x^3\right] = -\infty$ وَ $f(x) \le -2x^3$ من أجل كل عدد حقيقي $x < 0$ ،

فإنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

إذن : الدالة $f$ تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي $-\infty$ .

## حل التمرين 37 ص28 ج1 :

$f$ دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ، $f(x) \ge \frac{1}{2}x^4 + x$ :

- لنبحث عن نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ :

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}x^4\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}x^4+x\right] = +\infty$ وَ $f(x) \ge \frac{1}{2}x^4+x$ من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ،

فإنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

إذن : الدالة $f$ تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي $+\infty$ .

## حل التمرين 38 ص29 ج1 :

1) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يكون : $1 \leq 3+2\cos x \leq 5$ :
نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا $-1 \leq \cos x \leq 1$ ، وبضرب أطراف المتباينة في العدد 2
نجد : $-2 \leq 2\cos x \leq 2$ و بإضافة العدد 3 إلى أطراف المتباينة نجد $3-2 \leq 3+2\cos x \leq 3+2$
إذن: $1 \leq 3+2\cos x \leq 5$ .

2) لنبحث عن نهاية الدالة $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{3+2\cos x}$ عند $+\infty$ :
لدينا $1 \leq 3+2\cos x \leq 5$ ومنه $1 \geq \dfrac{1}{3+2\cos x} \geq \dfrac{1}{5}$ ، وبضرب أطراف المتباينة في $(x-1)$ نجد :
$x-1 \geq \dfrac{x-1}{3+2\cos x} \geq \dfrac{x-1}{5}$ ، ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[x-1] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x-1}{5}\right] = +\infty$
وبالتالي فإنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
إذن : الدالة $f$ تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي $+\infty$ .

## حل التمرين 39 ص29 ج1 :

1) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يكون : $x^2 - 3\sin x \geq x^2 - 3$ :
نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، وبضرب أطراف المتباينة في العدد $-3$
نجد : $3 \geq -3\sin x \geq -3$ و بإضافة $x^2$ إلى أطراف المتباينة نجد $3+x^2 \geq x^2 - 3\sin x \geq x^2 - 3$
إذن: $x^2 - 3\sin x \geq x^2 - 3$ .

2) لنبحث عن نهاية الدالة $f : x \mapsto x^2 - 3\sin x$ عند $+\infty$ :
( كتبت في الكتاب خطأ $f : x \mapsto x^2 - \sin 3x$ )
لدينا $x^2 - 3\sin x \geq x^2 - 3$ ، ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2-3\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\right] = +\infty$
وبالتالي فإنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
إذن : الدالة $f$ تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي $+\infty$ .

## حل التمرين 40 ص29 ج1 :

- لنبحث عن نهاية الدالة $f : x \mapsto x^2 + 2x\sin x$ عند $+\infty$ وَ عند $-\infty$ :
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2+2x\sin x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x(x+2\sin x)\right] = +\infty$ ، لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}[x+2\sin x] = +\infty$
إذن : الدالة $f$ تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي $+\infty$ .
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2+2x\sin x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x(x+2\sin x)\right] = (-\infty)\times(-\infty) = +\infty$ ،
إذن : الدالة $f$ تقبل نهاية عند $-\infty$ ، ونهايتها هي $+\infty$ .

## حل التمرين 41 ص29 ج1 :

$f$ دالة معرفة على $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $f(x) = \dfrac{x+\sin x}{2x+1}$ :

1) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > -\dfrac{1}{2}$ ، $\dfrac{x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{x+1}{2x+1}$ :
لدينا $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، بإضافة $x$ لأطراف المتباينة نجد : $x-1 \leq x+\sin x \leq x+1$ و بقسمة أطراف
المتباينة على $2x+1$ نجد $\dfrac{x-1}{2x+1} \leq \dfrac{x+\sin x}{2x+1} \leq \dfrac{x+1}{2x+1}$

إذن: $\frac{x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{2x+1}$ .

2) لنبحث عن نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ :

لدينا $\frac{x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{2x+1}$ ، ولدينا $\frac{1}{2} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{2x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{2x+1}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{2x+1}\right]$

ومنه حسب نظرية الحصر $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

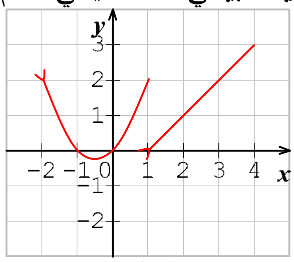
إذن : الدالة $f$ تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي $\frac{1}{2}$ .

## 5- الاستمرارية :

### حل التمرين 42 ص29 ج1 :

- نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[-2;4[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = x^2 + x; & x \in [-2;1[ \\ f(x) = x - 1; & x \in [1;4[ \end{cases}$

1) التمثيل البياني للدالة $f$ في معلم :




لنبحث عن نهاية الدالة $f$ عند 1 :

لدينا لمّا $x \in [-2;1[$ ، $f(x) = x^2 + x$ ، ومنه $\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 1}\left[x^2 + x\right] = 1^2 + 1 = 2$

ولدينا لمّا $x \in [1;4[$ ، $f(x) = x - 1$ ، ومنه $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1}\left[x - 1\right] = 1 - 1 = 0$

إذن وجدنا أن : $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) \neq \lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)$ ، ومنه الدالة $f$ لا تقبل نهاية عند 1 .

2) الدالة $f$ غير مستمرة على المجال $[-2;4[$ ، لأنها غير مستمرة عند 1 ( لا تقبل نهاية عند 1 ) ، و العدد1 هو عنصر ينتمي إلى المجال $[-2;4[$ .

3) على المجال $[2;3]$ الدالة $f$ معرفة بـ $f(x) = x - 1$ وحسب التمثيل البياني فهي مستمرة على هذا المجال ، وكذلك هذه الدالة كثير حدود إذن فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالتالي فهي مستمرة على$[2;3]$ .

### حل التمرين 43 ص29 ج1 :

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 1; & x \leq 2 \\ f(x) = x^2 + x - 5; & x > 2 \end{cases}$ :

1) دراسة استمرارية الدالة $f$ عند 2 :

لدينا من أجل $x \in ]-\infty;2]$ ، $f(x) = x^2 - 2x + 1$

ومنه $\lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 2}\left[x^2 - 2x + 1\right] = 4 - 4 + 1 = 1$ ، إذن: الدالة $f$ مستمرة عند 2 على اليسار .

ولدينا من أجل $x \in ]2;+\infty[$ ، $f(x) = x^2 + x - 5$

ومنه $\lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 2}\left[x^2 + x - 5\right] = 4 + 2 - 5 = 1$ ، إذن: الدالة $f$ مستمرة عند 2 على اليمين .

وجدنا أن الدالة $f$ مستمرة عند 2 على اليمين و على اليسار ، و منه فهي مستمرة عند 2 .

2) نعم الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ ، لأنها مستمرة عند 2 و مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;2[$ و $]2;+\infty[$ لأنها عبارة عن دالة كثير حدود معرفة على كل من المجالين على حدا .

## حل التمرين 44 ص29 ج1 :

- دراسة استمرارية الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\begin{cases} f(x) = -x^2 + x + 2; & x \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x + 1; & x > 1 \end{cases}$ :

لدينا من أجل $x \in ]-\infty;1]$ ، $f(x) = -x^2 + x + 2$

ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \left[-x^2 + x + 2\right] = -1 + 1 + 2 = 2$

ولدينا من أجل $x \in ]1;+\infty[$ ، $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \left[\frac{1}{2}x + 1\right] = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

وجدنا أن : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) \neq \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ ، ومنه الدالة $f$ لا تقبل نهاية عند 1 .

إذن : الدالة $f$ غير مستمرة عند 1 ، ومنه فهي ليست مستمرة على $\mathbb{R}$ . لكنها مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$ .

## حل التمرين 45 ص29 ج1 :

$f$ دالة عددية معرفة كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 - 3}{x - 1}$ إذا كان $x \neq 1$ و $f(1) = 3$ :

1) دراسة استمرارية الدالة $f$ عند 1 :

لدينا من أجل $x \in ]-\infty;1[ \cup ]1;+\infty[$ ، $f(x) = \frac{x^3 - 3}{x - 1}$ ، بإجراء القسمة الإقليدية نحصل على :

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 1 & x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 - x^2} & x^2 + x + 1 \\ x^2 - 1 & \\ \underline{x^2 - x} & \\ x - 1 & \\ \underline{x - 1} & \\ 0 & \end{array}$$

إذن $f(x) = x^2 + x + 1$ ،

ومنه لمّا $x \in ]-\infty;1[$ ، نجد $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \left[x^2 + x + 1\right] = 1 + 1 + 1 = 3$ .

ولمّا $x \in ]1;+\infty[$ ، نجد $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \left[x^2 + x + 1\right] = 1 + 1 + 1 = 3$ .

إذن $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ و لدينا $f(1) = 3$ ، ومنه : الدالة $f$ مستمرة عند 1

إذن : فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ .

## حل التمرين 46 ص29 ج1 :

لتكن الدالتان $f$ و $g$ المعرفتان على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}-\{1\}$ على الترتيب كما يلي :

$$f(x)=2x^3-x+1 \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-1}$$

- دراسة استمرارية الدالتان $f$ و $g$ :

نعلم أن الدوال كثيرات الحدود معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ ، ولدينا $f(x)=2x^3-x+1$ هي دالة كثير حدود و منه فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ .

و نعلم كذلك أن الدوال الناطقة معرفة و مستمرة على مجال تعريفها ، ولدينا $g(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-1}$ دالة ناطقة مجموعة تعريفها $D_g=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ ، ومنه فهي غير مستمرة عند 1 .

إذن: الدالة $g$ مستمرة على المجال $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ .

## حل التمرين 47 ص29 ج1 :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x^2-x)\sin x$ :

- إثبات أن الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ :

لنعرف الدالتين $u$ و $v$ كما يلي : $u:x\mapsto \sin x$ ، و $v:x\mapsto x^2-x$

نعلم أن الدالة $x\mapsto \sin x$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ أي الدالة $u:x\mapsto \sin x$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$

و نعلم أيضًا أن الدوال كثيرات الحدود معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ ، و منه فالدالة $v:x\mapsto x^2-x$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ .

إذن جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ هو دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ ، ومنه فالدالة $f(x)=(x^2-x)\sin x$ مستمرة على $\mathbb{R}$ .

## حل التمرين 48 ص29 ج1 :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{\cos x}{1+x^2}$ :

- دراسة استمرارية الدالة $f$ :

لدينا الدالة $f$ هي جداء الدالتين المستمرتين على $\mathbb{R}$ و المعرفتين بـ : $x\mapsto \cos x$ ، و $x\mapsto \frac{1}{1+x^2}$

إذن جداء هذين الدالتين هو $f(x)=\frac{\cos x}{1+x^2}$ ، ونعلم أن جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ هو دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ ، ومنه فالدالة $f(x)$ مستمرة على $\mathbb{R}$ .

## حل التمرين 49 ص29 ج1 :

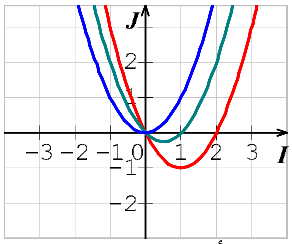
نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[-2;1[$ كما يلي : $f(x)=x(x+E(x))$ حيث الدالة $x\mapsto E(x)$ هي دالة الجزء الصحيح :

1) تعيين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية : $[-2;-1[$ ، $[-2;0[$ ، $[-2;1[$ :

نعلم أن دالة الجزء الصحيح معرفة كما يلي : $E(x)=\begin{cases}-2:x\in[-2;-1[\\-1:x\in[-2;0[\\0:x\in[-2;1[\end{cases}$

ومنه فالدالة $f$ معرفة كما يلي: $f(x)=\begin{cases} x(x-2): x\in[-2;-1[ \\ x(x-1): x\in[-2;0[ \\ x(x+0): x\in[-2;1[ \end{cases}$ ، أي $f(x)=\begin{cases} x^2-2x : x\in[-2;-1[ \\ x^2-x : x\in[-2;0[ \\ x^2 : x\in[-2;1[ \end{cases}$

2) رسم في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ المنحنى الممثل للدالة $f$ :




3) إثبات أن الدالة $f$ مستمرة على المجالات $[-2;-1[$ ، $[-2;0[$ ، $[-2;1[$ :

- الدالة $f$ معرفة على المجال $[-2;-1[$ بـ $f(x)=x^2-2x$ ومنه فهي دالة كثير حدود إذن الدالة $f$ مستمرة على $[-2;-1[$ .
- الدالة $f$ معرفة على المجال $[-2;0[$ بـ $f(x)=x^2-x$ ومنه فهي دالة كثير حدود إذن الدالة $f$ مستمرة على $[-2;0[$ .

الدالة $f$ معرفة على المجال $[-2;0[$ بـ $f(x)=x^2$ ومنه فهي دالة كثير حدود ، إذن الدالة $f$ مستمرة على $[-2;0[$ .

## 6- مبرهنة القيم المتوسطة :

## حل التمرين 50 ص29 ج1 :

- البرهان باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $x^3-4x=-2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-3;-2]$ :

لتكن الدالة $f$ المعرفة على المجال $[-3;-2]$ بـ : $f(x)=x^3-4x$

لدينا $f(-3)=(-3)^3-4(-3)=-15$ و $f(-2)=(-2)^3-4(-2)=-8+8=0$

بما أن الدالة $f$ مستمرة على المجال $[-3;-2]$ لأنها دالة كثير حدود ، فإنه حسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-3;-2]$ من أجل كل عدد حقيقي $k$ حيث $k\in[f(-3);f(-2)]$ ، أي أن $k\in[-15;0]$

بما أن $k=-2$ عنصر من المجال $[-15;0]$ ، فإن المعادلة $f(x)=-2$ تقبل على الأقل حلا على المجال $[-3;-2]$ ،

أي أن المعادلة $x^3-4x=-2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-3;-2]$ .

## حل التمرين 51 ص30 ج1 :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[0;2]$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=2x+1; & 0<x\le 1 \\ f(x)=-2x+3; & 1\le x<2 \end{cases}$ :

1) إثبات بتطبيق مبرهنة القيم المتوسطة أن للمعادلة $f(x)=0$ حلولا في المجال $[0;2]$ :

لدينا $f(x)$ معرفة على المجال $[0;1[$ بـ : $f(x)=2x+1$ و هي دالة كثير حدود ، ومنه فهي مستمرة على المجال $[0;1[$ .

لدينا الدالة $f$ معرفة على المجال $]1;2]$ بـ : $f(x)=x-1$ و هي دالة كثير حدود ، ومنه فهي مستمرة على المجال $]1;2]$ .

لكن هل $f(x)$ مستمرة عند 1 ؟

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}[2x+1]=2(1)+1=3$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}[-2x+3]=-2(1)+3=1$

وجدنا أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)\neq \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ ، ومنه الدالة $f$ لا تقبل نهاية عند 1 .

<u>إذن</u> : الدالة $f$ غير مستمرة عند 1 ، ومنه فهي ليست مستمرة على المجال $[0;2]$ لأن العدد 1 عنصر من هذا المجال

<u>إذن</u> : الدالة $f$ لا تحقق شرط تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $[0;2]$

وعليه لا يمكن تطبيق هذه المبرهنة .

2) التحقق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً واحدًا على في المجال $[0;2]$ :

حل المعادلة $f(x)=0$ :

لدينا :
$$f(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}2x+1; & x\in[0;1[\\ \\ -2x+3; & x\in[1;2]\end{cases}$$

ومنه $x=-\frac{1}{2}$ أو $x=\frac{3}{2}$ ، $x=-\frac{1}{2}$ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى المجال $[0;1[$

ومنه حل المعادلة $f(x)=0$ هو $x=\frac{3}{2}$ لأن هذا الحل ينتمي إلى $[1;2]$ .

إذن: المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا هو $\frac{3}{2}$ على المجال $[0;2]$ .

## <u>حل التمرين 52 ص30 ج1 :</u>

$f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=3x^3-2x-\frac{1}{4}$ :

1) حساب $f(1)$ ، $f(0)$ ، $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، $f(-1)$ :

$f(1)=3(1)^3-2(1)-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ ، $f(0)=3(0)^3-2(0)-\frac{1}{4}=0-0-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$ .

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=3\left(-\frac{1}{2}\right)^3-2\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}=\frac{-3}{8}+1-\frac{1}{4}=\frac{-3+8-2}{8}=\frac{3}{8}$ .

$f(-1)=3(-1)^3-2(-1)-\frac{1}{4}=-3+2-\frac{1}{4}=-\frac{5}{4}$ .

2) الاستنتاج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في المجال $[-1;1]$ :

الدالة $f$ كثير حدود ، أي أنها مستمرة على $\mathbb{R}$ ، و بالتالي فهي مستمرة على كل من المجالات $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ ، $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ ، $[0;1]$ كلٌ على حدا .

ولدينا كذلك $f(-1)\times f\left(-\frac{1}{2}\right)<0$ ، و $f\left(-\frac{1}{2}\right)\times f(0)<0$ ، و $f(0)\times f(1)<0$

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في كل مجال من المجالات $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ ، $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ ، $[0;1]$ .

<u>إذن:</u> نستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في المجال $[-1;1]$ .

## <u>حل التمرين 53 ص30 ج1 :</u>

$f$ هي الدالة المعرفة على $[-3;6]$ كما يلي : $f(x)=x^3-12x$ :

1) دراسة تغيرات الدالة $f$ :

$f(x)$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $[-3;6]$ ، ولدينا $f'(x)=3x^2-12$

$f'(x)=0$ معناه $3x^2-12=0$ ومنه $3(x^2-4)=0$ ، هذا يكافئ $3((x-2)(x+2))=0$

$3\neq 0$ ، ومنه $x=2$ و $x=-2$

إذا كان $f'(x)<0$ فإن $x\in]-2;2[$ ومنه الدالة $f$ متناقصة على المجال $x\in]-2;2[$

إذا كان $f'(x)>0$ فإن $x\in[-3;-2[\cup]2;6]$ ومنه الدالة $f$ متناقصة على هذا المجال .

جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $2$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $9$ | ↗ | $16$ | ↘ | $-16$ | ↗ $30$ | $144$ |

2) إيجاد عدد حلول المعادلة $f(x)=30$ :

حسب جدول تغيرات الدالة $f$ على المجال $[-3;6]$ فإن الدالة تأخذ القيمة 30 من أجل عدد حقيقي وحيد $k$ ، حيث $2<k<6$ لأن من أجل $x\in[2;6]$ فإن $f(x)\in[-16;144]$ ، و العدد 30 عنصر من المجال $[-16;144]$ .

إذن المعادلة $f(x)=30$ تقبل حلاً وحيدًا فقط .

## <u>حل التمرين 54 ص30 ج1 :</u>

- إثبات أن كل دالة كثير حدود درجته فردية تقبل على الأقل جذرًا حقيقيًا :

لتكن $f$ دالة كثير حدود معرفة بـ : $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.......+a_1x+a_0$ ،

حيث $a_0;a_1;.........;a_{n-1};a_n$ معاملات حقيقية و $n$ عدد طبيعي فردي حيث $a_n\neq 0$ .

- نعلم أن $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثير حدود ، و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} a_nx^n$ ، و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} a_nx^n$ .

إذن نميز حالين كما يلي :

| | $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ | $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ |
|---|---|---|
| $a_n>0$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $a_n<0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

ومنه إذا كان $a_n<0$ فإن $\left[\lim_{x\to-\infty} f(x)\right]\times\left[\lim_{x\to+\infty} f(x)\right]<0$

وإذا كان $a_n>0$ فإن $\left[\lim_{x\to-\infty} f(x)\right]\times\left[\lim_{x\to+\infty} f(x)\right]<0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم $a_n$ فإن $\left[\lim_{x\to-\infty} f(x)\right]\times\left[\lim_{x\to+\infty} f(x)\right]<0$ ، و الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ ، ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا حقيقيًا .

إذن : نستنتج أن كل دالة كثير حدود درجته فردية تقبل على الأقل جذرًا حقيقيًا .

## حل التمرين 55 ص30 ج1 :

- إثبات أن المعادلات التالية تقبل على الأقل حلاً في المجال $I$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $2x^3+1=0$ ، $I=[-1;0]$ :

نضع $f(x)=2x^3+1$ ، حيث الدالة $f$ معرفة على المجال $I=[-1;0]$

ومنه $f(-1)=2(-1)^3+1=-2+1=-1$ ، وَ $f(0)=2(0)^3+1=0+1=1$

العدد 0 محصور بين $f(-1)$ وَ $f(0)$ ، و $f$ دالة كثير حدود أي أنها مستمرة على المجال $I=[-1;0]$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاً محصورًا بين $-1$ وَ 0

<u>إذن :</u> المعادلة $2x^3+1=0$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $I=[-1;0]$ .

2) $x^5+3x^4-6x^2-1=0$ ، $I=[1;2]$ :

نضع $f(x)=x^5+3x^4-6x^2-1$ ، حيث الدالة $f$ معرفة على المجال $I=[1;2]$

ومنه $f(1)=(1)^5+3(1)^4-6(1)^2-1=1+3-6-1=-3$ ، وَ $f(2)=32+48-24-1=55$

العدد 0 محصور بين $f(1)$ وَ $f(2)$ ، و $f$ دالة كثير حدود أي أنها مستمرة على المجال $I=[1;2]$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاً محصورًا بين 1 وَ 2

<u>إذن :</u> المعادلة $x^5+3x^4-6x^2-1=0$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $I=[1;2]$ .

3) $x^4+4x-3=0$ ، $I=\left[\frac{1}{2};1\right]$ :

نضع $f(x)=x^4+4x-3$ ، حيث الدالة $f$ معرفة على المجال $I=\left[\frac{1}{2};1\right]$

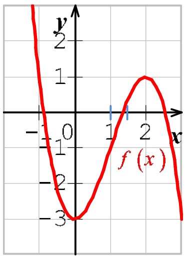
ومنه $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^4+4\left(\frac{1}{2}\right)-3=\frac{1}{16}+2-3=\frac{-15}{16}=-0,9$ ، وَ $f(1)=1+4-3=2$

العدد 0 محصور بين $f\left(\frac{1}{2}\right)$ وَ $f(1)$ ، و $f$ دالة كثير حدود أي أنها مستمرة على المجال $I=\left[\frac{1}{2};1\right]$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاً محصورًا بين $\frac{1}{2}$ وَ 1

<u>إذن :</u> المعادلة $x^4+4x-3=0$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $I=\left[\frac{1}{2};1\right]$ .

4) $-x^3+3x^2=3$ ، $I=\left[1;\frac{3}{2}\right]$ :




نضع $f(x)=-x^3+3x^2-3$ ، حيث الدالة $f$ معرفة على المجال $I=\left[1;\frac{3}{2}\right]$

ومنه $f(1)=-(1)^3+3(1)^2-3=-1+3-3=-1$ ،

و $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\left(\frac{3}{2}\right)^3+3\left(\frac{3}{2}\right)^2-3=-\frac{27}{8}+\frac{27}{4}-3=\frac{27}{8}-3=\frac{3}{8}=0,4$

العدد 0 محصور بين $f(1)$ و $f\left(\frac{3}{2}\right)$ ، و $f$ دالة كثير حدود أي أنها مستمرة على المجال $I=\left[1;\frac{3}{2}\right]$

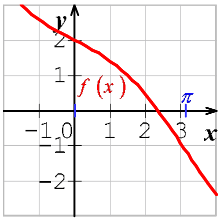
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاً محصورًا بين 1 و $\frac{3}{2}$

كما يظهر في التمثيل البياني للدالة $f$ .

__إذن :__ المعادلة $-x^3+3x^2=3$ تقبل على الأقل حلا في المجال $I=\left[1;\frac{3}{2}\right]$ .

5) $\frac{1}{2}\sin x+2=x$ ، $I=[0;\pi]$ :

نضع $f(x)=\frac{1}{2}\sin x-x+2$ ، حيث الدالة $f$ معرفة على المجال $I=[0;\pi]$




ومنه $f(0)=\frac{1}{2}\sin(0)-(0)+2=0-0+2=2$ ،

و $f(\pi)=\frac{1}{2}\sin\pi-(\pi)+2=-\pi+2=-3,14+2=-1,14$

العدد 0 محصور بين $f(0)$ و $f(\pi)$ ، و $f$ دالة كثير حدود ، لأن الدالة $x\mapsto\sin x$ معرفة على $\mathbb{R}$ ، أي أنها مستمرة على المجال $I=[0;\pi]$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاً محصورًا بين 0 و $\pi$

كما يبينه التمثيل البياني للدالة $f$ .

__إذن :__ المعادلة $\frac{1}{2}\sin x+2=x$ تقبل على الأقل حلا في المجال $I=[0;\pi]$ .

## __حل التمرين 56 ص30 ج1 :__

لتكن $f$ دالة مستمرة على المجال $]-3;+\infty[$ ، وجدول تغيراتها كالآتي :

| $x$ | $-3$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $4$ | ↘ | $2$ |

- إثبات أن المنحنى الممثل للدالة $f$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين :

لدينا الدالة $f$ مستمرة على $]-3;+\infty[$ ، أي أنها مستمرة على المجال $]-3;0]$ و مستمرة أيضًا على $[0;2]$.

ولدينا كذلك حسب جدول التغيرات :

لمّا $x\in]-3;0]$ ، الدالة $f(x)\in[-2;+\infty[$ .

لمّا $x\in[0;2]$ ، الدالة $f(x)\in[-2;4[$ .

منحنى الدالة $f$ يقطع حامل محور الفواصل معناه $f(x)=0$ ( الترتيب معدوم ) ،

إذن $0\in[-2;+\infty[$ ، وَ $0\in[-2;4[$

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد $x_0\in]-3;0]$ يحقق $f(x_0)=0$ ، ويوجد $x_1\in[0;2]$ يحقق $f(x_1)=0$ ،

إذن النقط ذات الإحداثيات $A(x_0;0)$ ، وَ $B(x_1;0)$ تنتمي إلى المنحنى $(C_f)$ وترتيبها معدوم .

إذن: هذه النقط تنتمي إلى محور الفواصل .

ومنه حامل محور الفواصل يقطع $(C_f)$ في نقطتين متمايزتين $A$ وَ $B$ فواصلهما على الترتيب $-3<x_0\leq 0$ ، وَ $0\leq x_1\leq 2$ .

## حل التمرين 57 ص30 ج1 :

لدينا جدول تغيرات الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ $-2$ | $\frac{13}{6}$ | ↘ $-2$ | $-\frac{7}{3}$ | ↗ $-2$ | $+\infty$ |

- البرهان على أن المعادلة $f(x)+2=0$ تقبل ثلاثة حلول فقط في $\mathbb{R}$ :

$f(x)+2=0$ معناه $f(x)=-2$

حسب جدول تغيرات الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ لدينا :

لمّا $x\in]-\infty;-1]$ ، الدالة $f(x)\in\left]-\infty;\frac{13}{6}\right]$ .

لمّا $x\in[-1;2]$ ، الدالة $f(x)\in\left[-\frac{7}{3};\frac{13}{6}\right]$ .

لمّا $x\in[2;+\infty[$ ، الدالة $f(x)\in\left[-\frac{7}{3};+\infty\right[$ .

نعلم أن الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ ، أي أنها مستمرة على $\mathbb{R}$ ، ولدينا العدد $-2$ عنصر من المجالات $\left]-\infty;\frac{13}{6}\right]$ ، وَ $\left[-\frac{7}{3};\frac{13}{6}\right]$ ، وَ $\left[-\frac{7}{3};+\infty\right[$ كما هو موضح في جدول التغيرات أعلاه ،

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=-2$ تقبل حلاً على الأقل في كل مجال من المجالات $]-\infty;-1]$ ، وَ $[-1;2]$ ، وَ $[2;+\infty[$ ، أي أنها تقبل على الأقل ثلاثة حلول في $\mathbb{R}$ .

إذن: المعادلة $f(x)+2=0$ تقبل ثلاثة حلول فقط في $\mathbb{R}$ ، لأنها معادلة من الدرجة الثالثة ، ونعلم أن المعادلات من الدرجة الثالثة لها ثلاث حلول فقط .

## 7- الدول المستمرة و الرتيبة تمامًا :

## حل التمرين 58 ص30 ج1 :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[-1;2]$ بـ : $f(x)=2x^3-3x^2-1$ :

1) حساب $f'(x)$ ، ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة $f$ :

لدينا $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$ معناه $6x(x-1)=0$ ، ومنه $6x=0$ أي $x=0$ ، وَ $x-1=0$ أي $x=1$ .

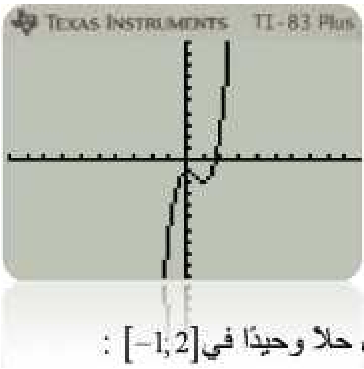
$f'(x)<0$ معناه $x\in]0;1[$ ومنه الدالة $f$ متناقصة على المجال $[0;1]$ .

$f'(x)>0$ معناه $x\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ ومنه الدالة $f$ متزايدة على المجال $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ .

- جدول التغيرات :

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-6$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $3$ |

2) الرسم على شاشة حاسبة بيانية التمثيل البياني للدالة $f$ باستعمال نافذة مناسبة :




3) إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $[-1;2]$ :

من جدول تغيرات الدالة $f$ نستنتج أنه لمّا $x\in[1;2]$ فإن $f(x)\in[-2;3]$ .

وبما أن العدد $0$ عنصر من المجال $[-2;3]$ ، و الدالة $f$ مستمرة و متزايدة **تمامًا** على المجال $[1;2]$

فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً **وحيدًا** $\alpha$ حيث $1<\alpha<2$ .

## حل التمرين 59 ص30 ج1 :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-2x^3+3x^2-x+5$ :

1) دراسة تغيرات الدالة $f$ ، ثم تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا $f'(x)=-6x^2+6x-1$

$f'(x)=0$ معناه $-6x^2+6x-1=0$ ، لدينا المميز $\Delta=b^2-4ac=36-24=12$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6-\sqrt{12}}{-12}=0,8$ ، $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{12}}{-12}=0,2$

$f'(x)<0$ معناه $x\in]-\infty;0,2[\cup]0,8;+\infty[$ ومنه الدالة $f$ متناقصة على هذا المجال .

$f'(x)>0$ معناه $x\in]0,2;0,8[$ ومنه الدالة $f$ متزايدة على المجال $]0,2;0,8[$ .

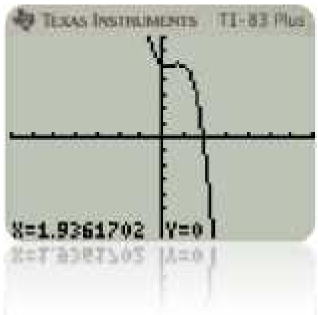
- جدول التغيرات :

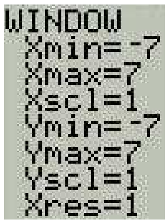
| $x$ | $-\infty$ | | $0,2$ | | $0,8$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $4,9$ | ↗ | $5,1$ | ↘ | $-\infty$ |

2) إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا $\alpha$ على $\mathbb{R}$ :

من جدول تغيرات الدالة $f$ نستنتج أنه لمّا $x\in[0,8;+\infty[$ فإن $f(x)\in]-\infty;5,1]$ .

وبما أن العدد $0$ عنصر من المجال $]-\infty;5,1]$ ، و الدالة $f$ مستمرة و متناقصة تمامًا على المجال $[0,8;+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا $\alpha$ .




3) إيجاد باستعمال حاسبة بيانية قيمة مقربة إلى $10^{-2}$ للحل $\alpha$ : $f(x)=0$ معناه نقطة التقاطع مع حامل محور الفواصل أي $y=0$ كما تظهر على شاشة الحاسبة البيانية $x=1.93$ .

## حل التمرين 60 ص31 ج1 :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[1;2]$ بـ : $f(x)=x^4-x^2+1$ :

1) دراسة تغيرات الدالة $f$ ، ثم تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا $f'(x)=4x^3-2x=2x\left(2x^2-1\right)$

$f'(x)=0$ معناه $2x\left(2x^2-1\right)=0$ ، ومنه $2x=0$ أي $x=0$ ، وَ $\left(2x^2-1\right)=0$ أي $x^2=\frac{1}{2}$

$x=\sqrt{\frac{1}{2}}=0,7$ ، وَ $x=-\sqrt{\frac{1}{2}}=-0,7$ ،

ندرس إشارة المشتق :

| $x$ | $-\infty$ | | $-0,7$ | | $0$ | | $0,7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $2x^2-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| الجداء | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

لدينا $D_f=[1;2]$ ، ومنه و حسب جدول إشارة المشتق ، الدّالة $f$ متزايدة تمامًا على المجال $[1;2]$

- جدول التغيرات :

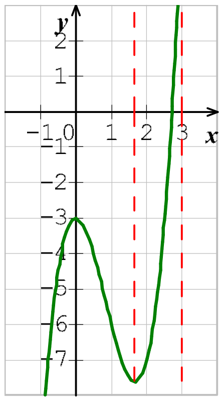
| $x$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $13$ |

2) إثبات أنّ المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا وحيدًا $\alpha$ في المجال $]1;2[$ :

حسب جدول تغيرات الدالة $f$ نستنتج أنه لمّا $x\in]1;2[$ فإن $f(x)\in[1;13]$ .

وبما أن العدد $3$ عنصر من المجال $[1;13]$ ، و الدالة $f$ مستمرة و متزايدة **تمامًا** على المجال $]1;2[$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا **وحيدًا** $\alpha$ .

3) القيمة المقربة إلى $10^{-2}$ للحل $\alpha$ هي : $1,41$ .




## حل التمرين 61 ص31 ج1 :

- إثبات أن المعادلة $2x^3-5x^2-3=0$ تقبل حلاً وحيدًا في المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$ :

نضع $f(x)=2x^3-5x^2-3$ ، ومنه $f'(x)=6x^2-10x=2x(3x-5)$

$f'(x)=0$ معناه $2x(3x-5)=0$ ، ومنه $2x=0$ معناه $x=0$ ،

وَ $3x-5=0$ ، أي $x=\frac{5}{3}$

إذن لمّا $f'(x)<0$ ، $x\in\left]0;\frac{5}{3}\right[$ ، الدالة $f$ متناقصة تمامًا على هذا المجال .

و لمّا $f'(x)>0$ ، $x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]\frac{5}{3};+\infty\right[$ ، الدالة $f$ متزايدة تمامًا على هذا المجال .

لدينا المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$ محتوى في $\left]\frac{5}{3};+\infty\right[$ ، ولدينا الدالة $f$ متزايدة تمامًا و مستمرة على هذا المجال

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا في المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$

إذن : المعادلة $2x^3-5x^2-3=0$ تقبل حلاً وحيدًا في المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$ .

## حل التمرين 62 ص31 ج1 :

- إثبات أن المعادلة $\frac{1}{x+2}=2\cos x$ تقبل حلاً وحيدًا في المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ :

نضع $f(x)=\frac{1}{x+2}-2\cos x$ ، ومنه $f'(x)=\frac{-1}{(x+2)^2}+2\sin x$

لدينا من أجل كل $x$ من المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ ، $f'(x)<0$ لأن $\sin x$ سالب على المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$

ومنه الدالة $f(x)$ متناقصة تمامًا على المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ و مستمرة عليه .

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا في المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$

إذن : المعادلة $\frac{1}{x+2}=2\cos x$ تقبل حلاً وحيدًا في المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ .

## حل التمرين 63 ص31 ج1 :

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $[0;\pi]$ بـ : $f(x)=\cos^3 x-3\cos x+2$ :

- إثبات أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ من $[0;\pi]$ حيث $f(\alpha)=\sqrt{2}$ :

لدينا الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $[0;\pi]$ و دالتها المشتقة هي :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(-\sin x)(\cos^2 x)-3(-\sin x) \\ &= -3\sin x(\cos^2 x-1) \\ &= -3\sin x(-\sin^2 x) \\ &= (3\sin x)(\sin^2 x) \end{aligned}$$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sin x$ ، أي $f'(x)>0$ ، لأنّ $\sin x$ موجب على المجال $]0;\pi[$

ومنه جدول التغيرات :

| $x$ | $0$ $\quad\quad\quad\quad$ $\pi$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0 \nearrow \sqrt{2} \nearrow 4$ |

وجدنا أن الدالة $f$ مستمرة و متزايدة تمامًا على المجال $[0;\pi]$ ، ومنه لمّا $x\in[0;\pi]$ فإن $f(x)\in[0;4]$

و العدد $\sqrt{2}$ عنصر من المجال $[0;4]$ .

إذن: المعادلة $f(x)=\sqrt{2}$ تقبل حلاً وحيدًا $\alpha$ حيث $\alpha\in]0;\pi[$ ، أي أنه يوجد $\alpha\in]0;\pi[$ حيث $f(\alpha)=\sqrt{2}$ .

## حل التمرين 64 ص31 ج1 :

$f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-x^3+3x^2-1$ :

1) دراسة نهايات الدالة $f$ عند $-\infty$ و $+\infty$ :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x^3+3x^2-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x^3\right]=+\infty$ .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x^3+3x^2-1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x^3\right]=-\infty$ .

2) أ) حساب $f'$ مشتقة الدّالة $f$ ثم دراسة إشارتها :

من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=-3x^2+6x=3x(2-x)$

$f'(x)=0$ معناه $3x(2-x)=0$ ، ومنه $3x=0$ أي $x=0$ ، و $2-x=0$ أي $x=2$

$f'(x)<0$ معناه $x\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ ومنه الدالة $f$ متناقصة تمامًا على المجال $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$

$f'(x)>0$ معناه $x\in]0;2[$ ومنه الدالة $f$ متزايدة تمامًا على المجال $]0;2[$ .

ب) جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

3) إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدًا على كل مجال من المجالات $[-1;0]$ ، $[0;1]$ ، $[2;3]$ :

أولاً نحسب $f(-1)$ ، و $f(1)$ ، و $f(3)$ :

$f(-1)=-(-1)^3+3(-1)^2-1=1+3-1=3$

$f(1)=-(1)^3+3(1)^2-1=-1+3-1=1$

$f(3)=-(3)^3+3(3)^2-1=-27+27-1=-1$

- لدينا الدالة $f$ مستمرة على المجال $[-1;0]$ و متناقصة تمامًا عليه و $f(-1)\times f(0)<0$
ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدًا على المجال $[-1;0]$ .
- و لدينا الدالة $f$ مستمرة على المجال $[0;1]$ و متزايدة تمامًا عليه و $f(0)\times f(1)<0$

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدًا على المجال $[0;1]$ .

- و لدينا كذلك الدالة $f$ مستمرة على المجال $[2;3]$ وَ متناقصة تمامًا عليه وَ $f(2)\times f(3)<0$
ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدًا على المجال $[2;3]$ .

## حل التمرين 65 ص31 ج1 :

$f$ دالة معرفة على $[0;\pi]$ بـ : $f(x)=2+\frac{1}{2}\sin x$ :

- إثبات أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ من المجال $[0;\pi]$ بحيث $f(\alpha)=\alpha$ :

نضع دالة $g$ تكون معرفة على المجال $[0;\pi]$ بـ : $g(x)=2+\frac{1}{2}\sin x-x$

لندرس تغيرات هذه الدالة على المجال $[0;\pi]$ :

$g(0)=2+\frac{1}{2}\sin(0)-0=2$ ، لأن $\sin(0)=0$ .

$g(\pi)=2+\frac{1}{2}\sin(\pi)-0=2-\pi$ لأن $\sin(\pi)=0$ .

لدينا من أجل كل $x$ من $[0;\pi]$ ، $g'(x)=\frac{1}{2}\cos x-1$

- إشارة $g'(x)$ :

لدينا $-1\le\cos x\le 1$ ، ومنه بالقسمة على العدد 2 نجد $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\cos x\le\frac{1}{2}$ ، وبإضافة العدد $-1$ إلى أطراف المتباينة نجد

$-\frac{1}{2}-1\le\frac{1}{2}\cos x-1\le\frac{1}{2}-1$ .

إذن $-\frac{3}{2}\le g'(x)\le-\frac{1}{2}$ ، أي أن $g'(x)<0$

- جدول تغيرات $g(x)$ على المجال $[0;\pi]$ :

| $x$ | $0$ | $\pi$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $2$ ↘ | $2-\pi$ |

من جدول تغيرات $g(x)$ على المجال $[0;\pi]$ نستنتج أنّ الدالة $g$ مستمرة على المجال $[0;\pi]$ ومتناقصة تمامًا عليه وَ $f(0)\times f(\pi)<0$ ، ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ من المجال $[0;\pi]$ ، حيث $g(\alpha)=0$ .

أي أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ من المجال $[0;\pi]$ حيث $2+\frac{1}{2}\sin(\alpha)-\alpha=0$

ومنه $2+\frac{1}{2}\sin(\alpha)=\alpha$ .

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ من المجال $[0;\pi]$ حيث $f(\alpha)=\alpha$ .

## حل التمرين 66 ص31 ج1 :

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)^2$ :

1) إثبات أنّ الدالة $f$ متناقصة تمامًا على المجال $D=[0;2]$:

لدينا من أجل كل $x$ من $]0;2[$ ، $f'(x)=2\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

ومنه $2\sqrt{x} \geq 0$ ، أي أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $\sqrt{x}-\sqrt{2}$ .

لدينا $0<x<2$ ، ومنه $0<\sqrt{x}<\sqrt{2}$ ، يكافئ $0-\sqrt{2}<\sqrt{x}-\sqrt{2}<\sqrt{2}-\sqrt{2}$

أي أن $-\sqrt{2}<\sqrt{x}-\sqrt{2}<0$ ومنه $f'(x)<0$ .

إذن: الدالة $f$ متناقصة تمامًا على المجال $]0;2[$ .

2) لتكن الدالة $g$ المعرفة على $D=[0;2]$ بـ: $g(x)=f(x)-x$ :

• إثبات أن الدالة $g$ متناقصة تمامًا على المجال $D=[0;2]$:

لدينا الدالة $f$ متناقصة تمامًا على المجال $]0;2[$ ، ولدينا الدالة $x\mapsto -x$ متناقصة تمامًا على المجال $D$

إذن: الدالة $g$ متناقصة تمامًا على المجال $D=[0;2]$ ، لأنها مجموع دالتين متناقصتين تمامًا .

• حساب $g(0)$ وَ $g(2)$ ، ثم الإستنتاج أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدًا في المجال $D$ :

$$g(0)=\left(\sqrt{0}-\sqrt{0}\right)^2-0=2 \quad ، \quad g(2)=\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)^2-2=-2$$

لدينا الدالة $g$ مستمرة و متناقصة تمامًا على المجال $D=[0;2]$ ، لأنها دالة كثير حدود

ولدينا $g(0)\times g(2)<0$

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدًا في المجال $D=[0;2]$

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد ، معناه $f(x)-x=0$ تقبل حل وحيد

إذن: نستنتج أن $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدًا في المجال $D=[0;2]$ .

## حل التمرين 67 ص31 ج1 :

نعتبر الدالتين $f:x\mapsto\sqrt{x+1}$ ، وَ $g:x\mapsto -x^3$ :

• إثبات أن المنحنيين $(C_f)$ وَ $(C_g)$ الممثلين للدالتين $f$ وَ $g$ على الترتيب يتقاطعان في نقطة وحيدة

فاصلتها $x_0$ ، حيث $-\frac{7}{8}<x_0<-\frac{3}{4}$ :

لتكن دالة $h$ حيث $g:x\mapsto f(x)-g(x)=\sqrt{x+1}+x^3$

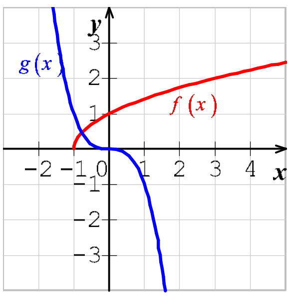
لدينا من أجل كل $x$ من $[-1;+\infty[$ ، $h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+3x^2$

ومنه $3x^2\geq 0$ وَ $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}>0$ ، أي أن $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+3x^2>0$ ، ومنه $h'(x)>0$

أي أن الدالة $h$ متزايدة تمامًا على المجال $]-1;+\infty[$ .

ومنه جدول التغيرات للدالة $h$ على المجال $]-1;+\infty[$ :

| $x$ | $-1$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $h'(x)$ | $+$ |
| $h(x)$ | $-1$ $\nearrow$ $+\infty$ |




من جدول التغيرات نستنتج أنه لمّا $x\in[-1;+\infty[$ فإن $h(x)\in[-1;+\infty[$

بما أنّ العدد 0 عنصر من المجال $[-1;+\infty[$ ، والدالة $h$ مستمرة و متزايدة تمامًا على المجال $[-1;+\infty[$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلاً على الأقل على المجال $[-1;+\infty[$
ولأن الدالة $h$ متزايدة تمامًا فإن هذا الحل وحيد .

- ولدينا كذلك $h\left(-\frac{7}{8}\right)=\sqrt{-\frac{7}{8}+1}+\left(-\frac{7}{8}\right)^3=\sqrt{\frac{1}{8}}-\left(\frac{7}{8}\right)^3<0$

و $h\left(-\frac{3}{4}\right)=\sqrt{-\frac{3}{4}+1}+\left(-\frac{3}{4}\right)^3=\frac{1}{2}-\frac{27}{64}=\frac{32-27}{64}=\frac{5}{64}>0$

- وجدنا أن $h\left(-\frac{7}{8}\right)\times h\left(-\frac{3}{4}\right)<0$ ، ونعلم أن الدالة $h$ مستمرة على $\left[-\frac{7}{8};-\frac{3}{4}\right]$ (دالة كثير حدود)

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلاً على المجال $\left[-\frac{7}{8};-\frac{3}{4}\right]$ ،

أي أنه يوجد عدد $\alpha\in\left[-\frac{7}{8};-\frac{3}{4}\right]$ حيث $h(\alpha)=0$ ، إذن $f(\alpha)=g(\alpha)$ لأن $h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)$

ومنه النقطة ذات الفاصلة $\alpha$ مشتركة بين المنحنيين $(C_f)$ وَ $(C_g)$ ، وهي وحيدة .

( التمثيل البياني أعلاه يبين ذلك ) .

## تمارين للتعمق :

### 2- نهاية منتهية أو غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$ :

### حل التمرين 68 ص31 ج1 :

$f$ هي الدالة المعرفة على $]3;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$ :

1) إيجاد عدد حقيقي $A$ حيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]0,99;1,01[$ :

لدينا $0,99<f(x)<1,01$ ومنه $0,99<\frac{x+1}{x-3}<1,01$ يكافئ $\frac{x-3}{x-3}\times 0,99<\frac{x+1}{x-3}<1,01\times\frac{x-3}{x-3}$ ،

أي $(x-3)\times 0,99<x+1<1,01\times(x-3)$ ، ومنه $0,99x-2,97<x+1<1,01x-3,03$ ،

بإضافة العدد $-1$ إلى أطراف المتباينة نجد $0,99x-3,97<x<1,01x-4,03$

ومنه لدينا $x-1,01x+4,03<0$ وَ $-x+0,99x-3,97<0$ ، ومنه $0,01x<-4,03$ و $-0,01x<3,97$

إذن : $x<-\frac{4,03}{0,01}$ وَ $x>\frac{3,97}{0,01}$

أي أن $A=397$ ، لأن $-403$ لا تنتمي إلى مجال تعريف الدالة $f$ .

2) إثبات أنّ المستقيم $\Delta$ الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ :

لدينا $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x+1}{x-3}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x}{x}\right]=1$ ، ومنه المستقيم $(\Delta):y=1$ مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة $f$ في جوار $-\infty$ وَ $+\infty$ .

- دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ :

نحسب الفرق $f(x)-1=\frac{x+1}{x-3}-1=\frac{x+1-x+3}{x-3}=\frac{4}{x-3}$

ومنه $\frac{4}{x-3}>0$ لأن $D_f=]3;+\infty[$ ، أي أن المنحنى $(C_f)$ يقع فوق المستقيم $(\Delta):y=1$ في مجال تعريف الدالة $f$ .

## حل التمرين 69 ص31ج1 :

$f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^4+2x^3+1$ :

- إيجاد عدد حقيقي $A>0$ ، حيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)>10^6$ :

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، و لدينا $f(x)>10^6$ ومنه من أجل $x$ كبير بالقدر الكافي ، فإن $f(x)>10^6$

وعليه يمكن أخذ العدد $A$ أكبر ما يمكن ، حيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)>10^6$ . وسيكون $A$ حتمًا أكبر من الصفر .

## حل التمرين 70 ص31ج1 :

$f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ :

1) دراسة نهاية الدالة $f$ عند 1 :

$$\lim_{x\to1^{\,}} f(x)=\lim_{x\to1}\left[\frac{x}{(x-1)^2}\right]=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

2) إيجاد مجال $I$ مركزه 1 حيث من أجل كل $x$ من $I$ ، $f(x)>10^6$ :

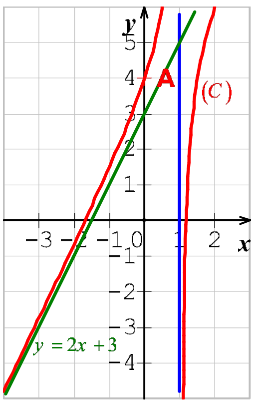
لدينا $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$ ، و لدينا $f(x)>10^6$ ومنه من أجل كل قيمة $x$ أقرب ما يمكن من العدد 1 ، فإن $f(x)>10^6$

وعليه يمكن تعيين المجال $I$ بالقيم القريبة جدًا من العدد 1 ، حيث إذا كان $x\in I$ فإن $f(x)>10^6$ .

## 3- نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيقي :

## حل التمرين 71 ص32ج1 :

لتكن الدالة $f$ حيث $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+d}$ ، و $(C)$ تمثيلها البياني :




- تعيين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ ، $c$ و $d$ :

لدينا $(C)$ يقبل مستقيمًا مقاربًا معادلته $x=1$ ، ومستقيمًا مقاربًا مائلاً معادلته $y=2x+3$ عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ويشمل النقطة $A(0;4)$ .

- أولاً النقطة $A(0;4)$ تنتمي إلى $(C)$ معناه $f(0)=4$

وبالتعويض في عبارة $f(x)$ نجد $a(0)+b+\dfrac{c}{(0)+d}=4$ ،

ومنه $b+\dfrac{c}{d}=4$..........................(1) ، حيث $d\neq0$ .

- يكون المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى $(C)$ إذا و فقط إذا كان $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\pm\infty$

أي أنه في عبارة الدالة $f$ ، $\lim\limits_{x\to1} f(x)=x+d=0$ ، أي أن $d=-1$ .

- يكون المستقيم ذو المعادلة $y=2x+3$ مقارب مائل للمنحنى $(C)$ عند $-\infty$ وَ $+\infty$ إذا كان $ax+b=2x+3$ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، بالمطابقة نجد $a=2$ ، و $b=3$

ومنه تصبح المعادلة $(1)$ : $3+\frac{c}{-1}=4$ ، ومنه $3-c=4$ أي أن $c=-1$ .

إذن: $a=2$ ، $b=3$ ، $c=-1$ ، وَ $d=-1$ .

## حل التمرين 72 ص32ج1 :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$ :

1) تعيين $a$ ، $b$ ، $c$ ، وَ $d$ ، بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x$ يكون $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x+1)^2}$ :

لدينا : $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x+1)^2}=\frac{ax+b(x+1)^2+cx+d}{(x+1)^2}=\frac{ax+b(x^2+2x+1)+cx+d}{(x+1)^2}$

$=\frac{ax^3+2ax^2+ax+bx^2+2bx+b+cx+d}{(x+1)^2}=\frac{ax^3(2a+b)x^2+(a+2b+c)x+(b+d)}{(x+1)^2}$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$ نجد $a=1$ ، وَ $\begin{cases}2a+b=3\\a+2b+c=6\\b+d=3\end{cases}$ ، ومنه $b=3-2=1$

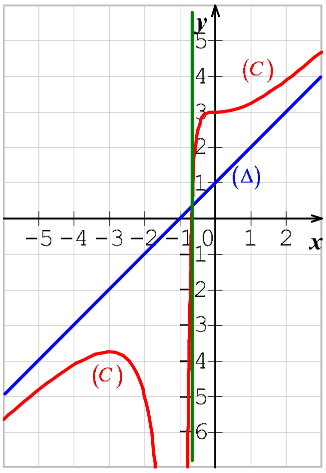
وَ $1+2+c=6$

، أي $c=6-3=3$ ، وَ $1+d=3$ ومنه $d=2$

إذن: $a=1$ ، $b=1$ ، $c=3$ ، وَ $d=2$ ، أي أن $f(x)=x+1+\frac{3x+2}{(x+1)^2}$ .

2) استنتاج أن المنحنى $(C)$ الممثل للدالة $f$ يقبل مستقيمًا مقاربًا مائلا $(\Delta)$ عند $-\infty$ وَ $+\infty$ :

لدينا $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3x+2}{(x+1)^2}\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[x+1+\frac{3x+2}{(x+1)^2}-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)-(x+1)$




$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3x}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3}{x}\right]=0$

ومنه نستنتج أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C)$ عند $-\infty$ وَ $+\infty$

3) تحديد وضعية المنحنى $(C)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ :

لدينا $\frac{3x+2}{(x+1)^2}=f(x)-(x+1)=x+1+\frac{3x+2}{(x+1)^2}-(x+1)$ ،

ومنه المقام $(x+1)^2>0$ ، وَ في البسط $x=-\frac{2}{3}$ ، أي أن $(C)$ يقطع $(\Delta)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x=-\frac{2}{3}$ ، لأنه لمّا $x=-\frac{2}{3}$ ، $f(x)-(x+1)=0$

ومنه لمّا $x\in\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$ ، المنحنى $(C)$ يقع فوق المستقيم $(\Delta)$ .

و لمّا $x\in\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[$ ، المنحنى $(C)$ يقع أسفل المستقيم $(\Delta)$ . ( كما يبينه التمثيل البياني أعلاه ) .

## حل التمرين 73 ص32 ج1 :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$ :

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]$ :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x$ ،

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}=\left[\sqrt{x^2+4x+5}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2}\right]=+\infty .$$

ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+4x+5}-(x+2)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+4x+5}-(x+2)\right)\times\frac{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+4x+5-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+4x+5-x^2-4x-4}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}\right]=0$$

2) استنتاج أن المنحنى $(C)$ الممثل للدالة $f$ يقبل مستقيمًا مقاربًا مائلا $(\Delta)$ عند $+\infty$ :

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$ ، ومنه المستقيم $(\Delta):y=x+2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C)$ عند $+\infty$ .

3) أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}=\left[\sqrt{x^2+4x+5}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2}\right]=+\infty$$

**ب)** إثبات أنه يوجد عددان حقيقيان $\alpha$ و $\beta$ ، بحيث $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha$ ، و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\alpha x\right]=\beta$ :

لدين من أجل كل $x\neq 0$ ،

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[-\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}\right]=-1$$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ ، أي أن $\boxed{\alpha=-1}$ .

• لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\alpha x\right]=\beta$ ، ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\beta$ :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+4x+5}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right)\times\frac{\sqrt{x^2+4x+5}-x}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+5}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+4x+5-x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}=\frac{-4}{2}=-2$$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=-2$ ، أي أن $\boxed{\beta=-2}$

**ج)** وجدنا أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)+x=-2$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)+x+2=0$ يكافئ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(-x-2)=0$

ومنه المستقيم $(\Delta')$ ذو المعادلة $y=-x-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C)$ عند $-\infty$ .

## حل التمرين 74 ص32ج1 :

$f$ و $g$ دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^+$ على الترتيب بـ : $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ و $g(x)=\sqrt{x^2+4x}$ :

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ :

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}=+\infty$ .

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+4x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}=+\infty$ .

2) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$ :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}-x+\frac{1}{2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x+\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+x+1-x^2-x-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}\right]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+4x}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x+\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{x^2+4x}+x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+4x}+x+\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+4x}+x+\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+4x-x^2-x-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+4x}+x+\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}+x+\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{1}{4x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{4}{x}}+x+\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{1}{4x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1+\frac{1}{2x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{4x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1+\frac{1}{2x}}=\frac{3}{2}$$

- التخمين حول السلوك التقاربي للدالتين $f$ و $g$ عند $+\infty$ :

أولاً لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=0$ ، ومنه المنحنى الممثل للدالة $f$ يقبل عند $+\infty$ مستقيمًا مقاربًا مائلاً معادلته $y=x+\frac{1}{2}$ ، أي أنه في جوار $+\infty$ ، المنحنى الممثل للدالة $f$ يقترب من المستقيم ذو المعادلة $y=x+\frac{1}{2}$ في جوار $+\infty$ .

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{3}{2}$ ، ومنه $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}\right]=0$ ، يكافئ $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\right]=0$ ، أي أن $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-(x+2)\right]=0$ ، ومنه المنحنى الممثل للدالة $g$ يقبل عند $+\infty$ مستقيمًا مقاربًا مائلاً معادلته $y=x+2$ ، أي أنه في جوار $+\infty$ ، المنحنى الممثل للدالة $g$ يقترب من المستقيم ذو المعادلة $y=x+2$ في جوار $+\infty$ ، ولا يقترب من المستقيم ذو المعادلة $y=x+\frac{1}{2}$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\neq 0$ .

3) وجدنا سابقًا $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-(x+2)\right]=0$ ، ومنه نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y=x+2$ مستقيم مقارب مائل في جوار $+\infty$ .

## حل التمرين 75 ص32 ج1 :

$f$ هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$ ، و $(C)$ تمثيلها البياني في معلم :

1) إثبات أن المستقيم $\Delta$ الذي معادلته $y=2x+3$ مقارب للمنحنى $(C)$ عند $+\infty$ :

معناه

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x+1+\sqrt{x^2+4x}\right)-(2x+3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+4x}\right)-(x+2)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+4x}-(x+2)\right)\times\left(\frac{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)}{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+4x-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x}+x+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+4x-(x^2+4x+4)}{\sqrt{x^2+4x}+x+2}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-4}{\sqrt{x^2+4x}+x+2}\right]=0$$

إذن : نستنتج أنّ المستقيم $\Delta$ الذي معادلته $y=2x+3$ مقارب للمنحنى $(C)$ عند $+\infty$ .

2) دراسة الوضعية النسبية لـ $(C)$ و $(\Delta)$ :

لندرس إشارة الفرق $f(x)-(2x+3)$ على $[0;+\infty[$ :

$$f(x)-(2x+3)=x+1+\sqrt{x^2+4x}-(2x+3)=\sqrt{x^2+4x}-(x+2)$$

حتى يكون $\sqrt{x^2+4x}-(x+2)\geq 0$ يجب أن يكون $x^2+4x-(x+2)^2\geq 0$ أي

$x^2+4x-x^2-4x-4\geq 0$ ، يكافئ: $-4\geq 0$ ، وهذا مستحيل .

ومنه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ فإن $f(x)-(2x+3)<0$ ،

إذن : المنحنى $(C)$ يقع أسفل المستقيم $\Delta$ من أجل كل $x$ من $[0;+\infty[$ .

## حل التمرين 76 ص32 ج1 :

$f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-\frac{1}{2}x+\sqrt{|x^2-1|}$ ، و $(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

1) تعيين $D$ مجموعة تعريف الدالة $f$ :

لدينا من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، $|x^2-1|\geq 0$ ، أي أن $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$ .

2) حساب نهايات الدالة $f$ عند $-\infty$ و $+\infty$ :

لدينا $|x^2-1|\geq 0$ ، ومنه $x=1$ و $x=-1$

أي أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1} : x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\\ -\frac{1}{2}x+\sqrt{-x^2+1} : x\in]-1;1[\end{cases}$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\right]$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}x-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\right]=+\infty$$

و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}x+x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\right]=+\infty$$

3) حساب $\lim_{x \to -\infty}\left[f(x)+\frac{3}{2}x\right]$ وَ $\lim_{x \to +\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]$ :

$$\lim_{x \to -\infty}\left[f(x)+\frac{3}{2}x\right] = \lim_{x \to -\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1}+\frac{3}{2}x\right] = \lim_{x \to -\infty}\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\times\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\right] = \lim_{x \to -\infty}\left[\frac{x^2-x^2-1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty}\left[\frac{-1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right] = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}x\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[\sqrt{x^2-1}-x\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty}\left[\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\times\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x}\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}\right] = 0$$

4) الاستنتاج :

- لدينا $\lim_{x \to -\infty}\left[f(x)+\frac{3}{2}x\right]=0$ ومنه $\lim_{x \to -\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right)\right]=0$

إذن نستنتج أن المستقيم $\Delta$ ذو المعادلة $y=-\frac{3}{2}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C)$ عند $-\infty$ .

- ولدينا $\lim_{x \to +\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=0$ ومنه نستنتج أن المستقيم $\Delta'$ ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C)$ عند $+\infty$ .

5) تحديد وضعية $(C)$ بالنسبة إلى كل من المستقيمين $\Delta$ وَ $\Delta'$ :

- أولا بالنسبة إلى $(\Delta)$ ندرس إشارة الفرق $f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right)$ :

$$f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x+\sqrt{|x^2-1|}+\frac{3}{2}x = \sqrt{|x^2-1|}+x$$

ومنه $f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right)\geq 0$ تكافئ $\sqrt{|x^2-1|}+x\geq 0$ ، أي أن $\sqrt{|x^2-1|}\geq -x$ ...............(1) ،

- إذن إذا كان $x>0$ فإن المتراجحة (1) محققة ، ومنه المنحنى $(C)$ يقع فوق المستقيم $(\Delta)$ .
- وإذا كان $x\leq 0$ فإن المتراجحة (1) تكافئ $\left(\sqrt{|x^2-1|}\right)^2\geq(-x)^2$ ، ومنه $|x^2-1|\geq x^2$

إذن $x^2-1\geq x^2$ لمّا $x\leq -1$ ، أي $-1\geq 0$ وهذا مستحيل

وَ $-x^2+1\geq x^2$ لمّا $-1\leq x\leq 0$ ، أي $2x^2\leq 1$ ، ومنه $x^2\leq\frac{1}{2}$ ، أي أنّ $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$

وهذا يكافئ $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq 0$

- إذن لمّا $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq 0$ ، $f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right)>0$ ومنه المنحنى $(C)$ يقع فوق المستقيم $(\Delta)$ .

ولمّا $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right)=0$ ، ومنه المنحنى $(C)$ يقطع المستقيم $(\Delta)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

ولمّا $x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right)<0$ ، ومنه المنحنى $(C)$ يقع أسفل المستقيم $(\Delta)$ .

- ثانيًا ندرس إشارة الفرق $f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right)$ :

$$f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}x+\sqrt{|x^2-1|}-\frac{1}{2}x=\sqrt{|x^2-1|}-x$$

ومنه $f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right)\geq 0$ تكافئ $\sqrt{|x^2-1|}-x\geq 0$ ، أي أن $\sqrt{|x^2-1|}\geq x$ ..............(2) ،

- إذن إذا كان $x<0$ فإن المتراجحة (2) محققة ، ومنه المنحنى $(C)$ يقع فوق المستقيم $(\Delta')$ .
- وإذا كان $x\geq 0$ فإن المتراجحة (2) تكافئ $\left(\sqrt{|x^2-1|}\right)^2\geq x^2$ ، ومنه $|x^2-1|\geq x^2$

إذن $x^2-1\geq x^2$ لمّا $x\geq 1$ ، أي $-1\geq 0$ وهذا مستحيل .

ولدينا سابقا $x^2\leq\frac{1}{2}$ ، أي أنه لمّا $0\leq x\leq 1$ ، $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ وهذا يكافئ $0\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$

- إذن لمّا $0\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right)>0$ ومنه المنحنى $(C)$ يقع فوق المستقيم $(\Delta')$ .

ولمّا $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right)=0$ ، ومنه المنحنى $(C)$ يقطع المستقيم $(\Delta')$ .

ولمّا $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right)<0$ ، ومنه المنحنى $(C)$ يقع أسفل المستقيم $(\Delta')$ .

## المنحنيات المتقاربة :

## حل التمرين 77 ص32 و33 ج1 :

$f$ هي الدالة المعرفة على $]-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^3+2x^2+1}{x+2}$ ، و $(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

1) حساب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+2x^2+1}{x+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\right]=+\infty$$

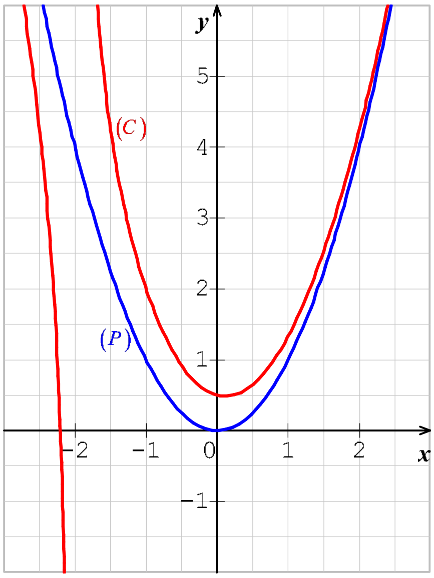
2) أ) حساب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]$ :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+2x^2+1}{x+2}-x^2\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+2x^2+1-x^2(x+2)}{x+2}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x+2}\right]=0$$

**ب)** لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]=0$ ، هذا معناه هندسيًا أنه : كلمـا اقتربت الفاصلة $x$ من $+\infty$ ، اقترب العدد $f(x)$ من $x^2$ ، أي أن نقط المنحنى $(C)$ متقاربة من نقط المنحنى $(P)$ الممثل للدالة $x^2$ .

ونقول في هذه الحالة أن المنحنيين $(C)$ وَ $(P)$ متقاربان عند $+\infty$ .

ج) رســــم المنحنيين $(C)$ وَ $(P)$ :

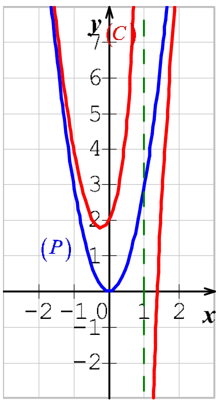



## حل التمرين 78 ص 33 ج1 :

$f$ هي الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=3x^2-\dfrac{2}{x-1}$ ، و $(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

1) البحث عن منحنٍ $(P)$ مقارب للمنحنى $(C)$ عند $+\infty$ :

نحسب نهاية $f(x)$ عند $+\infty$ :




$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3x^2-\dfrac{2}{x-1}\right]=+\infty$ ، لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{2}{x-1}\right]=0$

نلاحظ أنه يوجد منحن $(P)$ مقارب للمنحنى $(C)$ في جوار $+\infty$ ، للتأكد نحسب :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(3x^2\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[3x^2-\frac{2}{x-1}-\left(3x^2\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{x-1}\right]=0$$

من حساب النهايتين السابقتين نستنتج أنّ المنحنى $(C)$ يقترب من المنحنى $(P)$ ذو المعادلة $y=3x^2$ عند $+\infty$ .

- تحديد الوضعية النسبية للمنحنيين $(C)$ وَ $(P)$ :

معناه ندرس إشارة الفرق $f(x)-\left(3x^2\right)$ على $\mathbb{R}$ :

$$f(x)-\left(3x^2\right)=3x^2-\frac{2}{x-1}-\left(3x^2\right)=-\frac{2}{x-1}$$

ومنه لمّا $x<1$ ، $f(x)-\left(3x^2\right)>0$ ، أي أن المنحنى $(C)$ يقع فوق $(P)$ على المجال $]-\infty;1[$

ولمّا $x>1$ ، $f(x)-\left(3x^2\right)<0$ ، أي أن المنحنى $(C)$ يقع أسفل $(P)$ على المجال $]1;+\infty[$

2) إثبات أن المنحنيين $(C)$ وَ $(P)$ متقاربان عند $-\infty$ :

لدينا الدالة $f$ معرفة على المجال $]-\infty;1[$ ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و لدينا أيضًا

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(3x^2\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[3x^2-\frac{2}{x-1}-\left(3x^2\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{2}{x-1}\right]=0$$

إذن : المنحنيين $(C)$ وَ $(P)$ متقاربان عند $-\infty$ ، ( والتمثيل البياني أعلاه يبين ذلك ) .

## حل التمرين 79 ص 33 ج1 :

$f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}$ ، و $(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

- البحث عن منحنٍ $(P)$ لدالة مرجعية مقارب للمنحنى $(C)$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ :

لدينا من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$ :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x}{x^2+1}\right]=0$$

نستنتج أن المنحنى $(P)$ الممثل للدالة مقلوب $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ (دالة مرجعية) مقارب للمنحنى $(C)$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ .

- تحديد الوضعية النسبية للمنحنيين $(C)$ وَ $(P)$ :

معناه ندرس إشارة الفرق $f(x)-(3x^2)$ على $\mathbb{R}$ :

$$f(x)-\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+1}$$

ومنه لمّا $x<0$ ، $f(x)-\left(\dfrac{1}{x}\right)<0$ ، أي أن المنحنى $(C)$ يقع أسفل $(P)$ على المجال $]-\infty;0[$

ولمّا $x>1$ ، $f(x)-\left(\dfrac{1}{x}\right)>0$ ، أي أن المنحنى $(C)$ يقع فوق $(P)$ على المجال $]0;+\infty[$ .

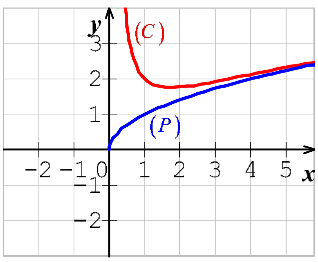
## حل التمرين 80 ص 33 ج1 :

$f$ هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x}}$ ، و $(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

- البحث عن منحنٍ $(P)$ لدالة مرجعية مقارب للمنحنى $(C)$ عند $+\infty$ :

لدينا من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\sqrt{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1}{x\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1+\left(x\sqrt{x}\right)\left(-\sqrt{x}\right)}{x\sqrt{x}}\right]$$




$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1-x^2}{x\sqrt{x}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x\sqrt{x}}\right]=0$$

نستنتج أن المنحنى $(P)$ الممثل للدالة جذر $x\mapsto\sqrt{x}$ (دالة مرجعية) مقارب للمنحنى $(C)$ عند $+\infty$ .

- تحديد الوضعية النسبية للمنحنيين $(C)$ وَ $(P)$ :

معناه ندرس إشارة الفرق $f(x)-\left(\sqrt{x}\right)$ :

$f(x)-\left(\sqrt{x}\right)=\dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}>0$ ، لأن $x\mapsto\sqrt{x}$ معرفة من أجل $x\geq 0$

ومنه لمّا $x>0$ ، $f(x)-(\sqrt{x})>0$ ، أي أن المنحنى $(C)$ يقع فوق $(P)$ على المجال $]0;+\infty[$ .

## تمارين للتعمق :

### 3- تتمات على النهايات :

### حل التمرين 81 ص33ج1 :

$f$ هي الدالة المعرفة على $D=\mathbb{R}-\{-1;4\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{x^2-3x-4}$ :

1) إيجاد ثلاثة أعداد حقيقية $a$ ، $b$ ، وَ $c$ حيث من أجل كل $x$ من $D$ : $f(x)=a+\dfrac{b}{(x+1)}+\dfrac{c}{(x-4)}$

لدينا $f(x)=a+\dfrac{b}{(x+1)}+\dfrac{c}{(x-4)}=\dfrac{a[(x+1)(x-4)]+b(x-4)+c(x+1)}{(x+1)(x-4)}$

$$=\frac{ax^2 3ax-4a+bx-4b+cx+c}{x^2-3x-4}=\frac{ax^2+(b+c-3a)x-4a-4b+c}{x^2-3x-4}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{x^2-3x-4}$ من أجل كل $x$ من $D_f=\mathbb{R}-\{-1;4\}$ نجد

$\begin{cases}a=3\\ b+c-3a=2\\ -4a-4b+c=0\end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases}b+c=2+9=11\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\\ -4b+c=12\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)\end{cases}$

بطرح المعادلة $(2)$ من $(1)$ نجد : $b+c-(-4b+c)=11-12$ ، ومنه $5b=-1$ أي أن $b=-\dfrac{1}{5}$

بالتعويض في المعادلة $(1)$ نجد $-\dfrac{1}{5}+c=11$ ومنه $c=\dfrac{1}{5}+11$ أي أن $c=\dfrac{56}{5}$

إذن: $a=3$ ، $b=-\dfrac{1}{5}$ ، وَ $c=\dfrac{56}{5}$ . أي أن $f(x)=3-\dfrac{\frac{1}{5}}{(x+1)}+\dfrac{\frac{56}{5}}{(x-4)}$

2) دراسة نهايات الدالة $f$ عند حدود مجموعة التعريف :

لدينا $D_f=\mathbb{R}-\{-1;4\}=]-\infty;-1[\cup]-1;4[\cup]4;+\infty[$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[3-\dfrac{\frac{1}{5}}{(x+1)}+\dfrac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right]=3$ ، لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\frac{1}{5}}{(x+1)}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right]=0$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\<}}f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\left[3-\frac{\frac{1}{5}}{(x+1)}+\frac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right]=3-\frac{\frac{1}{5}}{0^-}+\frac{\frac{56}{5}}{(-1-4)}=-\infty \text{ .}$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\>}}\left[3-\frac{\frac{1}{5}}{(x+1)}+\frac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right]=3-\frac{\frac{1}{5}}{0^+}+\frac{\frac{56}{5}}{(-1-4)}=+\infty \text{ .}$$

$$\lim_{\substack{x\to4\\<}}f(x)=\lim_{\substack{x\to4\\<}}\left[3-\frac{\frac{1}{5}}{(x+1)}+\frac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right]=3-\frac{\frac{1}{5}}{(4+1)}+\frac{\frac{56}{5}}{0^-}=-\infty \text{ .}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 4} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 4}\left[3 - \frac{\frac{1}{5}}{(x+1)} + \frac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right] = 3 - \frac{\frac{1}{5}}{(4+1)} + \frac{\frac{56}{5}}{0^+} = +\infty \;.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[3 - \frac{\frac{1}{5}}{(x+1)} + \frac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right] = 3$$ ، لأن $\lim_{x \to +\infty}\left[\frac{\frac{1}{5}}{(x+1)}\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right] = 0$ .

## حل التمرين 82 ص33ج1 :

تعيين في كل حالة من الحالات التالية مجموعة تعريف الدالة $f$ ثم حساب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف :

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$ :

لدينا من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، المقام $x^2+2x-3 \neq 0$ ومنه $(x+3)(x-1) \neq 0$ أي أن $x+3 \neq 0$

ومنه $x \neq -3$ ، وَ $x-1 \neq 0$ ومنه $x \neq 1$ .

إذن: $D_f = \mathbb{R} - \{-3;1\} = ]-\infty;-3[ \cup ]-3;1[ \cup ]1;+\infty[$ .

- حساب النهايات التالية :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}\left[\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right] = \lim_{x \to -\infty}\left[\frac{x}{x^2}\right] = \lim_{x \to -\infty}\left[\frac{1}{x}\right] = 0$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} -3} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} -3}\left[\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right] = \frac{-2}{0^+} = -\infty \;.$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -3} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -3}\left[\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right] = \frac{-2}{0^-} = +\infty \;.$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 1}\left[\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right] = \frac{2}{0^-} = -\infty \;.$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1}\left[\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right] = \frac{2}{0^+} = +\infty \;.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{x}{x^2}\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{1}{x}\right] = 0 \;.$$

2) $f(x) = \dfrac{3x}{(x+1)^2}$ :

لدينا من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، المقام $(x+1)^2 > 0$ أي أن $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty;+\infty[$

- حساب النهايات التالية :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}\left[\frac{3x}{(x+1)^2}\right] = \lim_{x \to -\infty}\left[\frac{3x}{x^2}\right] = \lim_{x \to -\infty}\left[\frac{3}{x}\right] = 0 \;.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{3x}{(x+1)^2}\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{3x}{x^2}\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{3}{x}\right] = 0 \;.$$

$f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-2}$ (3

لدينا من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، المقام $x^2+x-2\neq 0$ ومنه $(x-1)(x+2)\neq 0$ أي أن $x-1\neq 0$ ومنه $x\neq 1$ ، وَ $x+2\neq 0$ ومنه $x\neq -2$ ، ولدينا في البسط $x^2+x+1\in\mathbb{R}$

إذن: $D_f=\mathbb{R}-\{-2;1\}=]-\infty;-2[\cup]-2;1[\cup]1;+\infty[$ .

- حساب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{x^2}\right]=1 \; .$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-2}\left[\frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\right]=\frac{3}{0^+}=+\infty \; .$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-2}\left[\frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\right]=\frac{3}{0^-}=-\infty \; .$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}1}\left[\frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\right]=\frac{3}{0^-}=-\infty \; .$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\left[\frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\right]=\frac{3}{0^+}=+\infty \; .$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x^2}\right]=1 \; .$$

$f(x)=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-4}$ : (5

لدينا من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، المقام $x-1\neq 0$ ومنه $x\neq 1$ وَ $x^2-4\neq 0$ ومنه $x^2\neq 4$ أي أن $x\neq 2$ وَ $x\neq -2$

إذن: $D_f=\mathbb{R}-\{-2;1;2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;1[\cup]1;2[\cup]2;+\infty[$ .

- حساب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-4}\right]=0-0=0 \; .$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-2}\left[\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-4}\right]=\frac{2}{-3}-\frac{1}{0^+}=-\infty \; .$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-2}\left[\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-4}\right]=\frac{2}{-3}-\frac{1}{0^-}=+\infty \; .$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}1}\left[\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-4}\right]=\frac{2}{0^-}-\frac{1}{-3}=-\infty \; .$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\left[\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-4}\right]=\frac{2}{0^+}-\frac{1}{-3}=+\infty \; .$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}2}\left[\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-4}\right]=\frac{2}{1}-\frac{1}{0^-}=+\infty \; .$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}2}\left[\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-4}\right]=\frac{2}{1}-\frac{1}{0^+}=-\infty \; .$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-4}\right]=0-0=0 \; .$$

$$(6 \quad : f(x)=\frac{(x+2)^3-8}{x}$$

لدينا من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، المقام $x \neq 0$ ومنه $D_f=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ .

- حساب النهايتين التاليتين :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(x+2)^3-8}{x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x^2\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left[\frac{(x+2)^3-8}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{(x+2)^3-2^3}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{((x+2)-2)\left((x+2)^2+2(x+2)+4\right)}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{x\left(x^2+4x+4+2x+4+4\right)}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{x\left(x^2+6x+12\right)}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[x^2+6x+12\right]$$

$$=12$$

**قاعدة:**

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

## حل التمرين 83 ص33 ج1 :

حساب النهايات التالية باستعمال المرافق :

- $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right]$ :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\times\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1-\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right]=\frac{2}{+\infty}=0$$

- $\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]$ :

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1^2}{x\sqrt{x+1}+1}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{x+1-1}{x\sqrt{x+1}+1}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{x}{x\sqrt{x+1}+1}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\right]=+\infty$$

- $\lim_{x\to+\infty}\left[x^2-\sqrt{x+2}\right]$ :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2-\sqrt{x+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2-\sqrt{x+2}\times\frac{x^2+\sqrt{x+2}}{x^2+\sqrt{x+2}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^4-x+2}{x^2+\sqrt{x+2}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^4}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

▪ $\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}+x\right]$ :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}+x\times\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}-x}=\frac{-1}{+\infty}=0$$

▪ $\lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2+3}\right]$ :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2+3}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2+3}\times\left(\frac{x-\sqrt{x^2+3}}{x-\sqrt{x^2+3}}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-x^2+3}{x-\sqrt{x^2+3}}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3}{x-\sqrt{x^2+3}}\right]=\frac{3}{(-\infty)-(+\infty)}=\frac{3}{-\infty}=0$$

▪ $\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}\right]$ ، حيث $a>0$ ، و $b>0$ :

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}\times\frac{\sqrt{x^2+a^2}+a}{\sqrt{x^2+b^2}+a}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{x^2+a^2-a^2}{\left(\sqrt{x^2+b^2}-b\right)\left(\sqrt{x^2+b^2}+a\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+b^2}-b\right)\left(\sqrt{x^2+b^2}+a\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+b^2+a\sqrt{x^2+b^2}-b\sqrt{x^2+b^2}-ba}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2\left(1+\frac{b^2}{x^2}+\frac{(a-b)\sqrt{x^2+b^2}}{x^2}-\frac{ba}{x^2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\frac{b^2}{x^2}+\frac{(a-b)\sqrt{x^2+b^2}}{x^2}-\frac{ba}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}1+\frac{x^2}{b^2}+\frac{x^2}{(a-b)\sqrt{x^2+b^2}}-\frac{x^2}{ba}=1+0+0-0=1$$

## حل التمرين 84 ص34 ج1 :

حساب النهايات التالية باستعمال تعريف العدد المشتق :

• $\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]$ :

نضع دالة $f$ حيث $f:x\mapsto\sqrt{x+1}$ ، ومنه الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق هو

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1}}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]$$

ولدينا $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ، ومنه $f'(0)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$ ، أي أن $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]=f'(0)=\frac{1}{2}$ .

- $\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}\right]$ :

نضع دالة $f$ حيث $f:x\mapsto\sqrt{x^2+1}$، ومنه الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق عند 1 و عددها المشتق هو :

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right]\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}\right]$$

ولدينا $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ومنه $f'(1)=\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

ومنه $\frac{1}{\sqrt{2}}=f'(1)=\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}\right]$ .

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\right]$ :

نضع دالة $f$ حيث $f:x\mapsto\sqrt{x^2+2x}$، ومنه الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+2x}-0}{x-0}\right]$$

ولدينا $f'(x)=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}}=\frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ ، ومنه $f'(0)=\frac{0+1}{\sqrt{0^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$

<u>إذن :</u> $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\right]=f'(0)=1$

- $\lim_{x\to 3}\left[\frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}\right]$ :

نضع دالة $f$ حيث $f:x\mapsto x\sqrt{x+1}-6$، ومنه الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق عند 3 و عددها المشتق هو :

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\left[\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\right]=\lim_{x\to 3}\left[\frac{x\sqrt{x+1}-6-0}{x-3}\right]=\lim_{x\to 3}\left[\frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}\right]$$

ولدينا $f'(x)=\sqrt{x+1}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}=\frac{2(x+1)+x}{2\sqrt{x+1}}=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$ ، ومنه $f'(3)=\frac{3(3)+2}{2\sqrt{3+1}}=\frac{11}{4}$

إذن: $\lim_{x\to 3}\left[\frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}\right]=f'(3)=\frac{11}{4}$ .

## حل التمرين 85 ص34 ج1 :

حساب النهايات التالية باستعمال تعريف العدد المشتق :

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]$ :

نضع دالة $f$ حيث $f:x\mapsto\sin x$، ومنه الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق هو :

$$f'(0)=\lim_{x\to 3}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x-\sin(0)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x-0}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

ولدينا $f'(x)=\cos x$ ، ومنه $f'(0)=\cos(0)=1$ ، إذن: $f'(0)=1=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]$ .

▪ $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x}\right]$ :

نضع دالة $f$ حيث $f:x\mapsto 1-\cos x$ ، ومنه الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق هو :
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x-(1-\cos(0))}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\cos x+1}{x}\right]$$

ولدينا $f'(x)=\sin x$ ، ومنه $f'(0)=\sin(0)=0$ ، إذن: $f'(0)=0=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x}\right]$ .

▪ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right]$ :

نضع دالة $f$ حيث $f:x\mapsto\cos x$ ، ومنه الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق عند $\frac{\pi}{2}$ و عددها المشتق هو :
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right]$$

ولدينا $f'(x)=-\sin x$ ، ومنه $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ ، إذن: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right]$ .

## حل التمرين 86 ص34 ج1 :

حساب النهايات التالية باستعمال النهايتين $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=1$ ، و $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{x}\right]=1$ :

- $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{x}\right]$ :

لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[3\frac{\sin x}{x}\right]=3\left(\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]\right)=3\times 1$ ، ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{x}\right]=3$ .

- $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\tan 3x}{x}\right]$ :

لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\tan 3x}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[3\frac{\tan x}{x}\right]=3\left(\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{x}\right]\right)=3\times 1$ ، ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\tan 3x}{x}\right]=3$ .

- $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{2x}\right]$ :

لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{2x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{3}{2}\times\frac{\sin x}{x}\right]=\frac{3}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]\right)=\frac{3}{2}\times 1$ ، ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{2x}\right]=\frac{3}{2}$ .

- $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{4x}\right]$ :

لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{4x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{4}\times\frac{\tan x}{x}\right]=\frac{1}{4}\left(\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{x}\right]\right)=\frac{1}{4}\times 1$ ، ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{4x}\right]=\frac{1}{4}$ .

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin ax}{bx}\right]$ :

لدينا $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin ax}{bx}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{a}{b}\times\frac{\sin x}{x}\right]=\frac{a}{b}\left(\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]\right)=\frac{a}{b}\times 1$ ، ومنه $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin ax}{bx}\right]=\frac{a}{b}$ .

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan ax}{bx}\right]$ :

لدينا $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan ax}{bx}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{a}{b}\times\frac{\tan x}{x}\right]=\frac{a}{b}\left(\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{x}\right]\right)=\frac{a}{b}\times 1$ ، ومنه $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan ax}{bx}\right]=\frac{a}{b}$ .

## حل التمرين 87 ص34 ج1 :

حساب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to -1}\left[\frac{\sqrt{1-8x}-3}{x+1}\right]$ :

نضع دالة $f$ حيث $f:x\mapsto\sqrt{1-8x}$ ، ومنه الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق عند $-1$ و عددها المشتق هو : $f'(-1)=\lim_{x\to -1}\left[\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\right]=\lim_{x\to -1}\left[\frac{\sqrt{1-8x}-\sqrt{9}}{x+1}\right]=\lim_{x\to -1}\left[\frac{\sqrt{1-8x}-3}{x+1}\right]$

ولدينا $f'(x)=\frac{-8}{2\sqrt{1-8x}}=\frac{-4}{\sqrt{1-8x}}$ ، ومنه $f'(-1)=\frac{-4}{\sqrt{1-8(-1)}}=\frac{-4}{\sqrt{9}}=-\frac{4}{3}$

إذن: $\lim_{x\to -1}\left[\frac{\sqrt{1-8x}-3}{x+1}\right]=f'(-1)=-\frac{4}{3}$ .

2) $\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}\right]$ :

نضع دالة $f$ حيث $f:x\mapsto\sqrt{x^2-9}$ ، ومنه الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق عند 3 و عددها المشتق هو : $f'(3)=\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\right]=\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{\sqrt{x^2-9}-\sqrt{9-9}}{x-3}\right]=\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}\right]$

ولدينا $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$ ، ومنه $f'(3)=\frac{3}{0^+}=+\infty$

إذن: $\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}\right]=f'(3)=+\infty$ .

3) $\lim_{x\to -3^-}\left[\frac{\sqrt{x^2-9}}{x+3}\right]$ :

نضع دالة $f$ حيث $f:x\mapsto\sqrt{x^2-9}$ ، ومنه الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق عند $-3$ و عددها المشتق هو : $f'(-3)=\lim_{x\to -3^-}\left[\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}\right]=\lim_{x\to -3^-}\left[\frac{\sqrt{x^2-9}-\sqrt{9-9}}{x+3}\right]=\lim_{x\to -3^-}\left[\frac{\sqrt{x^2-9}}{x+3}\right]$

ولدينا $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$ ، ومنه $f'(-3)=\frac{-3}{\sqrt{x^2-9}}$

إذن: $\lim\limits_{x \to -3^-}\left[\frac{\sqrt{x^2-9}}{x+3}\right]=f'(-3)=+\infty$ .

4) $\lim\limits_{x \to 3}\left[\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right]$ :

نضع دالة $f$ حيث $f: x \mapsto \sqrt{x+1}$، ومنه الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق عند 3 و عددها المشتق هو

$$f'(3)=\lim_{x \to 3}\left[\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\right]=\lim_{x \to 3}\left[\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3+1}}{x-3}\right]=\lim_{x \to 3}\left[\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right]$$

ولدينا $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ، ومنه $f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3+1}}=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$

إذن: $\lim\limits_{x \to 3}\left[\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right]=f'(3)=\frac{1}{4}$ .

5) $\lim\limits_{x \to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}\right]$ :

نضع دالة $g(x)=\sqrt{x}-2$ و دالة أخرى $h(x)=x^2-5x+4$ ، ومنه لدينا الدالة $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ :

أي أن: $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

لدينا العدد المشتق عند 4 للدالة $g(x)=\sqrt{x}-2$ هو:

$$g'(4)=\lim_{x \to 4}\left[\frac{g(x)-g(4)}{x-4}\right]=\lim_{x \to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2-\sqrt{4}+2}{x-4}\right]=\lim_{x \to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\right]$$

ولدينا العدد المشتق عند 4 للدالة $h(x)=x^2-5x+4$ هو:

$$h'(4)=\lim_{x \to 4}\left[\frac{h(x)-h(4)}{x-4}\right]=\lim_{x \to 4}\left[\frac{x^2-5x+4-\left(4^2-5(4)+4\right)}{x-4}\right]=\lim_{x \to 4}\left[\frac{x^2-5x+4}{x-4}\right]$$

إذن: وبما أن الدالتان $g$ وَ $h$ قابلتان للاشتقاق عند 4 فإن: $\lim\limits_{x \to 4} f(x)=\frac{g'(4)}{h'(4)}$ حيث $h'(4)\neq 0$ .

لأنه لدينا : $\lim\limits_{x \to 4} f(x)=\lim\limits_{x \to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}\right]=\lim\limits_{x \to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2}{\cancel{x-4}}\times\frac{\cancel{x-4}}{x^2-5x+4}\right]=\lim\limits_{x \to 4}\left[\frac{\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}}{\frac{x^2-5x+4}{x-4}}\right]$ .

ولدينا كذلك $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، وَ $h'(x)=2x-5$

ومنه $g'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$ وَ $h'(4)=2(4)-5=3$ ، أي أن $\lim\limits_{x \to 4} f(x)=\frac{g'(4)}{h'(4)}=\frac{\frac{1}{4}}{3}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$ .

<u>إذن:</u> $\lim\limits_{x \to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}\right]=\frac{1}{12}$ .

6) $\lim\limits_{x \to 0}\left[\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}\right]$ :

نضع دالة $g(x)=x+\sqrt{x}$ و دالة أخرى $h(x)=\sqrt{x^2+x}-x$ ، ومنه لدينا الدالة $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ :

أي أن: $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}$

لدينا العدد المشتق عند 0 للدالة $g(x)=x+\sqrt{x}$ هو:

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+\sqrt{x}-0-\sqrt{0}}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+\sqrt{x}}{x}\right]$$

ولدينا العدد المشتق عند 0 للدالة $h(x)=\sqrt{x^2+x}-x$ هو:

$$h'(0)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+x}-x-\sqrt{0^2+0}-0}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x}\right]$$

إذن: وبما أن الدالتان $g$ وَ $h$ قابلتان للاشتقاق عند 4 فإن : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{g'(0)}{h'(0)}$ حيث $h'(0)\neq 0$ .

لأنه لدينا : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x+\sqrt{x}}{x}\times\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+x}-x}{x}}\right]$

ولدينا كذلك $g'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ، وَ $h'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}-1$

ومنه $g'(0)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{0}}=1$ وَ $h'(x)=\dfrac{2(0)+1}{2\sqrt{0^2+0}}-1=-1$ ، أي أن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{g'(0)}{h'(0)}=\dfrac{1}{-1}=-1$ .

<u>إذن:</u> $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}\right]=-1$ .

## <u>حل التمرين 88 ص34 ج1 :</u>

حساب النهاية التالية باستعمال تعريف العدد المشتق عند $\dfrac{\pi}{3}$ لكل من الدالتين $x\mapsto \sin 3x$ وَ $x\mapsto 2\cos x-1$ :

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\dfrac{\sin 3x}{2\cos x-1}\right]$ :

نضع دالة $g(x)=\sin 3x$ و دالة أخرى $h(x)=2\cos x-1$ ، ومنه لدينا الدالة $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ :

أي أن: $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{2\cos x-1}$

لدينا العدد المشتق عند $\dfrac{\pi}{3}$ للدالة $g(x)=\sin 3x$ هو:

$$g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin 3x-\sin 3\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin 3x-\sin\pi}{x-\frac{\pi}{3}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin 3x-0}{x-\frac{\pi}{3}}\right]$$

ولدينا العدد المشتق عند $\dfrac{\pi}{3}$ للدالة $h(x)=2\cos x-1$ هو:

$$h'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{2\cos x-1-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-1}{x-\frac{\pi}{3}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{2\cos x-1-2\left(\frac{1}{2}\right)-1}{x-\frac{\pi}{3}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}\right]$$

<u>إذن:</u> وبما أن الدالتان $g$ وَ $h$ قابلتان للاشتقاق عند $\frac{\pi}{3}$ فإن : $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\frac{g'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ حيث $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)\neq 0$ .

لأنه لدينا : $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin 3x}{2\cos x-1}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin 3x}{\cancel{x-\frac{\pi}{3}}}\times\frac{\cancel{x-\frac{\pi}{3}}}{2\cos x-1}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\frac{\sin 3x}{x-\frac{\pi}{3}}}{\frac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}}\right]$ .

ولدينا كذلك $g'(x)=3\cos 3x$ وَ $h'(x)=-2\sin x$

ومنه $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\cos\pi=3(-1)=-3$ وَ $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$

أي أن $\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\frac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{-3}{-\sqrt{3}}=\frac{g'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h'\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)$ .

<u>إذن:</u> $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin 3x}{2\cos x-1}\right]=\sqrt{3}$ .

## <u>حل التمرين 89 ص34 ج1 :</u>

حساب النهاية التالية باستعمال تعريف العدد المشتق عند $\frac{\pi}{4}$ لكل من الدالتين $x\mapsto\tan x$ وَ $x\mapsto 2\cos x-\sqrt{2}$ :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}\right] :$$

نضع دالة $g(x)=\tan x-1$ و دالة أخرى $h(x)=2\cos x-\sqrt{2}$ ، ومنه لدينا الدالة $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$

أي أن: $f(x)=\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$

لدينا العدد المشتق عند $\frac{\pi}{4}$ للدالة $g(x)=\tan x-1$ هو:

$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan x-1-\tan\frac{\pi}{4}+1}{x-\frac{\pi}{4}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan x-1-1+1}{x-\frac{\pi}{4}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}\right]$$

ولدينا العدد المشتق عند $\frac{\pi}{4}$ للدالة $h(x)=2\cos x-\sqrt{2}$ هو:

$$h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{2\cos x-\sqrt{2}-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{2\cos x-\sqrt{2}-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}\right]\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{2\cos x-\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}\right]$$

إذن: وبما أن الدالتان $g$ و $h$ قابلتان للاشتقاق عند $\frac{\pi}{4}$ فإن : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\dfrac{g'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h'\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ حيث $h'\left(\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$ .

لأنه لدينا : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\dfrac{\tan x-1}{\cancel{x-\frac{\pi}{4}}}\times\dfrac{\cancel{x-\frac{\pi}{4}}}{2\cos x-\sqrt{2}}\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\dfrac{\dfrac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}}{\dfrac{2\cos x-\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}}\right]$ .

ولدينا كذلك $g'(x)=1+\tan^2 x$ و $h'(x)=-2\sin x$

ومنه $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+1^2=2$ و $h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$

أي أن $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\dfrac{g'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{2}{-\sqrt{2}}=-\dfrac{2\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ .

إذن: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}\right]=\sqrt{2}$ .

## حل التمرين 90 ص34 ج1 :

- إثبات أن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}\right]=2\sqrt{2}$ :

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}\right]=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}\times\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}\right]=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{(\sin 2x)\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1^2-\cos^2 x}}\right]$$

$$=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{(\sin 2x)\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{\sin^2 x}}\right]=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{(\sin 2x)\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|}\right]$$

لأنه $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ ، أي أن $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

ومنه نجد $=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[2\times\dfrac{\dfrac{\sin 2x}{2x}\sqrt{1+\cos x}}{\dfrac{\sin x}{x}}\right]=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[2\times\dfrac{1\times\sqrt{1+\cos x}}{1}\right]$

$$=2\sqrt{1+\cos(0)}=2\sqrt{2}$$

لأن $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]=1$ ، إذن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}\right]=2\sqrt{2}$

- إثبات أن : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(\pi-2x)\tan x\right]=2$ :

نضع $Y=x-\frac{\pi}{2}$ ، ومنه $x=Y+\frac{\pi}{2}$ ، أي أنه لمّا $x\to\frac{\pi}{2}$ فإن $Y\to 0$ .

ومنه نجد $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(\pi-2x)\tan x\right]=\lim\limits_{Y\to 0}\left[\left(\pi-2\left(Y+\frac{\pi}{2}\right)\right)\tan\left(Y+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$$=\lim_{Y\to 0}\left[(-2Y)\tan Y+\tan\frac{\pi}{2}\right]=\lim_{Y\to 0}\left[(-2Y)\tan Y\right]$$

ومنه $2=\lim\limits_{Y\to 0}\left[\dfrac{2}{\dfrac{\tan Y}{Y}}\right]=\lim\limits_{Y\to 0}\left[\dfrac{\dfrac{2Y}{Y}}{\dfrac{\tan Y}{Y}}\right]=\lim\limits_{Y\to 0}\left[\dfrac{-2Y}{-\tan Y}\right]=$

لأن $\lim\limits_{Y\to 0}\left[\dfrac{\tan Y}{Y}\right]=1$ ولمّا $x\to\dfrac{\pi}{2}$ فإن $Y\to 0$

<u>إذن :</u> $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(\pi-2x)\tan x\right]=2$

- إثبات أنّ : $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}\right]=2$ :

نضع دالة $g(x)=\sin x$ و دالة أخرى $h(x)=\sqrt{x+1}-1$ ، ومنه لدينا الدالة $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ :

أي أن: $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}$

لدينا العدد المشتق عند 0 للدالة $g(x)=\sin x$ هو:

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x-\sin(0)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]$$

ولدينا العدد المشتق عند 0 للدالة $h(x)=\sqrt{x+1}-1$ هو:

$$h'(0)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1-\sqrt{0+1}+1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]$$

إذن: وبما أن الدالتان $g$ وَ $h$ قابلتان للاشتقاق عند 0 فإن : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{g'(0)}{h'(0)}$ حيث $h'(0)\neq 0$ .

لأنه لدينا : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x}\times\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}}\right]$ .

ولدينا كذلك $g'(x)=\cos x$ وَ $h'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

ومنه $g'(0)=\cos 0=1$ وَ $h'(0)=\dfrac{1}{2\sqrt{0+1}}=\dfrac{1}{2}$

أي أن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{g'(0)}{h'(0)}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}}=1\times\dfrac{2}{1}=2$ .

<u>إذن:</u> $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}\right]=2$ .

## 4- نهاية دالة مركبة ـ النهايات بالمقارنة :

### حل التمرين 91 ص34 ج1 :

حساب النهايات التالية باستعمال نهاية مركب دالتين :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\dfrac{x-1}{2x-4}}\right]$ :

نضع $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{2x-4}}$ ، وَ $X=\dfrac{x-1}{2x-4}$ ، و منه $f(x)=\sqrt{X}$

إذن لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}X=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{2x}\right]=\dfrac{1}{2}$ ، ومنه $\lim\limits_{X\to\frac{1}{2}}f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\dfrac{x-1}{2x-4}}\right]=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ .

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}\right]$ :

نضع $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$ ، وَ $X=\dfrac{x}{x^2-1}$ ، و منه $f(x)=\sqrt{X}$

إذن لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}X=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}\right]=0$ ، ومنه $\lim\limits_{X\to0}f(x)=\sqrt{0}=0$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}\right]=0$ .

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{9x^2-x+3}\right]$ :

نضع $f(x)=\sqrt{9x^2-x+3}$ ، وَ $X=9x^2-x+3$ ، و منه $f(x)=\sqrt{X}$

إذن لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}X=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[9x^2\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2\right]=+\infty$ ، ومنه $\lim\limits_{X\to+\infty}f(x)=\sqrt{+\infty}=+\infty$

إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{9x^2-x+3}\right]=+\infty$ .

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right]$ :

نضع $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ ، وَ $X=\sqrt{x}$ ، و منه $f(x)=\dfrac{1+X}{X}$

إذن لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}X=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\right]=\sqrt{+\infty}=+\infty$ ، ومنه $\lim\limits_{X\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\left[\dfrac{1+X}{X}\right]=\lim\limits_{X\to+\infty}\left[\dfrac{X}{X}\right]=1$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right]=1$ .

## حل التمرين 92 ص34 ج1 :

حساب النهايات التالية باستعمال نهاية مركب دالتين :

1) $\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ :

نضع $f(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ، و $g(x)=\frac{1}{x}$ ، و منه $f(x)=\cos(g(x))$

إذن لدينا $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=0$ ، ومنه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\cos 0=1$

<u>إذن:</u> $\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]=1$ .

2) $\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\right]$ :

نضع $f(x)=\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$ ، و $g(x)=x-\pi$ ، و منه $f(x)=\frac{\sin(g(x))}{g(x)}$

نعلم أنّ $\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\sin(g(x))}{g(x)}\right]=1$ ، ومنه $\lim_{x\to\pi}f(x)=\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\right]=1$

<u>إذن:</u> $\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\right]=1$ .

3) $\lim_{x\to+\infty}\left[\sin\left(\frac{\pi x+3}{1+x}\right)\right]$ :

نضع $f(x)=\sin\left(\frac{\pi x+3}{1+x}\right)$ ، و $g(x)=\frac{\pi x+3}{1+x}$ ، و منه $f(x)=\sin(g(x))$

إذن لدينا $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\pi x}{x}\right]=\pi$ ، ومنه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\sin\pi=0$

<u>إذن:</u> $\lim_{x\to+\infty}\left[\sin\left(\frac{\pi x+3}{1+x}\right)\right]=0$ .

4) $\lim_{x\to+\infty}\left[\sin\left(\frac{\pi x+1}{2x}\right)\right]$ :

نضع $f(x)=\sin\left(\frac{\pi x+1}{2x}\right)$ ، و $g(x)=\frac{\pi x+1}{2x}$ ، و منه $f(x)=\sin(g(x))$

إذن لدينا $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\pi x}{2x}\right]=\frac{\pi}{2}$ ، ومنه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\sin\frac{\pi}{2}=1$

<u>إذن:</u> $\lim_{x\to+\infty}\left[\sin\left(\frac{\pi x+1}{2x}\right)\right]=1$ .

5) $\lim_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\tan x}{\tan^2 x+1}\right]$ :

نضع $f(x)=\frac{\tan x}{\tan^2 x+1}$ ، و $g(x)=\tan x$ ، و منه $f(x)=\frac{g(x)}{(g(x))^2+1}$

إذن لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = +\infty$ ، ومنه

$$\lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \left[ \frac{g(x)}{(g(x))^2 + 1} \right] = \lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{g(x)} \right] = \frac{1}{+\infty} = 0$$

إذن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1} \right] = 0$ .

6) $\lim\limits_{x \to 0} \left[ \cos\left( \frac{1 - \cos x}{x^2} \times 2\pi \right) \right]$ :

نضع $f(x) = \cos\left( \frac{1 - \cos x}{x^2} \times 2\pi \right)$ ، وَ $g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \times 2\pi$ ، و منه $f(x) = \cos(g(x))$

إذن لدينا $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left[ \frac{1 - \cos x}{x^2} \times 2\pi \right] = 0$ ، ومنه $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \cos 0 = 1$

إذن: $\lim\limits_{x \to 0} \left[ \cos\left( \frac{1 - \cos x}{x^2} \times 2\pi \right) \right] = 1$ .

## حل التمرين 93 ص34 ج1 :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ بـ : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x + 1}}$ :

1) إثبات أنه إذا كان $x > 1$ فإن $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$ :

لدينا $x > 1$ ، ومنه و بإضافة $x$ إلى طرفي المتباينة نجد $2x > x + 1$ ، وبجذر الطرفين نجد $\sqrt{2x} > \sqrt{x + 1}$ ، وبقلب المتباينة نجد $\frac{1}{\sqrt{2x}} < \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ، أي أن $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$

إذن: لمّا $x > 1$ فإن $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$ .

2) استنتاج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ :

لدينا من أجل $x > 1$ فإن $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$ ، وبضرب طرفي المتباينة في العدد $2x$ نجد :

$\frac{2x}{\sqrt{x+1}} > \frac{2x}{\sqrt{2x}}$ ، أيّ أنّ $f(x) > \frac{2x}{\sqrt{2x}}$ لمّا $x > 1$ .

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[ \frac{2x}{\sqrt{2x}} \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[ \frac{2x}{\sqrt{2x}} \times \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[ \frac{2x\sqrt{2x}}{2x} \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[ \sqrt{2x} \right] = +\infty$ .

ومنه و حسب نظرية الحصر نستنتج أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ .

## حل التمرين 94 ص34 ج1 :

1) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ فإن $0 \le \sqrt{x + 1} - \sqrt{x} \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$ :

لدينا $\sqrt{x+1} - \frac{2x - 1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x+1} - \frac{2\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، ومنه $\sqrt{x+1} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x}} \ge 0$

من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$

أي أنّ $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\geq 0$ ومنه $0\leq\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\leq\frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

2) استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ :

لدينا من أجل كل $x>0$ ، $0\leq\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\leq\frac{1}{2\sqrt{x}}$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]=0$ .

ومنه و حسب نظرية الحصر نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=0$ .

## حل التمرين 34ص 95 ج1 :

- إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $-2\leq\cos x+\sin x\leq 2$ :

نعلم أن $\begin{cases}-1\leq\sin x\leq 1 ..............(1)\\ -1\leq\cos x\leq 1 ..............(2)\end{cases}$ ، وبجمع $(1)$ وَ $(2)$ نجد $-1-1\leq\cos x+\sin x\leq 1+1$

إذن: $-2\leq\cos x+\sin x\leq 2$

- استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\cos x+\sin x}{x^2}\right]$ :

لدينا $-2\leq\cos x+\sin x\leq 2$ ، بضرب أطراف المتباينة في $\frac{1}{x^2}$ نجد $\frac{-2}{x^2}\leq\frac{\cos x+\sin x}{x^2}\leq\frac{2}{x^2}$

- بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-2}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x^2}\right]=0$ فإنه حسب نظرية الحصر نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\cos x+\sin x}{x^2}\right]=0$ .

## حل التمرين 35ص 96 ج1 :

1) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$ فإن $\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x+1}\leq 1$ :

لدينا $x\geq 1$ هذا معناه $\left.\begin{matrix}x-1\geq 0\\ x+1>0\end{matrix}\right\}$ ، و لدينا $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}=\frac{2x-x-1}{2(x+1)}=\frac{x-1}{2(x+1)}$ ، ومنه $\frac{x-1}{2(x+1)}\geq 0$

أي أنّ $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}\geq 0$ ومنه $\frac{x}{x+1}\geq\frac{1}{2}$ ..................$(1)$ .

ولدينا كذلك $\frac{x}{x+1}-1=\frac{x-x-1}{x+1}=\frac{-1}{x+1}$ وَ $x+1>0$ ، أي أنّ $\frac{-1}{x+1}<0$ ومنه $\frac{-1}{x+1}<1$ ........$(2)$

من $(1)$ وَ$(2)$ نستنتج أنّ $\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x+1}\leq 1$ .

2) استنتاج النهايتين التاليتين :

أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x\sqrt{x}}{x+1}\right]$ :

لدينا $\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x+1}\leq 1$ ، وبضرب أطراف المتباينة في العدد $\sqrt{x}$ نجد $\frac{\sqrt{x}}{2}\leq\frac{x\sqrt{x}}{x+1}\leq\sqrt{x}$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\sqrt{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\right]=+\infty$ ، ومنه و حسب نظرية الحصر فإن

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x\sqrt{x}}{x+1}\right]=+\infty$ .

ب) $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{x}\,(x+1)}\right]$ :

لدينا $\frac{1}{2}\le\frac{x}{x+1}\le 1$ ، وبضرب أطراف المتباينة في العدد $\frac{1}{\sqrt{x}}$ نجد $\frac{1}{2\sqrt{x}}\le\frac{x}{\sqrt{x}\,(x+1)}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]=0$ ، ومنه و حسب نظرية الحصر فإن $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{x}\,(x+1)}\right]=0$ .

## حل التمرين 97 ص35 ج1 :

حساب النهايتين التاليتين باستعمال نهاية حصر دالتين :

- $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2+4(-1)^x}{x}\right]$ :

لدينا $(-1)^x=|1|$ ، ومنه $(-1)^x\ge -1$ ، وبضرب طرفي المتباينة في العدد 4 نجد $4(-1)^x\ge -4$

وبإضافة 2 إلى طرفي المتباينة نجد $2+4(-1)^x\ge -2$ ، وبضربها مرة أخرى في العدد $\frac{1}{x}$ نجد

$$\frac{2+4(-1)^x}{x}\ge\frac{-2}{x}$$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-2}{x}\right]=0$ ، ومنه وحسب نظرية الحصر فإن $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2+4(-1)^x}{x}\right]=0$ .

- $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x+\cos x}{x-1}\right]$ :

نعلم أن $-1\le\cos x\le 1$ ، بإضافة $3x$ إلى أطراف المتباينة نجد $3x-1\le 3x+\cos x\le 1+3x$ ،

وبضرب أطراف المتباينة في العدد $\frac{1}{x-1}$ نجد $\frac{3x-1}{x-1}\le\frac{3x+\cos x}{x-1}\le\frac{1+3x}{x-1}$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+3x}{x-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x-1}{x-1}\right]=3$ ، ومنه وحسب نظرية الحصر فإن $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x+\cos x}{x-1}\right]=3$ .

## حل التمرين 98 ص35 ج1 :

- المقارنة بين $\sqrt{4x^2+5}$ وَ $2x$ من أجل كل $x>0$ :

لدينا من أجل كل $x>0$ ، $\sqrt{4x^2+5}-2x>0$ ، وبإضافة العدد $2x$ إلى طرفي المتباينة نجد

$\sqrt{4x^2+5}-2x+2x>2x$ ، ومنه $\sqrt{4x^2+5}>2x$ .

<u>إذن :</u> $\sqrt{4x^2+5}$ أكبر تمامًا من $2x$ .

- استنتاج $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+5}-x\right]$ :

لدينا $\sqrt{4x^2+5}>2x$ ، ومنه وبإضافة العدد $-x$ إلى طرفي المتباينة نجد $\sqrt{4x^2+5}-x>x$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}[x]=+\infty$ ، ومنه وحسب نظرية الحصر نستنتج أنّ $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+5}-x\right]=+\infty$ .

## حل التمرين 99 ص35 ج1 :

- المقارنة بين $\sqrt{2x^2-1}$ وَ $2x$ من أجل كل $x>1$ :

لدينا من أجل كل $x>1$ ، $\sqrt{2x^2-1}-2x<0$ ، وبإضافة العدد $2x$ إلى طرفي المتباينة نجد $\sqrt{2x^2-1}-2x+2x<2x$ ، ومنه $\sqrt{2x^2-1}<2x$ .

إذن : $\sqrt{2x^2-1}$ أصغر تمامًا من $2x$ .

- استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{2x^2-1}-3x\right]$ :

لدينا $\sqrt{2x^2-1}<2x$ ، ومنه وبإضافة العدد $-3x$ إلى طرفي المتباينة نجد $\sqrt{2x^2-1}-3x<-x$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[-x]=-\infty$ ، ومنه وحسب نظرية الحصر نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{2x^2-1}-3x\right]=-\infty$ .

## حل التمرين 100 ص35 ج1 :

- المقارنة بين $\sqrt{2x^2+x+1}$ وَ $x\sqrt{2}$ من أجل كل $x>0$ :

لدينا من أجل كل $x>0$ ، $\sqrt{2x^2+x+1}-x\sqrt{2}>0$ ، وبإضافة العدد $x\sqrt{2}$ إلى طرفي المتباينة نجد $\sqrt{2x^2+x+1}-x\sqrt{2}+x\sqrt{2}>x\sqrt{2}$ ، ومنه $\sqrt{2x^2+x+1}>x\sqrt{2}$ .

إذن : $\sqrt{2x^2+x+1}$ أكبر تمامًا من $x\sqrt{2}$ .

- استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{2x^2+x+1}-x\right]$ :

لدينا $\sqrt{2x^2+x+1}>x\sqrt{2}$ ، ومنه وبإضافة العدد $-x$ إلى طرفي المتباينة نجد

$$\sqrt{2x^2+x+1}-x>x\sqrt{2}-x$$

ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{2}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{2}-x\times\frac{x\sqrt{2}+x}{x\sqrt{2}+x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2-x^2}{x\sqrt{2}+x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x\sqrt{2}+x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x(x)}{x\left(\sqrt{2}+1\right)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{2}+1}\right]=+\infty$$

ومنه وحسب نظرية الحصر نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{2x^2+x+1}-x\right]=+\infty$ .

## حل التمرين 101 ص35 ج1 :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}$ :

1) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$ :

الدالة $f$ معرفة من أجل $x-\sqrt{x^2+1}\neq 0$ ، ومنه $D_f=\mathbb{R}$ لأنه من أجل كل عدد حقيقي $x-\sqrt{x^2+1}<0$

لدينا $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}+2x=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}+2x=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2-x^2-1}+2x$

$$=-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+2x=2x-x-\sqrt{x^2+1}=x-\sqrt{x^2+1}$$

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $x-\sqrt{x^2+1}<0$ ، ومنه $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}+2x<0$

أي أنّ $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$ .

2) استنتاج أنّ $f(x)\leq -4x^2$ من أجل كل $x>0$ :

نعلم أنّ $-1\leq \sin x\leq 1$ ، ومنه وبإضافة 1 إلى أطراف المتباينة نجد $0\leq 1+\sin x\leq 2$ وبضرب $x$ في أطراف المتباينة نجد $0\leq x(1+\sin x)\leq 2x$ حيث $x>0$ .

ولدينا $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$ ومنه وبضرب المتباينتين طرف في طرف نجد $\frac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}\leq -4x^2$

إذن : $f(x)\leq -4x^2$

- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-4x^2\right]=-\infty$ ومنه وحسب نظرية الحصر فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ .

## تمارين للتعمق :

### 5- الاستمرارية :

### حل التمرين 102 ص35ج1 :

دراسة استمرارية الدالة $f$ عند $x_0$ في كل حالة من الحالتين التاليتين :

1) $\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x};x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ عند $x_0=0$ :

لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\times\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right]=\frac{0}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{0}{2}=0$$

وجدنا أنّ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ ، و لدينا $f(0)=0$ ، ومنه $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ .

<u>إذن:</u> الدالة $f$ مستمرة عند 0 .

2) $\begin{cases} f(x)=\frac{|x|}{x}\times\sqrt{|x|};x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$ عند $x_0=0$ :

لدينا حالتين لنهاية $f(x)$ :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left[\frac{-x}{x}\sqrt{-x}\right]=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left[-\sqrt{-x}\right]=0 \\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{x}{x}\sqrt{x}\right]=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[\sqrt{x}\right]=0 \end{cases}$$ ، ومنه $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

وجدنا أنّ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ ، و لدينا $f(0)=2$ ، ومنه $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$ .

<u>إذن:</u> الدالة $f$ غير مستمرة عند 0 .

## حل التمرين 103 ص35 ج1 :

إثبات أنّ الدالة $f$ التالية المعرفة على $\mathbb{R}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x} \quad ; x>0 \\ f(x)=\dfrac{1-x^2}{x-2} \quad ; x\le 0 \end{cases}$ :

لدينا من أجل $x\in]0;+\infty[$ ، $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$ ، لنحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ :

نضع $g: x\mapsto -\sqrt{x+1}$ ومنه الدالة $g$ معرفة وقابلة للاشتقاق عند 0 وعددها المشتق هو :

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\sqrt{x+1}+\sqrt{1}}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\sqrt{x+1}+1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}\right]$$

ولدينا $g'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ، ومنه $g'(0)=-\dfrac{1}{2\sqrt{1}}=-\dfrac{1}{2}$ ، أي أن $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]=g'(0)=-\dfrac{1}{2}$

<u>إذن:</u> $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\dfrac{1}{2}$

و لدينا من أجل $x\in]-\infty;0]$ ، $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x-2}$ :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-x^2}{x-2}\right]=\frac{1-0}{0-2}=-\frac{1}{2}$$

وجدنا أنّ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\dfrac{1}{2}$ في كلتا الحالتين ، و لدينا $f(0)=-\dfrac{1}{2}$

<u>إذن:</u> الدالة $f$ مستمرة عند 0 ، أي أنها مستمرة على $\mathbb{R}$ .

## حل التمرين 104 ص35 ج1 :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x} \quad ; x\neq 0 \\ f(0)=\alpha \end{cases}$ :

تعيين قيمة العدد $\alpha$ حتى تكون الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ :

لدينا

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x}\times\frac{x+2+\sqrt{4+x^2}}{x+2+\sqrt{4+x^2}}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(x+2)^2-(4+x^2)}{x\left(x+2+\sqrt{4+x^2}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+4x+4-(4+x^2)}{x\left(x+2+\sqrt{4+x^2}\right)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{4x}{x\left(x+2+\sqrt{4+x^2}\right)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{4}{x+2+\sqrt{4+x^2}}\right]$$

$$=\frac{4}{0+2+\sqrt{4+0}}=\frac{4}{4}=1$$

نعلم أنه حتى تكون الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ يجب أن تكون $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

ولدينا $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ ، ومنه $f(0)=1$ ، أي أنّ $\alpha=1$ .

## حل التمرين 105 ص35 ج1 :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\begin{cases} f(x)=x^2+2x-a & ;x>2 \\ f(x)=\dfrac{2x^2-a+b}{x} & ;x\leq 2 \end{cases}$ ، حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان ثابتان :

- تعيين علاقة بين $a$ و $b$ حتى تكون $f$ مستمرة عند 2 :

لدينا $f(2)=\dfrac{2(2)^2-a+b}{2}=\dfrac{8-a+b}{2}$

ولدينا $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2}\left[\dfrac{2x^2-a+b}{x}\right]=\dfrac{2(2)^2-a+b}{2}=\dfrac{8-a+b}{2} \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2}\left[x^2-2x-a\right]=2(2)^2+2(2)-a=8-a \end{cases}$

نعلم أنه حتى تكون الدالة $f$ مستمرة عند 2 يجب أن تكون $f(2)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f(x)$

أي أنّ : $\dfrac{8-a+b}{2}=8-a$ ، ومنه $8-a+b=16-2a$ ، يكافئ $2a-a+b=16-8$

<u>إذن</u> العلاقة المطلوبة بين $a$ و $b$ حتى تكون $f$ مستمرة عند 2 هي : $a+b=8$ .

**تمارين للتعمق :**

## 6- مبرهنة القيم المتوسطة – الدوال المستمرة و الرتيبة تمامًا :

## حل التمرين 106 ص35 ج1 :

$f$ دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ بحيث $f(a)<ab$ ، و $f(b)>b^2$ :

❖ إثبات أنه يوجد عدد حقيقي $c$ من $[a;b]$ بحيث $f(c)=bc$ :

نعلم حسب مبرهنة القيم المتوسطة أنه من أجل كل عدد حقيقي $k$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد حقيقي $c$ محصور بين $a$ و $b$ حيث $f(c)=k$، أيّ أنّ $a<c<b$ ، وبضرب أطراف المتراجحة في $b$ نجد $ab<bc<b^2$ ، ومنه $f(b)<bc<f(a)$ ، أيّ أنّ $bc=k$

<u>إذن:</u> $f(c)=bc$ .

هندسيًا هذه الدالة $f$ ممثلة لمستقيم معادلته $y=bx$ في معلم متعامد و متجانس ، حيث يكون لدينا $f(a)=ab$ و $f(b)=b^2$ ، و $f(c)=bc$ حيث $c\in[a;b]$ ، هذا معناه أنّ $f(b)<f(c)<f(a)$ ومنه $ab<bc<b^2$ ، و بالقسمة على $b$ نجد $a<c<b$ ، أيّ أنّ $c$ ينتمي إلى $[a;b]$ .

## حل التمرين 107 ص 35 و 36 ج1 :

$f$ دالة مستمرة على المجال $[0;1]$ بحيث $f(0)=0$ ، و $f(1)=1$ :

❖ إثبات أنه يوجد عدد حقيقي $c$ من $]0;1[$ بحيث $f(c)=\dfrac{1-c}{1+c}$ :

نعلم حسب مبرهنة القيم المتوسطة أنه من أجل كل عدد حقيقي $k$ محصور بين $f(0)$ و $f(1)$ فإنه يوجد عدد حقيقي $c$ محصور بين 0 و 1 حيث $f(c)=k$، أيّ أنّ $0<c<1$ ، وبضرب أطراف المتراجحة في $-1$ نجد $0>-c>-1$ ، ومنه وبإضافة العدد 1 إلى أطراف المتباينة نجد $1>1-c>0$

و بضرب المتباينة مرة أخرى في العدد الموجب $\frac{1}{1+c}$ نجد $0<\frac{1-c}{1+c}<\frac{1}{1+c}$ ، أي أنّ
$f(0)<\frac{1-c}{1+c}<f\left(\frac{1}{1+c}\right)$ ، ولدينا $f\left(\frac{1}{1+c}\right)<f(1)$ ، ومنه $f(0)<\frac{1-c}{1+c}<f(1)$ ، أي أنّ $\frac{1-c}{1+c}=k$
<u>إذن:</u> $f(c)=\frac{1-c}{1+c}$ .

## حل التمرين 108 ص36 ج1 :

$f$ دالة مستمرة على المجال $I=[0;1]$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $I$ ، $f(x)\in I$ :

❖ إثبات أنه يوجد على الأقل عدد حقيقي $\alpha$ من $I$ بحيث $f(\alpha)=\alpha$ :
نضع دالة $g$ معرفة و مستمرة على $I$ ، حيث $g(x)=f(x)-x$ ، و منه لدينا
$g(0)=f(0)-0=f(0)$..............(1) ، وَ $g(1)=f(1)-1$...............(2)
نعلم أنّ $f(x)\in I$ ، ومنه $0\le f(x)\le 1$ أي أنّ $0\le f(0)\le 1$ وَ $0\le f(1)\le 1$
بالتعويض بما لدينا في المعادلة $(1)$ نجد $0\le f(0)$ ، ومنه $f(0)\ge 0$ ، أي أن $g(0)\ge 0$
و بالتعويض بما لدينا في المعادلة $(2)$ نجد $f(1)-1\le 0$ ، ومنه $g(1)\le 0$
بما أنّ الدالة $g$ مستمرة على المجال $[0;1]$ ، وَ $g(0)\times g(1)\le 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ،
يوجد على الأقل عدد حقيقي $\alpha$ من $[0;1]$ ، حيث $f(\alpha)=0$ ، ومنه $f(\alpha)-\alpha=0$
<u>إذن :</u> $f(\alpha)=\alpha$ .

## حل التمرين 109 ص36 ج1 :

1) <u>التخمين :</u> من الشكل المعطى يمكن التخمين بأنه يوجد حل وحيد للمعادلة $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$ ،
لأن على المجال $I=[-\pi;0]$ يوجد تقاطع وحيد للمنحنى $(C)$ الممثل للدالة $x\mapsto\cos x$ و المستقيم
$(D)$ الممثل للدالة $x\mapsto-\frac{\sqrt{3}}{2}x$ .

2) $f$ دالة معرفة على المجال $I=[-\pi;0]$ كما يلي: $f(x)=\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}x$ :

أ) التحقق من أنّ الدالة $f$ تقبل الاشتقاق على $I$ :
الدالة $f$ هي دالة مركبة من دالتين قابلتين للاشتقاق على $I=[-\pi;0]$ ، وهما $x\mapsto\cos x$ ، وَ
$x\mapsto\frac{\sqrt{3}}{2}x$ ، أي أنّ الدالة $f$ تقبل الاشتقاق على $I$ ودالتها المشتقة هي $f'(x)=-\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

ب) جدول تغيرات الدالة $f$ :
لدينا من أجل كل $x$ من المجال $[-\pi;0]$ الدالة المشتقة $f'(x)\ge 0$ ، لأنّ $\sin x\le 0$ على هذا المجال
ومنه $-\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\ge 0$ ، أي أنّ $\sin x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، وهذا محقق من أجل كل $x$ من المجال $[-\pi;0]$
أي أنّ الدالة $f$ متزايدة تمامًا على المجال $[-\pi;0]$ ، ومنه جدول التغيرات :

| $x$ | $-\pi$ $\qquad\qquad$ $0$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-1-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\nearrow$ $1$ |

3) <u>الاستنتاج :</u>
من جدول تغيرات الدالة $f$ على المجال $[-\pi;0]$ لدينا $f(-\pi)\times f(0)<0$
ونعلم كذلك أنّ الدالة $f$ مستمرة و متزايدة تمامًا على المجال $[-\pi;0]$
ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا $\alpha$ في المجال $[-\pi;0]$ .
$f(x)=0$ معناه $\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}x=0$ ، ومنه $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$
<u>إذن:</u> نستنتج أنّ المعادلة $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$ تقبل حلاً وحيدًا $\alpha$ في المجال $I=[-\pi;0]$ .

## <u>حل التمرين 110 ص36 ج1 :</u>

$n$ عدد طبيعي غير معدوم :

1) إثبات أنّ المعادلة $x^{n+1}-2x^n+1=0$ تقبل حلاً محصورًا بين $\frac{2n}{n+1}$ و $2$ :
نضع دالة $f$ حيث $f(x)=x^{n+1}-2x^n+1$ و $D_f=\mathbb{R}$
ومنه لدينا الدالة المشتقة هي : $f'(x)=(n+1)x^n-2nx^{n-1}$ ، أي $f'(x)=x^{n-1}\left[(n+1)x-2n\right]$
إذن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $(n+1)x-2n$ لأنّ $x^{n-1}>0$ من أجل كل $x>0$
أي أنّ $f'(x)>0$ على المجال $\left]\frac{2n}{n+1};2\right]$ . ومنه الدالة $f$ متزايدة تمامًا على هذا المجال .
ومنه جدول التغيرات :

| $x$ | $1$ | $\frac{2n}{n+1}$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ ↘ | $f\left(\frac{2n}{n+1}\right)$ | ↗ $1$ |

من جدول التغيرات لدينا $f\left(\frac{2n}{n+1}\right)\times f(2)<0$ ، لأنه $f\left(\frac{2n}{n+1}\right)<0$ من أجل كل $x\in\left[1;\frac{2n}{n+1}\right]$
ونعلم كذلك أنّ الدالة $f$ مستمرة و متناقصة تمامًا على المجال $\left[\frac{2n}{n+1};2\right]$
ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً محصورًا بين $\frac{2n}{n+1}$ و $2$
<u>إذن:</u> المعادلة $x^{n+1}-2x^n+1=0$ تقبل حلاً محصورًا بين $\frac{2n}{n+1}$ و $2$

2) إثبات أنّ المعادلة $x^8-2x^7+1=0$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$ :
يمكننا كتابة المعادلة $x^8-2x^7+1=0$ على الشكل $x^{7+1}-2x^7+1=0$ ، ومنه فهذه المعادلة حالة خاصة من معادلة السؤال رقم 1) ، حيث هنا $n=7$
<u>إذن:</u> نعم المعادلة $x^8-2x^7+1=0$
تقبل حلا في $\mathbb{R}$، يكون هذا الحل
محصور في المجال $\left]\frac{2n}{n+1};2\right]$
أي محصور بين $\frac{14}{8}$ و $2$ .

## مسائـــل:

### حل المسألة 111 ص36 ج1 :

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ :

1) أ) تعيين نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة التعريف :

لدينا $D_f=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

ومنه :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}1}\left[\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]=\frac{1-4+8-4}{0^+}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\left[\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

ب) دراسة تغيرات الدالة $f$ ، ثم تشكيل جدول تغييراتها :

لدينا من أجل كل $x$ من $D_f$ الدالة المشتقة $f'$ هي :

$$f'(x)=\frac{(3x^2-8x+8)(x-1)^2-(2(x-1))(x^3-4x^2+8x-4)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(3x^2-8x+8)(x-1)-(2)(x^3-4x^2+8x-4)}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{3x^3-3x^2-8x^2+8x+8x-8-2x^3+8x^2-16x+8}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

إشارة $f'(x)$ :

$f'(x)=0$ معناه $\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}=0$ ، ومنه $\begin{cases} x^2(x-3)=0 \\ \text{و} \\ (x-1)^3\neq 0 \end{cases}$ ، لأن $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

$x^2(x-3)=0$ ، معناه $x^2=0$ ، ومنه $x=0$ ، وَ $(x-3)=0$ ، ومنه $x=3$

أي أنه لمّا $f'(x)=0$ ، $x=\{0،3\}$ .

- جدول إشارة $f'(x)$ على $D_f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | | $+$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | | $+$ | |
| $x-3$ | | $-$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | ‖ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

- ومنه جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{11}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

(2

أ) تعيين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ ، $c$ ، وَ $d$ ، بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x\neq1$ :

$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x-1)^2}$ :

لدينا : $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x-1)^2}=\frac{(ax+b)(x-1)^2+cx+d}{(x-1)^2}=\frac{(ax+b)(x^2-2x+1)+cx+d}{(x-1)^2}$

$$=\frac{ax^3-2ax^2+ax+bx^2-2bx+b+cx+d}{(x-1)^2}=\frac{ax^3+(b-2a)x^2+(a-2b+c)x+(b+d)}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$ نجد : $a=1$ ، وَ $\begin{cases}a=1\\b-2(1)=-4\end{cases}$ ، ومنه $b=-2$

و بالمطابقة كذلك نجد $\begin{cases}a-2b+c=8\\b+d=-4\end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases}1-2(-2)+c=8\\(-2)+d=-4\end{cases}$ ، أي أن $c=3$ وَ $d=-2$

<u>إذن :</u> $a=1$ ، $b=-2$ ، $c=3$ ، وَ $d=-2$ ، أي أن $f(x)=x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}$ .

ب) لدينا $f(x)=x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}$ ، و معادلة المستقيم $(D): y=x-2$ :

ومنه $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\left(x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}\right)-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3x-2}{(x-1)^2}\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3}{x}\right]=0$

إذن : نستنتج أنّ المستقيم $(D): y=x-2$ مستقيم مقارب مائل لمنحنى $(C_f)$ في جوار $-\infty$ وَ $+\infty$ .

ج) تحديد وضعية $(C_f)$ بالنسبة لـ $(D)$ ، حيث النقطة A نقطة تقاطع $(C_f)$ وَ $(D)$ :

لدينا $f(x)-y=\frac{3x-2}{(x-1)^2}$ ، ومنه $(x-1)^2>0$ ، وَ $3x-2=0$ ، أي أن $x=\frac{2}{3}$ ،

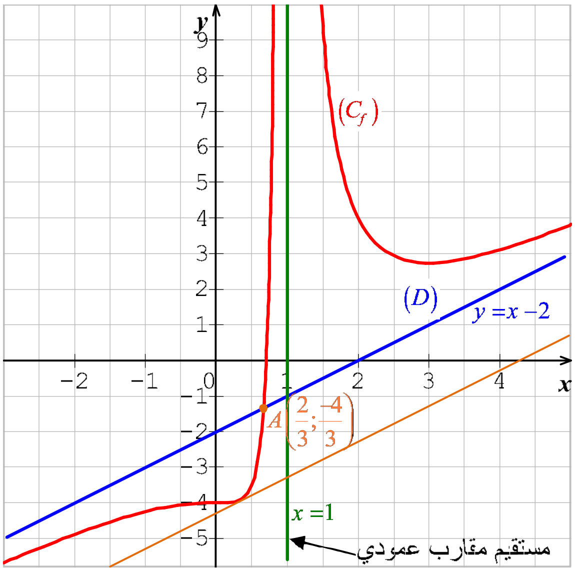
ومنه توجد نقطة تقاطع وحيدة و هي $A\left(\frac{2}{3};f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ ، ومنه $A\left(\frac{2}{3};\frac{-4}{3}\right)$

إذن : لمّا $x\in\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[$ ، $f(x)-y<0$ ، ومنه $(C_f)$ يقع أسفل $(D)$ .

و لمّا $x\in\left]\frac{2}{3};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ ، $f(x)-y>0$ ، ومنه $(C_f)$ يقع فوق $(D)$ .

و لمّا $x=\frac{2}{3}$ ، $(C_f)$ يتقاطع مع $(D)$ في نقطة $A\left(\frac{2}{3};\frac{-4}{3}\right)$ .

3) رســـم $(C_f)$ وَ $(D)$ : ( حيث تؤخذ الوحدة $1cm$ على $(Ox)$ وَ $0,5cm$ على $(Oy)$ ) :




4) إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا $\alpha$ على المجال $]-\infty;1[$ :

من جدول التغيرات لدينا الدالة $f$ رتيبة (متزايدة تمامًا) على المجال $]-\infty;1[$

- نتحقق أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)<0<\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}f(x)$ :

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}f(x)=+\infty$ ، وَ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ، ومنه $-\infty<0<+\infty$ ، وهذا محقق

ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا $\alpha$ على المجال $]-\infty;1[$ .

- لدينا من منحنى الدالة $f$ ، $\frac{2}{3}<\alpha<1$ ، أي $0,66<\alpha<1$ .

5) الاستنتاج **بيانيًا** عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$ ، حيث $m$ وسيط حقيقي :

المعادلة $f(x)=x+m$ بيانيًا تعني نقط تقاطع $y=x+m$ مع $(C_f)$، وبما أنّ $m$ وسيط حقيقي فهو متغير

<u>إذن:</u> لمّا $m\geq 0$ نجد $y=x+m$ و هذه معادلة لمستقيم يقطع $(C_f)$ في نقطتين متمايزتين ويكون موازي للمستقيم المقارب $(D):y=x-2$ ، لأنه لهما نفس الميل (معامل التوجيه) الذي يساوي 1 .

ولمّا $m=-2$ نجد $y=x-2$ وهذه معادلة $(D)$ حيث يقطع $(C_f)$ في نقطة وحيدة هي $A\left(\frac{2}{3};\frac{-4}{3}\right)$ ،

أي يوجد حل وحيد هو $\frac{2}{3}$ .

و لمّا $m<-2$ نجد $y=x-m$ و هذه معادلة لمستقيم يمكن أن يقطع $(C_f)$ في نقطتين متمايزتين ، كما يمكن أن يكون مماسًا للمنحنى $(C_f)$ في نقطة وحيدة . (كما في التمثيل البياني أعلاه ) .

ويمكن كذلك أن لا يقطع $(C_f)$ في أي نقطة لمّا تكون $m$ أصغر تمامًا من فاصلة نقطة التماس .

<u>**إذن :**</u> عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$ لا يزيد عن حلين مختلفين ( هذا بيانيًـا ) .

- تعيين معادلة للمماس $(C_f)$ : لدينا معادلة المماس هي $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

لدينا ميل المماس يساوي 1 ، ومنه $f'(x)=1$ أي أنّ $\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}=1$ ، ومنه $x^2(x-3)=(x-1)^3$

و هذا يكافئ $x^3-3x^2=x^3-3x^2+3x-1$ أي أنّ $3x=1$ ، ومنه $x=\frac{1}{3}$ .

لدينا $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\frac{1}{27}-\frac{4}{9}+\frac{8}{3}-4}{\frac{4}{9}}=\frac{1-12+72-108}{27}\times\frac{9}{4}=\frac{-47}{27}\times\frac{9}{4}=\frac{-47}{12}$

ومنه معادلة المماس هي $y=1\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{47}{12}$ أي أنّ $y=x-\frac{17}{4}$ .

إذن : $m=-\frac{17}{4}$ ، وهي فاصلة النقطة الوحيدة للتماس بين $(C_f)$ والمماس ، أي المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلا وحيدًا لمّا $m=-\frac{17}{4}$ .

ولمّا $m<-\frac{17}{4}$ المعادلة لا تقبل أي حل ( يكون المستقيم $y=x+m$ أسفل $(C_f)$ ) .

ولمّا $-\frac{17}{4}<m<-2$ المعادلة تقبل حلّين ، (المستقيم $y=x+m$ يقطع $(C_f)$ في نقطتين متمايزتين) .

6) أ) إثبات أنّ فواصل نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$ هي حلول المعادلة $(E)$ التالية : $(m+2)x^2-(2m+7)x+m+4=0$ :

فواصل نقاط تقاطع $(C_f)$ مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$ معناه حلول المعادلة $f(x)=x+m$ :

لدينا $f(x)=x+m$ معناه $\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}=x+m$ ، ومنه وبضرب الطرفين في الوسطين نجد $x^3-4x^2+8x-4=x+m(x-1)^2$ ، ومنه $x^3-4x^2+8x-4=(x+m)(x^2-2x+1)$ أي أنّ $x^3-4x^2+8x-4=x^3-2x^2+x+mx^2-2mx+m$ ، ومنه $-2x^2-mx^2+2mx+7x-m-4=0$ أي أنّ $-(m+2)x^2+(2m+7)x-m-4=0$ ، و منه $(m+2)x^2-(2m+7)x+m+4=0$ وهي المعادلة $(E)$

أي أنّ حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي نفسها حلول المعادلة $(E)$ .

وبما أنّ حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقاط تقاطع $(C_f)$ مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$ ، فإن حلول المعادلة $(E)$ هي فواصل نقاط تقاطع $(C_f)$ مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$

ب) إيجاد حسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة $(E)$ :

لدينا مميز $(E)$ هو $\Delta=(2m+7)^2-4((m+2)(m+4))=4m^2+28m+49-4m^2-16m-8m-32=4m+17$

- ومنه لمّا $m=-2$ نجد بالتعويض في المعادلة $(E)$ أنّ $-(-4+7)x+4-2=0$ ، ومنه $-3x=-2$ أي $x=\frac{2}{3}$ ، وهي فاصلة النقطة $A\left(\frac{2}{3};\frac{-4}{3}\right)$ .
- لمّا $-\frac{17}{4}<m<-2$ نجد أن $\Delta>0$ ومنه المعادلة تقبل حلين مختلفين .
- لمّا $m<-\frac{17}{4}$ نجد أنّ $\Delta<0$ ومنه المعادلة لا تقبل حلول .
- لمّا $m=-\frac{17}{4}$ نجد أنّ $\Delta=0$ و منه المعادلة $(E)$ تقبل حل مضاعف ( وحيد ) .

- إذن: عدد حلول المعادلة $(E)$ لا يزيد عن حلين مختلفين .

## حل المسألة 112 ص36 و 37 ج1 :

$f$ هي الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ ، وَ $(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

1) إثبات أنّ الدالة $f$ فرديـة :

لدينا من أجل كل $x$ وَ $-x$ من $D_f$ ، $f(-x)=-x-\dfrac{x}{\sqrt{(-x)^2-4}}=-\left(x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right)=-f(x)$

ومنه نستنتج أنّ الدالة $f$ فرديـة ، ( أي أنّ مبدأ المعلم مركز تناظر المنحنى $(C)$ ) .

2) حساب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة التعريف :

لدينا $D_f=]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ ، ومنه :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x\sqrt{x^2-4}+x}{\sqrt{x^2-4}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x\left(\sqrt{x^2-4}+1\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x\left(\sqrt{x^2-4}+1\right)}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{\sqrt{x^2-4}+1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]=\frac{-\infty}{1}=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-2}\left[x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right]=-2+\frac{-2}{0^+}=-2+(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}2}\left[x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right]=2+\frac{2}{0^+}=2+(+\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\sqrt{x^2-4}+x}{\sqrt{x^2-4}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\left(\sqrt{x^2-4}+1\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\left(\sqrt{x^2-4}+1\right)}{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2-4}+1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]=\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

3) إثبات أنَّ المستقيم $\Delta$ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحنى $(C)$ عند $+\infty$ :

معناه $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}-x-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}\right]=0$

أي أنّ $(\Delta)$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C)$ عند $+\infty$ .

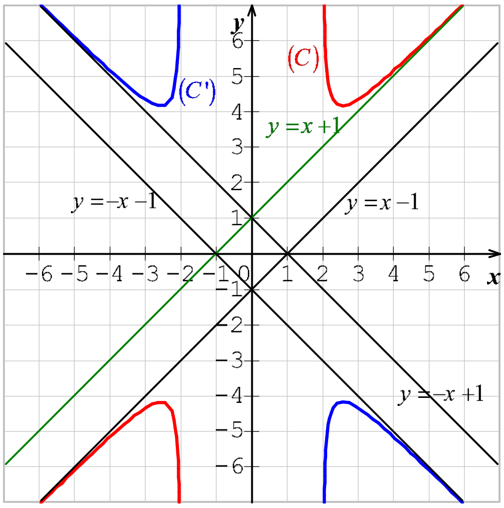
- تحديد وضعية $(C)$ بالنسبة لـ $(\Delta)$ : لدينا $f(x)-y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}-1$

ومنه لمّا $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}-1=0$ نجد $\sqrt{x^2-4}=x$ ، ومنه $x^2-4=x^2$ أي أنّ $-4=0$ و هذا مستحيل

و لدينا كذلك $\sqrt{x^2-4}\neq 0$ أي أنّ $x^2\neq 4$ ، ومنه $x\neq 2$ وَ $x\neq -2$ أي أن $(C)\cap(\Delta)=\varnothing$

و منه لمّا $x\in]-\infty;-2[$ المنحنى $(C)$ يقع أسفل المستقيم $(\Delta)$ .

ولمّا $x\in]2;+\infty[$ المنحنى $(C)$ يقع فوق المستقيم $(\Delta)$ .




4) استنتاج مستقيم مقارب مائل لـ $(C)$ عند $-\infty$ :

لدينا الدالة $f$ فردية ، ومنه فإنها تقبل مبدأ المعلم كمركز تناظر للمنحنى $(C)$، وبما أنّ $(\Delta): y=x+1$ مستقيم مقارب لها عند $+\infty$ فإنها تقبل أيضًا المستقيم $(\Delta'): y=x-1$ كمستقيم مقارب مائل عند $-\infty$

لأن $(\Delta'): y=x-1$ هو نظير $(\Delta): y=x+1$ بالنسبة للمبدأ.

5) تعيين المستقيمات المقاربة للمنحنى $(C')$ ، حيث $(C')$ منحنى الدالة $g$ المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $g(x)=-f(x)$ :

هذا معناه أنّ $(C')$ هو نظير $(C)$ بالنسبة لمحور التراتيب ، ومنه فالمستقيمات المقاربة للمنحنى $(C')$ تكون نظيرة للمستقيمات المقاربة للمنحنى $(C)$

أي أنّ المستقيمان $(\Gamma): y=-x+1$ وَ $(\Gamma): y=-x-1$ مقاربان للمنحنى $(C')$ .

## حل المسألة 113 ص 37 ج1 :

$f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ : $f(x)=|x+1|+\dfrac{x}{x^2-1}$ ، وَ $(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

1) أ) كتابة $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة :

لدينا من أجل كل $x \in D_f$ ، $f(x)=\begin{cases} x+1+\dfrac{x}{x^2-1} & ; x+1 \geq 0 \\ -x-1+\dfrac{x}{x^2-1} & ; x+1 < 0 \end{cases}$ أي

و هذا يكافئ $f(x)=\begin{cases} x+1+\dfrac{x}{x^2-1} & ; x \geq -1 \\ -x-1+\dfrac{x}{x^2-1} & ; x < -1 \end{cases}$ ، أي $f(x)=\begin{cases} x+1+\dfrac{x}{x^2-1} & ; x \in [-1;+\infty[ \\ -x-1+\dfrac{x}{x^2-1} & ; x \in ]-\infty;-1[ \end{cases}$

ب) دراسة نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة التعريف :

لدينا $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ ، ومنه :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-x-1+\frac{x}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{x^3+x-x^2+1+x}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{x^3}{x^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}[-x]=+\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} -1} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{<} -1}\left[-x-1+\frac{x}{x^2-1}\right]=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} -1}\left[x+1+\frac{x}{x^2-1}\right]=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{<} 1}\left[-x-1+\frac{x}{x^2-1}\right]=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} 1}\left[x+1+\frac{x}{x^2-1}\right]=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x+1+\frac{x}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-x+x^2-1+x}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}[x]=+\infty$$

2) أ) حساب $f'(x)$ ودراسة إشارتها :

لدينا من أجل كل $x$ من $D_f$ الدالة المشتقة $f'$ هي :

$$f'(x)=\begin{cases}1+\dfrac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} & ;x\in]-1;1[\cup]1;+\infty[\\ -1+\dfrac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} & ;x\in]-\infty;-1[\end{cases}$$ ، أي :

$$f'(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2} & ;x\in]-1;1[\cup]1;+\infty[\\ -\left(1+\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\right) & ;x\in]-\infty;-1[\end{cases}$$

- إشارة $f'(x)$ :

لدينا على المجال $]-\infty;-1[$ ، $f'(x)=-\left(1+\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\right)$ ،ومنه $f'(x)<0$ .

ولدينا على المجال $]-1;1[\cup]1;+\infty[$ ، $f'(x)=1-\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$ ،ومنه لمّا $f'(x)\geq 0$ نجد $1-\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\geq 0$

ومنه $\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\leq 1$ ،أي $1+x^2\leq(x^2-1)^2$ ،ومنه $1+x^2\leq x^4-2x^2+1$ ، هذا يكافئ $x^4-3x^2\geq 0$

أي أنّ $x^2(x^2-3)\geq 0$ ، ومنه $x^2\geq 0$ أي $x=0$ ، وَ $x^2\geq 3$ أي $x=\sqrt{3}$ وَ $x=-\sqrt{3}$ .

إذن لمّا $x\in]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;\sqrt{3}[$ نجد $f'(x)<0$ ، ومنه الدالة $f$ متناقصة تمامًا على هذا المجال . لأنّ $x=-\sqrt{3}$ لاينتمي إلى المجال $]-1;1[\cup]1;+\infty[$ .

و لمّا $x\in]\sqrt{3};+\infty[$ نجد $f'(x)>0$ ، ومنه الدالة $f$ متزايدة تمامًا على هذا المجال .

ب) جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $f(\sqrt{3})$ | ↗ $+\infty$ |

3) أ) إثبات أنّ المستقيمين $(\Delta):y=x+1$ وَ $(\Delta'):y=-x-1$ مقاربين للمنحنى $(C)$ عند $+\infty$ وَ $-\infty$ :

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x-1+\dfrac{x}{x^2-1}-(-x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x}{x^2-1}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x}\right]=0$

ومنه المستقيم $(\Delta'):y=-x-1$ مقارب مائل عند $-\infty$ .

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+1+\dfrac{x}{x^2-1}-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{x^2-1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}\right]=0$

ومنه المستقيم $(\Delta):y=x+1$ مقارب مائل عند $+\infty$ .

ب) دراسة وضعية $(C)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ على المجال $]1;+\infty[$ ، و بالنسبة إلى $(\Delta')$ على المجال $]-\infty;-1[$ :

لدينا من أجل كل $x\in]1;+\infty[$ ، $[f(x)-(\Delta)]=x+1+\dfrac{x}{x^2-1}-(x+1)=\dfrac{x}{x^2-1}$

ولدينا $\dfrac{x}{x^2-1}>0$ من أجل كل $x\in]1;+\infty[$ ، ومنه $(C)$ يقع فوق $(\Delta)$ على المجال $]1;+\infty[$ .

ولدينا كذلك من أجل كل $x\in\left]-\infty;-1\right[$ ، $\left[f(x)-(\Delta')\right]=-x-1+\dfrac{x}{x^2-1}-(-x-1)=\dfrac{x}{x^2-1}$

ومن أجل كل $x\in\left]-\infty;-1\right[$ لدينا $\dfrac{x}{x^2-1}<0$ ، ومنه $(C)$ يقع فوق $(\Delta')$ على المجال $\left]-\infty;-1\right[$ .

4) إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدًا $\alpha$ على المجال $\left]-1;1\right[$ :

من جدول تغيرات الدالة $f$ نستنتج أنّ $f(x)$ مستمرة و رتيبة تمامًا و تغير اشارتها على المجال $\left]-\infty;-1\right[$ ، ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدًا على المجال $\left]-1;1\right[$ حيث $f(\alpha)=0$ .

إيجاد حصر للعدد $\alpha$ سعته $10^{-1}$ :

لدينا $\alpha\in\left]-1;1\right[$ و $f(0)=1$ ، لأن $0$ هو منتصف المجال $\left]-1;1\right[$ ، ومنه الدالة $f$ تغيّر إشارتها على المجال $\left]0;1\right[$ أي أنّ $\alpha\in\left]0;1\right[$ .

و $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ ، لأن $\dfrac{1}{2}$ هو منتصف المجال $\left]0;1\right[$ ، ومنه الدالة $f$ تغيّر إشارتها على المجال $\left]\dfrac{1}{2};1\right[$

أي أنّ $\alpha\in\left]\dfrac{1}{2};1\right[$ .

__إذن :__ الحل الوحيد $\alpha$ للمعادلة $f(x)=0$ محصور بين $0,5$ و $1$ .

## حل المسألة 114 ص 37 ج1 :

نعتبر الدالتان $f$ و $g$ المعرفتان على المجموعة $\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[$ كما يلي : $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ و $g(x)=x-\sqrt{x^2-1}$ و $C_f$ و $C_g$ تمثيلاهما البيانيين على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ :

1) أ) تعيين نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]=(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ .

ب) تعيين نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$ :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2-1}\times\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-x^2+1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x-x^2+1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right]=\frac{1}{-\infty}=0$$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=0$ ( أي محور الفواصل ) هو مستقيم مقارب أفقي للمنحنى $C_f$ .

ج) إثبات أنّ المستقيم $(\Delta):y=2x$ مقارب للمنحنى $C_f$ عند $+\infty$ :

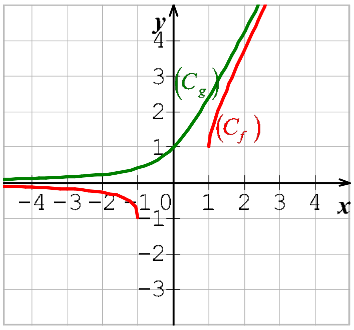
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\Delta)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\times\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}\right]=\frac{-1}{+\infty}=0$$

__إذن :__ المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=2x$ مقارب للمنحنى $C_f$ عند $+\infty$ .

2) أ) حساب $f(x)\times g(x)$ ، ثم استنتاج نهايات الدالة $g$ عند $-\infty$ وَ $+\infty$ :

$$f(x)\times g(x)=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=x^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2=x^2-x^2+1=1$$




لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ وَ $f(x)\times g(x)=1$ ومنه

$\lim_{x\to+\infty} f(x)\times\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$

ومنه نستنتج أنّ $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ .

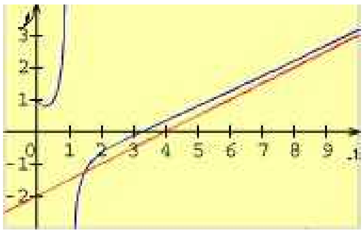
و لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ وَ $\lim_{x\to-\infty} f(x)\times\lim_{x\to-\infty} g(x)=1$ ، ومنه نستنتج أنّ $\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$ .

ب) التفسير الهندسي لهذه النتيجة هو أنّ المنحنيان $C_f$ وَ $C_g$ متقاربان عند $-\infty$ وَ $+\infty$ .

## اختيار من متعدد :

### حل التمرين 115 ص38 ج1 :

تعيين الإجابة الصحيحة دون تبرير:



في الشكل الموالي لدينا الرسم البياني $(C_f)$ لدالة $f$ معرفة على $D=[0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي :

$f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+3x-2}{2(x-1)}$ و المستقيم $\Delta$ الذي معادلته $y=\dfrac{1}{2}x-2$ :

1) أ) المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب لـ $(C_f)$ ( خطأ )

ب) المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـ $(C_f)$ ( صحيح )

ج) $(C_f)$ لا يقبل مستقيمًا مقاربًا أفقيًا و لا عموديًا ( خطأ )

2) من أجل كل $x$ من $]1;+\infty[$ : $f(x)=\dfrac{1}{2}x+a+\dfrac{bx+c}{2(x-1)}$ :

أ) $a=-2$ ، $b=2$ ، $c=-3$ ( خطأ )

ب) $a=2$ ، $b=-2$ ، $c=-3$ ( خطأ )

ج) $a=1$ ، $b=2$ ، $c=3$ ( خطأ )

3) $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب عند $+\infty$ معادلته :

أ) $y=\dfrac{1}{2}x+1$ ( خطأ ) ، ب) $y=\dfrac{1}{2}x+2$ ( خطأ ) ، ج) $y=\dfrac{1}{2}x-2$ ( صحيح )

4) أ) $(C_f)$ يقطع المستقيم المقارب في النقطة $A\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$ ( صحيح )

ب) $(C_f)$ يقطع المستقيم المقارب في النقطة $A\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{4}\right)$ ( خطأ )

ج) $(C_f)$ لا يقطع المستقيم المقارب في أية نقطة ( خطأ )

5) على المجال $[0;1[$ المعادلة $f(x)=1$ تقبل :

أ) حلا واحدا ( خطأ ) ، ب) حلين متمايزين ( صحيح ) ، ج) ثلاثة حلول ( خطأ )

### حل التمرين 116 ص38 ج1 :

$f$ معرفة على $\mathbb{R}-\{5\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{3x^2-5x}{x-5}$ :

1) $\lim\limits_{x\to5} f(x)=-\infty$ ( صحيح ) 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ( خطأ )

3) من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{5\}$ : $f(x)=3x+10+\dfrac{50}{x-5}$ ( صحيح )

4) المستقيمان اللذان معادلتهما $x=5$ و $y=3x+10$ مقاربان لمنحنى الدالة $f$ ( صحيح ) .

## صحيح أم خاطئ :

### حل التمرين 117 ص38 ج1 :

لدينا جدول تغيرات دالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ :

و $(C_f)$ منحنى الدالة $f$ الممثل في معلم :

| $x$ | $-\infty$   $-1$   $0$ | $0$   $1$   $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | +   $0$   − | +   $0$   − |
| $f(x)$ | $1 \nearrow 2 \searrow -\infty$ | $-\infty \nearrow 3 \searrow -\infty$ |

1) المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـ$(C_f)$ **( خطأ )** ( المستقيم الذي معادلته $x=1$ يقطع $(C_f)$ )

2) محور التراتيب مقارب لـ$(C_f)$ **( صحيح )**

3) المستقيم الذي معادلته $y=1$ يقطع $(C_f)$ في نقطة واحدة **( خطأ )** (هذا المستقيم يقطع $(C_f)$ في 4 نقاط)

4) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين في المجال $]0;+\infty[$ **( صحيح )**

5) على المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)\leq 3$ **( خطأ )** ( الصحيح هو على المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)\leq 2$ ) .

### حل التمرين 118 ص38 ج1 :

$f$ دالة مستمرة و متناقصة تمامًا على المجال $[0;+\infty[$ ، إذن :

أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ **( صحيح )** ( لأنّ الدالة $f$ متناقصة )

ب) من أجل كل $x$ من $[0;+\infty[$ : $f(x)<f(0)$ **( صحيح )**

ج) منحنى الدالة $f$ يقطع محور الفواصل على الأقل في نقطة **( صحيح )** (لأن 0 ينتمي لمجموعة التعريف)

### حل التمرين 119 ص38 ج1 :

$(C_f)$ هو المنحنى الممثل لدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ في معلم متعامد و متجانس ، و $(\Delta)$ المستقيم الذي معادلته : $y=1-x$

1) إذا كان $(\Delta)$ مقارب لـ$(C_f)$ عند $-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ **( خطأ )**

2) إذا كان $(\Delta)$ مقارب لـ$(C_f)$ عند $+\infty$ فلا يوجد مستقيم مقارب أفقي لـ$(C_f)$ **( صحيح )**

3) إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ فلا يمكن لـ $(\Delta)$ أن يكون مقاربًا لـ $(C_f)$ **( صحيح )**

4) إذا كان $(\Delta)$ مقاربًا لـ $(C_f)$ عند $+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x=1$ **( صحيح )**

### حل التمرين 120 ص38 ج1 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$ **( خطأ )** ( الصحيح هو $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ )

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\dfrac{1}{x}=1$ **( خطأ )**

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}=1$ **( صحيح )**

4) $\lim\limits_{x\to0}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$ **( صحيح )**