تمـــاريـــن و مشكـــــلات:

التمرين1

زهرتي نرد غير مزيفتين لونهما مختلفان وأوجه كل منهما مرقمة من1 إلى 6.
نرمي هذين النردين ونسجل الرقمين الذين يظهران على الوجهين العلويين.

1- عين على شكل جدول مجموعة إمكانيات الحدوث.

2- عين الحوادث التالية :

A : " ظهور رقمين فرديين"

B : " ظهور رقمين مجموعهما أكبر من 7 "

C : "ظهور رقمين أوليان"

D : "ظهور رقمين أحدهما فردي و الآخر زوجي"

$A\cap B$, $A\cap C$, $\overline{D}$, $\overline{B}$, $\overline{B}\cap\overline{D}$

أحسب احتمالات كل من الحوادث السابقة.

التمرين2

زهرة نرد مزيفة أوجهها مرقمة من 1 إلى 6. احتمال ظهور رقم زوجي ضعف احتمال ظهور رقم فردي.

1) أحسب احتمال ظهور رقم زوجي ثم احتمال ظهور رقم فردي.

2) أحسب احتمال ظهور الرقم 2 و الرقم 5 .

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

التمرين 3

يحتوي كيس على 6 كريات مرقمة من 1 إلى 6 لا نفرق بينها عند اللمس. نسحب من الكيس كريتين على التوالي بحيث بعد كل سحب نعيد الكرية المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي.

1) أنشئ مخطط يبين كل الحالات.
2) أحسب الاحتمال لأن تكون الكرية الثانية تحمل رقم 5.
3) أعد نفس الأسئلة السابقة مع عدم رد الكرية المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي.

التمرين 4

صمم مكعب غير متجانس و كتبت على أوجهه الأعداد **6,5,4,3,2,1** بحيث إذا ألقي على مستوى أفقي يكون احتمال ظهور أي عدد متناسبا مع ذلك العدد.

1 – عين مجموعة الإمكانيات Ω
2 – أحسب احتمالات الحوادث البسيطة.
3 – أحسب احتمال ظهور عدد أولي.
4 – أحسب احتمال ظهور عدد أكبر من أو يساوي 5.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

التمرين5

نسحب ورقتين عشوائيا من بين 20 ورقة مرقمة من 1 إلى 20.

أوجد احتمال أن يكون المجموع فرديا في كل حالة مما يلي :

1 – سحب الورقتين معا.

2 – سحب الورقتين الواحدة بعد الأخرى دون إعادة الورقة المسحوبة قبل سحب الورقة الثانية.

3 – سحب الورقتان الواحدة بعد الأخرى مع إعادة الورقة المسحوبة قبل سحب الورقة الثانية.

التمرين6

يتكون قسم دراسي من 10 تلاميذ أعمارهم 16 سنة و 5 تلاميذ أعمارهم 17 سنة و 20 تلميذا أعمارهم 18 سنة، أرادوا تشكيل لجنة مكونة من تلميذين.

1 – ما هو عدد الطرائق لاختيار هذين التلميذين.

2 – ما احتمال اختيار تلميذين مجموع سنهما 34 سنة.

3 – نعتبر المتغير العشوائي X الذين يرفق بكل من هذه الإمكانيات لاختيار تلميذين مجموع سني هذين التلميذين.

– أكتب قانون الاحتمال لهذا المتغير العشوائي.

– أحسب الأمل الرياضياتي.

– أحسب التباين و الانحراف المعياري.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

التمرين 7

برهن على صحة الخاصية : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$x^2 - C_n^p x + C_{n-1}^{p-1} . C_{n-1}^p = 0$$

التمرين 8

1 – برهن أن : $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$

2 – أثبت أن : $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

3 – أحسب المجموع $S = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n$

التمرين 9

عند نشر $(a+b)^{100}$ ما هو معامل الحد $a^{70}.b^{30}$

ما هي رتبة الحد $a^{41} \times b^{59}$

التمرين 10

انشر كل من $(1+1)^n$ و $(1-1)^n$ ثم استنتج المجاميع :

$$S_1 = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$$

$$S_2 = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ...$$

$$S_3 = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ...$$

التمرين 11

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن :

$$\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

جميع الحقوق محفوظة ©

التمرين 12

كم عددا يمكن تشكيله باستخدام الأرقام $9,8,7,6,5,4,3,2,1,0$ إذا كانت هذه الأعداد مكونة من :

1) 6 أرقام

2) 6 أرقام متمايزة مثنى مثنى

3) 6 أرقام و مضاعفة ≥ 5

4) 3 أرقام متمايزة مثنى مثنى و فردية .

التمرين 13

يحتوى كيس على 20 قريصة مرقمة من 1 إلى 20 . نسحب من الكيس قريصتين في آن واحد و بلا اختيار.

- أحسب احتمال سحب قريصتين مجموع رقميهما 10.
- أحسب احتمال سحب قريصتين الفرق بين رقميهما يساوي 4.
- أحسب احتمال سحب قريصتين مجموع رقميهما 10 علما أن الفرق بينهما 4.

التمرين 14

قطعة نقود صنعت مزيفة بحيث عند رميها يكون احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الحرف A ضعف احتمال ظهور الوجه الآخر والذي يحمل الحرف B .

1 – أحسب الاحتمالات التالية :

$$p(A\cap B)\quad , p\left(\overline{A}\right), p(B)\quad ,\quad p(A)$$

1 – نفرض أن ظهور الوجه A يعطي ربح 100 دج وظهور الوجه B يعطي خسارة 50 دج.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ قيم الربح أو الخسارة.

http://www.onefd.edu.dz

- أكتب قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X
- أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير X
- أحسب التباين والانحراف المعياري للمتغير X

التمرين 15

يتكون مصنع لإنتاج الثلاجات من 3 أقسام حيث تساهم بـــ 30% ، 60% 10 % على الترتيب في الإنتاج الكلي للمصنع و احتمالات أن تكون الثلاجة صالحة للاستعمال علما أنها صنعت في الأقسام الثلاثة هي **0,75 , 0,85 , 0,90** على الترتيب.

ما هو احتمال أن تكون الثلاجة المصنوعة في هذا المصنع صالحة للاستعمال.

التمرين 16

يحتوي كيس على 6 كرات حمراء و 4 كرات سوداء.

نسحب من هذا الكيس 3 كرات على التوالي و دون إرجاع.

1 – احسب احتمال تحقق كل من الحدثين A و B حيث :

A : الحصول على اللونين معا.

B : الحصول على لون واحد.

2 – استعمل شجرة الاحتمالات لنمذجة كل من الوضعيتين السابقتين لحساب احتمال تحقق كل من الحدثين A و B.

جميع الحقوق محفوظة ©

التمرين 17

يحتوي كيس على 5 كرات خضراء و 3 كرات صفراء.

نسحب من الكيس 3 كرات على التوالي بحيث بعد كل سحب نعيد الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي.

1 – احسب احتمال تحقق كل من الحدثين C و D حيث :

C : الحصول على اللونين معا

D : الحصول على لون واحد.

2 – استعمل شجرة الاحتمالات لنمذجة كل من الوضعيتين السابقتين و لحساب تحقق كل من الحدثين C و D .

جميع الحقوق محفوظة ©

الحـــلــــــــــــــول:

التمرين 1

1 – تعيين في جدول مجموعة إمكانيات الحدوث: ليكن النردين D_1 و D_2

$D_2 \backslash D_1$	1	2	3	4	5	6
1	$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$	$(1;4)$	$(1;5)$	$(1;6)$
2	$(2;1)$	$(2;2)$	$(2;3)$	$(2;4)$	$(2;5)$	$(2;6)$
3	$(3;1)$	$(3;2)$	$(3;3)$	$(3;4)$	$(3;5)$	$(3;6)$
4	$(4;1)$	$(4;2)$	$(4;3)$	$(4;4)$	$(4;5)$	$(4;6)$
5	$(5;1)$	$(5;2)$	$(5;3)$	$(5;4)$	$(5;5)$	$(5;6)$
6	$(6;1)$	$(6;2)$	$(6;3)$	$(6;4)$	$(6;5)$	$(6;6)$

2− تعيين الحوادث :

$$A=\{(1;1),(1;3),(1;5),(3;3),(3;5),(5;1),(5;3),(5;5)\}$$

$$B=\{(2;6),(3;5),(3;6),(4;4),(4;5),(4;6),(5;3),(5;4),$$
$$(5;5),(5;6),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5),(6;6)\}$$

$$C=\{(2;2),(2;3),(2;5),(3;2),(3;3),(3;5),(5;2),(5;3),(5;5)\}$$

$$D=\{(1;2),(1;4),(1;6),(2;1),(2;3),(2;5),(3;2),(3;4),(3;6)$$
$$(4;1),(4;3),(4;5),(5;2),(5;4),(5;6)(6;1),(6;3),(6;5)\}$$

$$A\cap B=\{(3;5),(5;3),(5;5)\}$$

$$\overline{D}=\{(1;1),(1;3),(1;5),(2;2),(2;4),(2;6),(3;1),(3;3),$$
$$(3;5),(3;5),(4;2),(4;4),(4;6),(5;1),(5,3),$$
$$(5;5),(6;2),(6;4),(6;6)\}$$

http://www.onefd.edu.dz

$$\overline{B}=\{\ (1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6),(2;1),(2;2),$$
$$(2;3),(2;4),(2;5),(3;1),(3;2),(3;3),(3,4),(5;1)$$
$$(4;1),(4;2),(4;3),(5;1),(5;2),(6,1)\ \}$$
$$\overline{B}\cap\overline{D}=\{\ (1;1),(1;3),(1;5),(2;2),(2;4),(3;1),(3;3),$$
$$(4;2),(5;1)\ \}$$

3- حساب الاحتمالات :

$$p(A)=\frac{9}{36}=\frac{3}{12}\qquad , \qquad p(B)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$
$$p(C)=\frac{9}{36}=\frac{3}{12}\qquad , \qquad p(D)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$
$$p(A\cap C)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}\qquad ؛ \qquad p(A\cap B)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$
$$p(\overline{B})=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}\qquad ؛ \qquad p(\overline{D})=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$
$$p(\overline{B}\cap\overline{D})=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

التمرين 2

1) مجموعة الإمكانيات Ω هي : $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

حيث إذا كان p احتمال على Ω فإن : $p(\Omega)=1$

إذن : $p(\{1,2,3,4,5,6\})=1$

و منه : $p(\{1,3,5\}\cup\{2,4,6\})=1$

و بالتالي : $p(\{1,3,5\})+p(\{2,4,6\})=1 \quad ...(1)$

لأن: $\{2,4,6\}\cap\{1,3,5\}=\varnothing$

وبما أن احتمال ظهور رقم زوجي ضعف احتمال ظهور رقم فردي فإن:

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

$p\left(\{2,4,6\}\right)=2\,p\left(\{1,3,5\}\right)$ بوضع : $p\left(\{1,3,5\}\right)=a$

نجد : $p\left(\{2,4,6\}\right)=2a$ و منه بالتعويض في (1) نجد : $a+2a=1$

و عليه : $3a=1$ أي $a=\frac{1}{3}$

إذن : $p\left(\{1,3,5\}\right)=\frac{1}{3}$ و $p\left(\{2,4,6\}\right)=\frac{2}{3}$ أي أن احتمال ظهور

رقم فردي هو $\frac{1}{3}$ و احتمال ظهور رقم زوجي هو $\frac{2}{3}$

احتمال ظهور الرقم 2 :

لدينا: $p\left(\{2,4,6\}\right)=\frac{2}{3}$ و عليه : $p\left(\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}\right)=\frac{2}{3}$

$p\left(\{2\}\right)+p\left(\{4\}\right)+p\left(\{6\}\right)=\frac{2}{3}$

لكن : $p\left(\{2\}\right)=p\left(\{4\}\right)=p\left(\{6\}\right)=h$ ومنه : $3h=\frac{2}{3}$ إذن : $h=\frac{2}{9}$

إذن احتمال ظهور الرقم 2 هو $\frac{2}{9}$

- احتمال ظهور الرقم 5 : لدينا : $p\left(\{1,3,5\}\right)=\frac{1}{3}$

و منه : $p\left(\{1\}\cup\{3\}\cup\{5\}\right)=\frac{1}{3}$

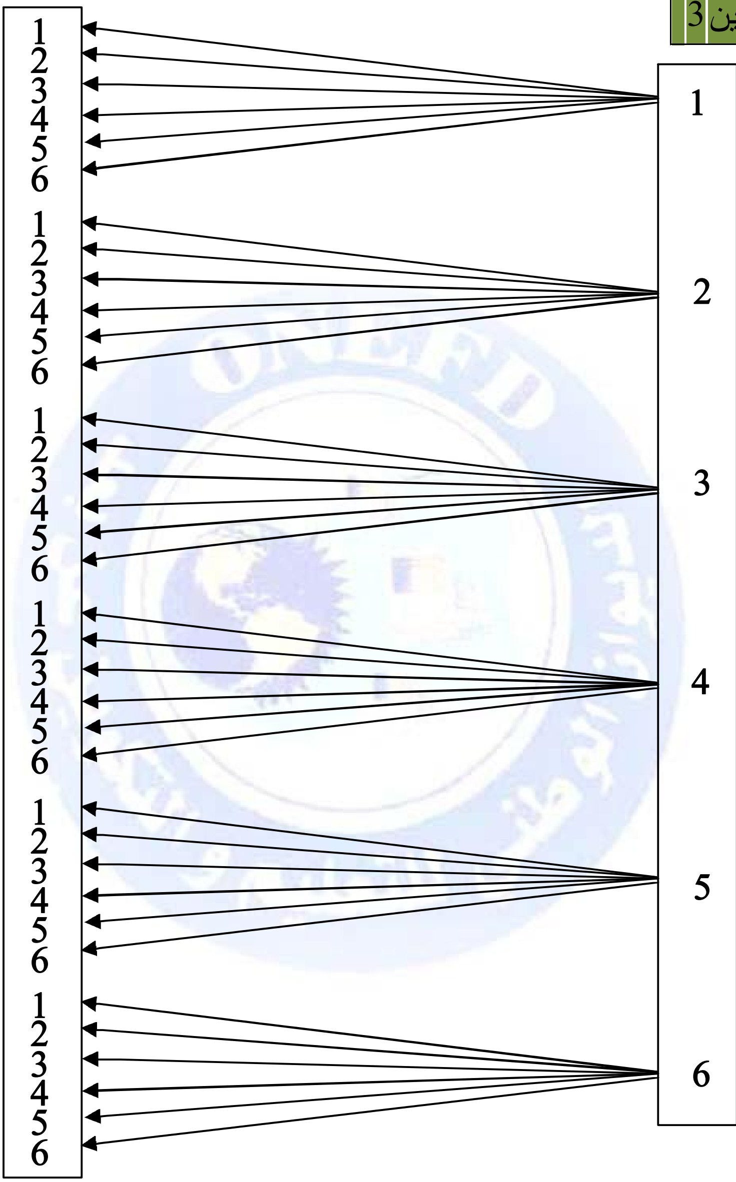
إذن : $p\left(\{1\}\right)+p\left(\{3\}\right)+p\left(\{5\}\right)=\frac{1}{3}$

لكن : $p\left(\{1\}\right)=p\left(\{3\}\right)=p\left(\{5\}\right)=m$

إذن : $3m=\frac{1}{3}$ و منه : $m=\frac{1}{9}$ إذن احتمال ظهور الرقم 5 هو $\frac{1}{9}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

التمرين 3



السحبة الثانية السحبة الأولى

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

2 – حساب الاحتمال :

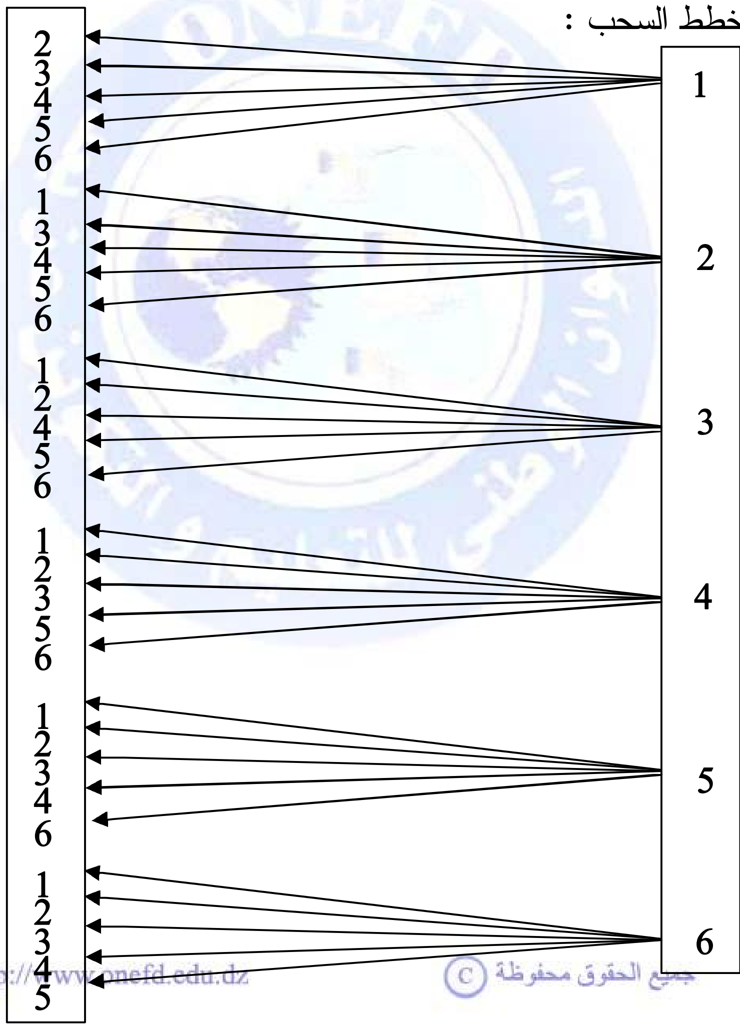
عدد الحالات الممكنة هو : $6 \times 6 = 36$

عدد الحالات الملائمة هو : $6 \times 1 = 6$

الاحتمال : $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

3– السحب دون إرجاع :

مخطط السحب :



http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

– حساب الاحتمال :

عدد الحالات الممكنة : $6 \times 5 = 30$

عدد الحالات الملائمة : $6 \times 1 = 6$

الاحتمال : $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{5}$

التمرين 4

1 – مجموعة الإمكانيات : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

2 – حساب احتمالات الحوادث البسيطة :

لدينا : $p(\Omega) = 1$ أي :

$$p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) + p(\{5\}) + p(\{6\}) = 1$$

و عليه : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$

لكن : $\frac{p_1}{1} = \frac{p_2}{2} = \frac{p_3}{3} = \frac{p_4}{4} = \frac{p_5}{5} = \frac{p_6}{6} = \alpha$

إذن : $p_1 = 1\alpha$ و $p_2 = 2\alpha$ و $p_3 = 3\alpha$ و $p_4 = 4\alpha$ و $p_5 = 5\alpha$

$p_6 = 6\alpha$

و بالتالي : $\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha + 5\alpha + 6\alpha = 1$

و منه : $21\alpha = 1$ أي أن : $\alpha = \frac{1}{21}$

و عليه : $p_1 = \frac{1}{21}$ ، $p_2 = \frac{2}{21}$ ، $p_3 = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$ ،

$p_4 = \frac{4}{21}$ ، $p_5 = \frac{5}{21}$ ، $p_6 = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

3- حساب احتمال ظهور عدد أولي :

$$p(\{2,3,5\}) = p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{5\})$$

جميع الحقوق محفوظة © http://www.onefd.edu.dz

$$= \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} = \frac{10}{21}$$

2 – حساب احتمال ظهور عدد أكبر من أو يساوي 5 :

$$p(\{5,6\}) = p(\{5\}) + p(\{6\}) = p_5 + p_6$$

$$= \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{11}{21}$$

التمرين 5

يكون المجموع فرديا إذا كانت ورقة تحمل رقما زوجيا و الأخرى فرديا.

1 – عدد الطرق الممكنة لسحب الورقتين معا : $C_{20}^2 = 190$

عدد الطرائق الملائمة لسحب ورقتين إحداهما تحمل رقم زوجي و الأخرى فردي أي مجموع الرقمين فردي هو : $C_{10}^1 \times C_{10}^1 = 100$

الاحتمال : $p_1 = \frac{100}{190} = \frac{10}{19}$

2 – عدد الطرائق الممكنة لسحب الورقتين على التوالي دون الإعادة :

$$A_{20}^2 = 20 \times 19 = 380$$

– عدد الحالات الملائمة لسحب ورقتين مجموعها فردي، أي أن تكون الأولى زوجية و الثانية فردية أو الأولى فردية و الثانية زوجية و عددها :

$$10 \times 10 + 10 \times 10 = 200$$

الاحتمال : $p_2 = \frac{200}{380} = \frac{10}{19}$

3 – عدد طرائق سحب ورقتين على التوالي مع الإرجاع هو :

$$20 \times 20 = 400$$

- عدد الطرائق الملائمة : $10 \times 10 + 10 \times 10 = 200$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

لأن إما أن تكون الأولى فردية والثانية زوجية أو أن تكون الأولى زوجية و الثانية فردية.

الاحتمال هو : $p_3 = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$

التمرين 6

1 – عدد الطرائق لاختيار هذين التلميذين :

$$C_{35}^{2} = \frac{35!}{(35-2)!\times 2!}$$

$$C_{35}^{2} = \frac{35\times 34\times 33!}{33!\times 2} = 35\times 17 = 595$$

2 – احتمال اختيار تلميذين مجموع سنيهما 34 سنة :

عدد الطرائق الملائمة : $C_{10}^{1}\times C_{20}^{1} + C_{5}^{2} = 210$

(أي تلميذ عمره 16 سنة و آخر 18 سنة أو تلميذين عمر كل منهما 17 سنة).

الاحتمال هو : $\frac{210}{595} = \frac{6}{17}$

3 – قيم X هي : 36,35,34,33,32

$$p[X=32] = \frac{C_{10}^{2}}{595} = \frac{45}{595} = \frac{9}{119}$$

$$p[X=33] = \frac{C_{10}^{1}\times C_{5}^{1}}{595} = \frac{50}{595} = \frac{10}{119}$$

$$p[X=34] = \frac{C_{10}^{1}\times C_{20}^{1} + C_{5}^{2}}{595} = \frac{210}{595} = \frac{42}{119}$$

$$p[X=35] = \frac{C_{5}^{1}\times C_{20}^{1}}{595} = \frac{100}{595} = \frac{20}{119}$$

$$p[X=36] = \frac{C_{20}^{2}}{595} = \frac{190}{595} = \frac{38}{119}$$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة (c)

قانون الاحتمال :

قيم X	32	33	34	35	36
p	$\frac{9}{119}$	$\frac{10}{119}$	$\frac{42}{119}$	$\frac{20}{119}$	$\frac{38}{119}$

– الأمل الرياضياتي:

$$E(X)=\frac{32\times 9}{119}+\frac{33\times 10}{119}+\frac{34\times 42}{119}+\frac{35\times 20}{119}+\frac{36\times 38}{119}$$

$$E(X)=\frac{288+330+1428+700+1368}{119}=\frac{4114}{119}$$

إذن: $E(X)\simeq 34{,}57$.

– التباين :

$$\mathrm{V}\simeq(32\text{-}35)^2\times\frac{9}{119}+(33\text{-}35)^2\times\frac{10}{119}+(34\text{-}35)^2\times\frac{42}{119}$$

$$+(35\text{-}35)^2\times\frac{20}{119}+(36\text{-}35)^2\times\frac{38}{119}$$

$$\mathrm{V}\simeq\frac{81+40+42+0+38}{119}$$

$$\mathrm{V}\simeq\frac{201}{119}$$

$$\mathrm{V}\simeq 1{,}7$$

- الانحراف المعياري :

$$\sigma=\sqrt{\mathrm{V}}$$

$$\sigma\simeq 1{,}3$$

التمرين 7

– البرهان على صحة الخاصية : $C_n^p=C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p}$

جميع الحقوق محفوظة ©

$$C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p}=\frac{(n-1)!}{\left[(n-1)\,p(p-1)\right]!(p-1)}+\frac{(n-1)!}{[n-1-p]!.p!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-p)!.(p-1)!}+\frac{(n-1)!}{(n-p)!.p!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-p).(n-p-1)!.(p-1)}+\frac{(n-1)!}{(n-p-1)!.p(p-1)}$$

$$=\frac{(n-1)!.p+(n-1)!.(n-p)}{(n-p).(n-p-1)!\,p(p-1)}$$

$$=\frac{(n-1)![p+n-p]}{(n-p)!\,p!}=\frac{n(n-1)!}{(n-p)!\,p!}=\frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

$$=C_n^p$$

حل المعادلة :

$$x^2-C_n^p x+C_{n-1}^{p-1}.C_{n-1}^{p}=0$$

$$\Delta=\left(-C_n^p\right)^2-4C_{n-1}^{p-1}.C_{n-1}^{p}$$

$$\Delta=\left(C_n^p\right)^2-4C_{n-1}^{p-1}.C_{n-1}^{p}$$

$$\Delta=\left(C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p}\right)^2-4C_{n-1}^{p-1}.C_{n-1}^{p}$$

$$\Delta=\left(C_{n-1}^{p-1}\right)^2+2C_{n-1}^{p-1}.C_{n-1}^{p}+\left(C_{n-1}^{p}\right)^2-4C_{n-1}^{p-1}.C_{n-1}^{p}$$

$$\Delta=\left(C_{n-1}^{p-1}\right)^2-2C_{n-1}^{p-1}.C_{n-1}^{p}+\left(C_{n-1}^{p}\right)^2$$

$$\Delta=\left(C_{n-1}^{p-1}-C_{n-1}^{p}\right)^2$$

و عليه $\Delta>0$ و منه للمعادلة حلين متمايزين :

$$x_1=\frac{C_n^p-\left(C_{n-1}^{p-1}-C_{n-1}^{p}\right)}{2}=\frac{C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p}-C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p}}{2}$$

ومنه: $x_1=C_{n-1}^{p}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

$$x_2 = \frac{C_n^p - C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p}{2} = \frac{C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p}{2}$$

و منه: $x_2 = C_{n-1}^{p-1}$

$S = \{C_{n-1}^p, C_{n-1}^{p-1}\}$

التمرين 8

1 – نبرهن أن : $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$

لدينا : $(a+b)^n = C_n^0 a^{n-0} b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + ... + C_n^n a^{n-n} b^n$

بوضع $a = b = 1$ نجد :

$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$

إذن : $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$

ويمكن البرهان بالتراجع على صحة : $p(n) : C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$

- من أجل $n = 0$: $C_0^0 = 2^0$ صحيحة

– نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$

$p(k) : C_k^0 + C_k^1 + ... + C_k^k = 2^k$

$p(k+1) : C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + ... + C_{k+1}^{k+1} = 2^{k+1}$

لدينا مما سبق : $C_{k+1}^0 = C_k^0$

$C_{k+1}^1 = C_k^0 + C_k^1$

$C_{k+1}^2 = C_k^1 + C_k^2$

$\vdots$

$C_{k+1}^k = C_k^{k-1} + C_k^k$

$C_{k+1}^{k+1} = C_k^k + C_k^{k+1}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

بالجمع طرفا لطرف نجد :

$$C_{k+1}^0+C_{k+1}^1+\dots+C_{k+1}^{k+1}=2C_k^0+2C_k^1+\dots+2C_k^k+C_k^{k+1}$$
$$=2\left(C_k^0+C_k^1+\dots+C_k^k\right)+0$$
$$=2.2^k$$
$$=2^{k+1}$$

ومنه $p(k+1)$ صحيحة و عليه $p(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n

2 – إثبات أن : $pC_n^p=nC_{n-1}^{p-1}$

$$pC_n^p=p\times\frac{n!}{(n-p)!\times p!}=p\times\frac{n!}{(n-p)!\,p(p-1)!}$$
$$=\frac{n!}{(n-p)!(p-1)!}\dots(1)$$

$$nC_{n-1}^{p-1}=n.\frac{(n-1)!}{\left[(n-1)-(p-1)\right]!.(p-1)!}=\frac{n(n-1)}{(n-p)!.(p-1)!}$$
$$=\frac{n!}{(n-p)!.(p-1)!}\dots(2)$$

من (1) و (2) : $pC_n^p=nC_{n-1}^{p-1}$

3 – حساب المجموع S :

$$S=1.C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\dots+nC_n^n$$

مما سبق : $S=n.C_{n-1}^0+nC_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\dots+nC_{n-1}^{n-1}$

$$S=n\left[C_{n-1}^0+nC_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\dots+nC_{n-1}^{n-1}\right]$$

و من السؤال 1 : $S=n.2^{n-1}$

جميع الحقوق محفوظة ©

التمرين 9

$$(a+b)^{100}=\sum_{p=0}^{p=100} C_{100}^{p}.a^{100-p}.b^{p}$$

- معامل $a^{30}.b^{30}$:

- لدينا : $\begin{cases}100-p=70\\ p=30\end{cases}$

و منه : $p=30$

إذن المعامل هو : C_{100}^{30}

– رتبة الحد : $a^{41}\times b^{59}$ إذن : $\begin{cases}100-p=41\\ p=59\end{cases}$

إذن : $p=59$

و عليه رتبة هذا الحد هي : 60 .

التمرين 10

$$(1+1)^{n}=\sum_{p=0}^{p=n} C_{n}^{p}(1)^{n-p}.(1)^{p}=\sum_{p=0}^{p=n} C_{n}^{p}$$

$$2=C_{n}^{0}+C_{n}^{1}+...+C_{n}^{n}$$

$$(1+1)^{n}=\left[1+(-1)\right]^{n}=\sum_{p=0}^{p=n} C_{n}^{p}(1)^{n-p}.(-1)^{p}$$

$$=\sum_{p=0}^{p=n} C_{n}^{p}(-1)^{p}=C_{n}^{0}-C_{n}^{1}+C_{n}^{2}-...+(-1)^{n}C_{n}^{n}$$

$$0=C_{n}^{0}-C_{n}^{1}+C_{n}^{2}-...+(-1)^{n}C_{n}^{n}$$

استنتاج المجاميع :

$$S_{1}=(1+1)^{n}=2^{n}$$

$$S_{1}=\left(C_{n}^{0}+C_{n}^{2}+...\right)+\left(C_{n}^{1}+C_{n}^{3}+...\right)$$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

$$S_1 = S_2 + S_3$$
$$0 = \left(C_n^0 + C_n^2 + \dots\right) - \left(C_n^1 + C_n^3 + \dots\right)$$
$$0 = S_2 - S_3$$

إذن : $\begin{cases} S_2 + S_3 = 2^n \\ S_2 - S_3 = 0 \end{cases}$

بالجمع نجد : $2S_2 = 2^n$

إذن : $S_2 = \dfrac{2^n}{2}$ و عليه : $S_2 = 2^{n-1}$ و بالتالي : $S_3 = 2^{n-1}$

التمرين 11

البرهان بالتراجع على صحة الخاصية : $p(n): \dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$

- من أجل $n = 1$: $\dfrac{1}{1!} \leq \dfrac{1}{2^0}$ أي $1 \leq 1$

- و هذا صحيح و منه $p(1)$ صحيحة.

نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$

$$p(k): \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$
$$p(k+1): \frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{2^k}$$

لدينا : $k \geq 1$

إذن : $k+1 \geq 2$ و عليه : $(k+1): k! \geq 2.k!$

و منه : $(k+1)! \geq 2.k!$ و بالتالي : $\dfrac{1}{(k+1)!} \leq \dfrac{1}{2.k!} \dots (1)$

لكن : $\dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$ و منه : $\dfrac{1}{2k!} \leq \dfrac{1}{2.2^{k-1}}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

إذن : $(2)...\frac{1}{2.k!} \leq \frac{1}{2^k}$

من (1) و (2) : $\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{2^k}$

إذن : $p(k+1)$ صحيحة.

و منه : $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.

التمرين	12

1 – عدد الأعداد المكونة من 6 أرقام :

و هي من الشكل $abcdef$ حيث : $a \neq 0$

لدينا: 10 إمكانيات لاختيار كل عدد منها ما عدا a فلدينا 9 إمكانيات

لأن : $a \neq 0$ و حسب المبدأ الأساسي عدد الأعداد هو : 9×10^9

2 – عدد الأعداد المكونة من 6 أرقام متمايزة مثنى مثنى وهي من الشكل : $abcdef$ حيث $a \neq 0$

– عدد الأعداد من هذا الشكل بما فيهم التي تشمل 0 على اليسار هو :

A_{10}^{6} أي $\frac{10!}{(10-6)!}$ أي : $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$

وعليه عدد هذه الأعداد هو : 151200

وعدد الأعداد من الشكل $abcdef$ هو عدد الأعداد ذات 5 أرقام

وعددها A_9^5 حيث : $A_9^5 = \frac{9!}{(9-5)!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$

أي : $A_9^5 = 15120$

ومنه عدد الأعداد ذات 6 أرقام متمايزة مثنى مثنى هو:

$A_{10}^{6} - A_9^5 = 136080$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

3 – عدد الأعداد المكونة من 6 أرقام و مضاعفة لـــ 5 و هي من الشكل $abcde0$ أو $abcde5$ $(a \neq 0)$ أي رقم آحادها إما 0 أو 5

و عددها : $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 2$

حسب المبدأ الأساسي (لدينا 9 إمكانيات الاختيار a و 10 إمكانيات لاختيار كل من b و C و d و e و 2 إمكانية لاختيار f)

و منه عدد هذه الأعداد هو : $18 \times 10^4 = 180000$

4 – عدد الأعداد الفردية و المتمايزة مثنى مثنى .

و هي من الشكل : abc حيث : $a \neq 0$ و $c \in \{1,3,5,7,9\}$

– عدد كل الأعداد الفردية من هذا الشكل بما فيها التي تشمل 0 على اليسار هو : $5 \times 9 \times 8$ أي 360

– عدد الأعداد الفردية من الشكل : abc هو : 5×8 أي 40

ومنه عدد الأعداد المكونة من 3 أرقام متمايزة مثنى مثنى و فردية هو : $360 - 40 = 320$

التمرين 13

عدد السحبات الممكنة : $C_{20}^{2} = \dfrac{20!}{(20-2)! \times 2!}$

$= 190$

1) لتكن A الحادثة المعرفة بمجموع الرقمين يساوي 10.

$A = \{\{1,9\},\{2,8\},\{3,7\},\{4,6\}\}$

$p(A) = \dfrac{4}{190} = \dfrac{2}{95}$

2) لتكن B الحادثة المعرفة بالفرق بين الرقمين يساوي 4 :

$B = \{\{1,5\},\{2,6\},\{3,7\},\{4,8\},\{5,9\},\{6;10\},$

http://www.prof-edu.dz جميع الحقوق محفوظة

$\{7,11\},\{8,12\},\{9,13\},\{10,14\},\{11,15\},$
$\{12,16\},\{13,17\},\{14,18\},\{15,19\},\{16,20\}\ \}$

$$p(B)=\frac{16}{190}=\frac{8}{95}$$

3 − حساب $p_B(A)$:

$$p_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(b)}$$

لكن : $A\cap B=\{\{3,7\}\}$ و منه : $p(A\cap B)=\frac{1}{190}$

و عليه : $p_B(A)=\frac{\frac{1}{190}}{\frac{16}{190}}=\frac{1}{190}\times\frac{19}{16}=\frac{1}{16}$

التمرين 14

1) لتكن مجموعة الإمكانيات : $\Omega=\{A,B\}$

$p(\Omega)=1$ و منه $p(A)+p(B)=1$

لكن : $p(A)=2p(B)$ و منه : $3p(B)=1$

إذن : $p(B)=\frac{1}{3}$ و عليه $p(A)=\frac{2}{3}$

$$p(\overline{A})=1-p(A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

حساب $p(A\cap B)$:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

$1=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-p(A\cap B)$ و منه $p(A\cap B)=0$

جميع الحقوق محفوظة ©

2- قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

قيم X	100	-50
p_X	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

- الأمل الرياضياتي للمتغير X :

$$E(X)=100\times\frac{2}{3}-50\times\frac{1}{3}=\frac{200-50}{3}$$

$$E(X)=\frac{150}{3}=50$$

- التباين : $V(X)=\frac{2}{3}(100-50)^2+\frac{1}{3}(-50-50)^2$

$$V(X)=5000 \quad =\frac{2}{3}(2500)+\frac{1}{3}(10000)=\frac{5000+10000}{3}$$

- الانحراف المعياري :

لدينا : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ و منه : $\sigma(X)\simeq 70,7$

التمرين 15

احتمال اختيار ثلاجة من إنتاج القسم الأول هو : $\frac{30}{100}$ أي: $p(C_1)=0,3$

احتمال اختيار ثلاجة من إنتاج القسم الثاني هو : $\frac{60}{100}$ أي: $p(C_2)=0,6$

احتمال اختيار ثلاجة من إنتاج القسم الثالث هو : $\frac{10}{100}$ أي: $p(C_3)=0,1$

احتمال أن تكون الثلاجة Fصالحة للاستعمال علما أنها أنتجت في القسم الأول هو : $p_{C_1}(F)=0,75$

احتمال أن تكون الثلاجة Fصالحة للاستعمال علما أنها أنتجت في القسم الثاني هو : $p_{C_2}(F)=0,85$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

احتمال أن تكون الثلاجة F صالحة للاستعمال علما أنها أنتجت في القسم الثالث هو : $p_{C_3}(F)=0,90$

و منه احتمال أن تكون ثلاجة F صالحة للاستعمال في هذا المصنع :

$$p(F)=p_{C_1}(F)\times p(C_1)+p_{C_2}(F)\times p(C_2)+p_{C_3}(F)\times p(C_3)$$
$$=0,75\times 0,3+0,85\times 0,6+0,90\times 0,1=0,822$$

التمرين 16

نرمز بالرمز R لكرة حمراء و بالرمز N لكرة سوداء.

عدد الحالات الممكنة لهذا السحب هو : $A_{10}^{3}=720$

1) الحالات الملائمة لوقوع الحدث A هي :

$$(R;R;\mathrm{V});(R;\mathrm{V};\mathrm{R});(\mathrm{V};R;R);(\mathrm{V};\mathrm{V};R);(\mathrm{V};R;\mathrm{V});(R;\mathrm{V};\mathrm{V})$$

و عليه عدد الحالات الملائمة للحصول على A هو :

$$3.C_6^2\times C_4^1+3.C_6^1\times C_4^2=3\times 120+3\times 72=576$$

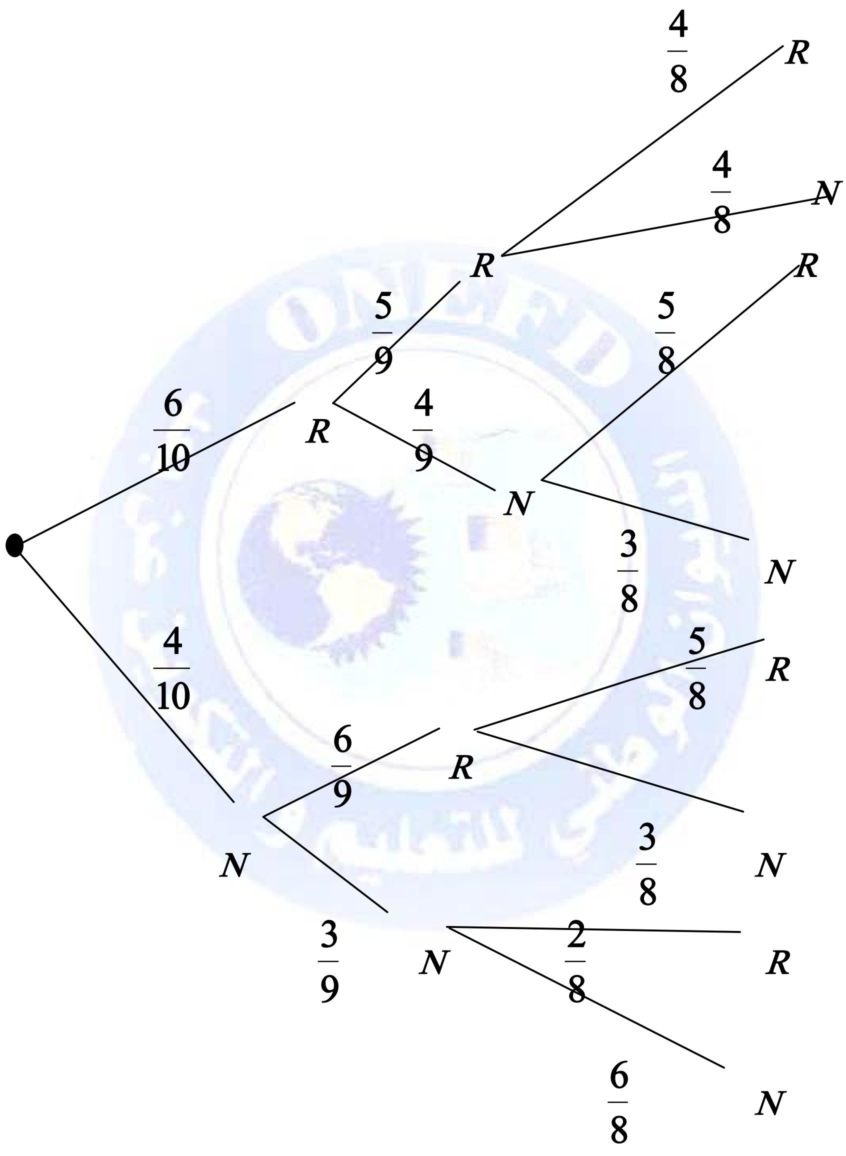
احتمال الحدث A : $p(A)=\dfrac{576}{720}$

– الحالات الملائمة لوقوع الحدث B :

$(R;R;R);(\mathrm{V};\mathrm{V};\mathrm{V})$ و عليه عدد الحالات الملائمة للحصول على B هو : $C_6^3+C_4^3=144$ و منه: $p(B)=\dfrac{144}{720}$

جميع الحقوق محفوظة ©

3) نمذجة الوضعية باستعمال شجرة الاحتمالات :



جميع الحقوق محفوظة ©

و عليه الحادثة A تتكون من 6 مسارات نرمز لها بالرموز :

$$(N;R;R);(R;N;N);(R;N;R);(R;R;N);(N;N;R);(N;R;N)$$

$$p(A)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}$$

$$+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}$$

$$=\frac{120+120+72+120+72+72}{720}=\frac{576}{720}$$

أما الحادثة B فتتكون من مسارين هما : $(R;R;R);(N;N;N)$

و عليه : $p(A)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{120+24}{720}$

$$p(B)=\frac{144}{720}$$

التمرين 17

نرمز بالرمز V لكرة خضراء و بالرمز J لكرة صفراء.

عدد الحالات الممكنة لهذا السحب هو : 8^3 أي 512.

1) الحالات الملائمة لوقوع الحدث C هي :

$$(V;V;J);(V;J;V);(J;V;V);(V;J;J);(J;J;V);(J;V;J)$$

و عليه عدد الحالات الملائمة لوضوع الحدث هو :

$$3.5^2\times 3+3.5^1.3^2=360$$

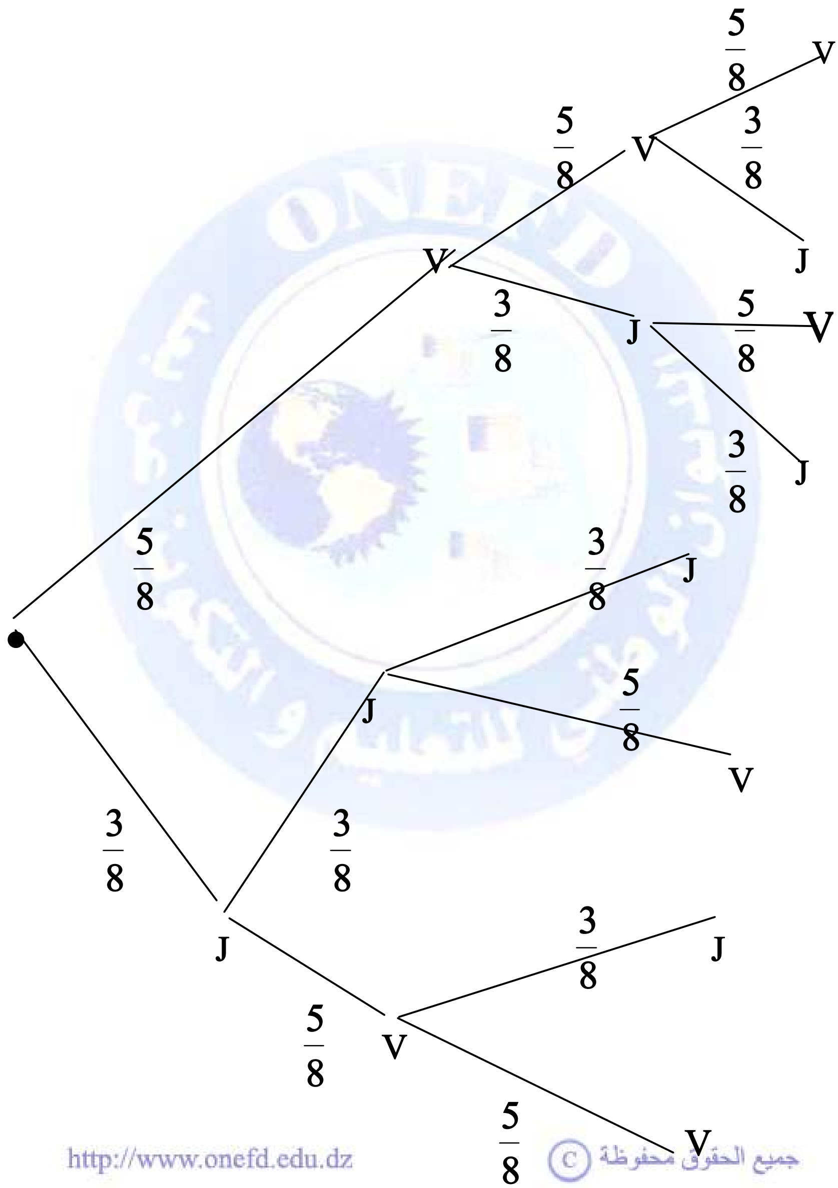
و بالتالي : $p(C)=\frac{360}{512}$

– الحالات الملائمة لوقوع الحدث D هي : $(V;V;V),(J;J;J)$

عدد الحالات الملائمة لوقوع C هو : $5^3+3^3=152$

احتمال C : $p(C)=\frac{152}{512}$

2 –نمذجة الوضعية باستعمال شجرة الاحتمالات :



http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

و عليه :

$$p(A)=\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}$$
$$+\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}$$

$$p(A)=\frac{3.5^2\times 3+3.5.3^2}{8^3}=\frac{360}{512}$$

و لدينا :

$$p(B)=\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}$$

إذن :

$$p(B)=\frac{152}{512}$$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©