

1) التحليل التوافقي

العاملية :  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$

$n^p$	(2) القائمة :
$n!$	(3) التبديلية :
$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	(4) الترتيبات :
$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	(5) التوفيقات :

خصوص:

$C_n^0 = C_n^n = 1$	$C_n^1 = n$
$0! = 1! = 1$	$C_{n+1}^n = n+1$

السحب :

عدد السحب الممكن	الترتيب	التكرار	
$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	غير مهم	غير ممكن	السحب في ان واحد :
$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	مهم	مهم	السحب على التوالي بدون إرجاع :
$n^p$	مهم	غير مهم	السحب على التوالي بالإرجاع :

تمرين 01:

ما هو عدد الكلمات المكونة من 4 أحرف ( لا يهم أن تكن ذات معنى ) التي يمكن تشكيلها من بالأحرف التالية : { ا ، ب ، ج ، د ، هـ ، ر ، س ، ش } . بحيث :

$\alpha$  ( الكلمة تبدأ بحرف السين ؟

$\beta$  ( تبدأ الكلمة بحرف السين أو حرف الباء ؟

$\gamma$  ( لا يوجد تكرار في العرف ؟

حل مختصر :

$$R_\alpha = 1 \times 8 \times 8 \times 8 = 512 / R_\beta = 1 \times 8 \times 8 \times 8 + 1 \times 8 \times 8 \times 8 / R_\gamma = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$$

تمرين 02:

ما هو عدد أرقام الهاتف التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام التالية : { 0،1،2،3،4،5،6،7،8،9 } .

في الحالات التالية :

$\alpha$  ( رقم الهاتف متكون من عشرة أرقام ؟

$\beta$  ( رقم الهاتف متكون من عشرة أرقام مختلفة متنى متنى ؟

$\gamma$  ( رقم الهاتف متكون من عشرة أرقام متشابهة ؟

حل مختصر :

$$R_\alpha = 10^{10} / R_\beta = 10! / R_\gamma = 10$$

تمرين 03:

مركز أبحاث يراد تشكيل لجنة تضم 4 أعضاء مختارين من بين 6 باحثين و 4 باحثات .

(1) ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها ؟

(2) ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها في الحالات التالية .

a. الأعضاء الأربعة المختارين باحثات .

b. من بين الأعضاء المختارين توجد باحثة واحدة فقط .

c. من بين الأعضاء المختارين توجد على الأقل باحثة .

d. من بين الأعضاء المختارين توجد على الأكثر باحثة .

(3) ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها إذا كانت هذه اللجنة تضم رئيسا ونائبا و كاتبين .

حل مختصر :

$$1) R_1 = C_{10}^4 = 210 / 2) R_{2a} = C_4^4 = 1 / R_{2b} = C_4^1 \times C_6^3 = 80 / R_{2c} = 195 / R_{2d} = C_4^4 + C_4^3 \times C_6^1 + C_4^2 \times C_6^2 = 115 / 3) R_3 = A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$$

## (2) الاحتمالات

### (1) مصطلحات :

كل تجربة تقبل أكثر من نتيجة	تجربة عشوائية
هي مجموعة الإمكانات الممكنة لتجربة عشوائية	$\Omega$ مجموعة شاملة
A جزءا من المجموعة الشاملة $\Omega$	حدث A
حدث تتضمن عنصر واحد من $\Omega$	حدث ابتدائي
إذا تحقق الحدثان B و A في أن واحد	الحدث $A \cap B$ تتحقق
إذا تحقق الحدثان B و A أو مع بعض	الحدث $A \cup B$ تتحقق
هي الحدث $\bar{A}$ بحيث $A \cap \bar{A} = \emptyset$ و $(A \cup \bar{A} = \Omega)$	الحدث المعاكسة ل A
$A \cap B = \emptyset$	A و B حدثان غير متجانسة

### (2) نتائج عملية معينة :

جميع النتائج الممكنة في تجريبه عشوائية معينة، هي مجموع الإمكانات و تدعا أيضا المجموعة الشاملة نرسم له برمز :  $\Omega = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$  ،العناصر

$x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$  تدعا حوادث ، العنصر  $x_i$  حادثة أولية . العنصر  $\emptyset$

حادثة مستحيل ، العنصر  $\Omega$  حادثة أكيدة . الحادثة  $\bar{A}$  هي الحادثة المعاكسة للحادثة A .

### (3) الفضاءات الاحتمالية :

لتكن  $\Omega$  مجموعة منتهية ، نسمي احتمالا على  $\Omega$  كل دالة معرفة على مجموعة اجزاء المجموعة  $\Omega$  والتي تأخذ قيمها في المجال  $[0;1]$  و تحقق الشرطين التاليين

أ.  $p(\Omega) = 1$

ب. إذا كان  $A \cap B = \emptyset$  فإن  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

(4) خواص :

(1)  $p(\emptyset) = 0$  (2)  $0 \leq p(A) \leq 1$  (3) إذا  $A \subset B$  كان  $p(A) \leq p(B)$

(4)  $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

(5) مهما كان الحدثان A و B من :

$(p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B))$

(6)  $p(\overline{A \cap B}) = p(\bar{A} \cap \bar{B})$  (7)  $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

(7) إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية

على  $\Omega$  فإنه لكل حادث A من  $\Omega$  فإن:  $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

(8) لتكن A و B حادثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث  $P(A) \neq 0$  ،

الاحتمال الشرطي لوقع الحادثة B علما ان الحادث A قد وقع هو العدد

الحقيقي الموجب :  $P_A(B) = P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

تمرين 04: يحتوي كيس على 10 قرصات مرقمة من 1 إلى 10 . نسحب من الكيس 3 قرصات في أن واحد. (السحبات متساوية الاحتمال) .

(1) أحسب عدد الحالات السحاب الممكنة.

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

الانحراف

### تمرين 05:

يحتوي كيس على 10 كرات متماثلة لا نفرق بينهما عند اللمس، 3 حمراء، 3 خضراء، 4 بيضاء.

I. انسحب من الكيس ثلاث كرات في أن واحد ،

(1) ما هو عدد السحب الممكنة ؟

(2) ما هو احتمال الحصول على :

( $\alpha$  نفس اللون ؟  $\beta$  متخالفة في الألوان متنى متنى ؟  $\gamma$  كرة بيضاء على الأقل ؟

II. نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كرات عدد الكرات البيضاء المسحوبة .

1- عين قانون الاحتمال المتغير العشوائي ؟

2- احسب الآمال الرياضي ؟

3- احسب التباين ؟

4- احسب الانحراف المعياري ؟

### تمرين 06:

يحتوي كيس على 05 كرات متماثلة لا نفرق بينهما عند اللمس ، 3 تحمل 2، 2، 2. و كرتين تحمل الرقم 2، -2.

I. انسحب من الكيس كرتين على التوالي. ،

(3) ما هو عدد السحب الممكنة ؟

(4) ما هو احتمال الحصول على :

( $\alpha$  نفس الرقم ؟

- (2) أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها زوجية .  
 (3) أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها عدد أولية.  
 (4) أحسب احتمال سحب 3 قريصات رقم كل واحد منهما عدد غير أولي .  
 (5) أحسب احتمال سحب 3 قريصات رقم أحدها على الأقل رقم أولى.

حل مختصر :

$$1) C_{10}^3 = 120 / 2) P_2 = \frac{C_5^3}{120} = \frac{10}{120} / 3) P_3 = \frac{C_4^3}{120} = \frac{4}{120} / 4) \\ P_4 = 1 - P_3 = 1 - \frac{4}{120} / 5) P_5 = \frac{C_4^1 \times C_6^2 + C_4^2 \times C_6^1 + C_4^3 \times C_6^0}{120} = \frac{100}{120}$$

### قانون احتمال متغير عشوائي :

ليكن  $X$  متغيرا عشوائيا على  $\Omega$  كون (مجموعة) إمكانيات تجريبي عشوائية .

لتحديد قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  نتبع المرحلتين التاليتين :

ت. تحديد  $X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$  مجموعة القيم التي يأخذها

المتغير  $X$

ث. نحسب الاحتمال  $(X = x_i)$  لكل من المجموعة .

### الآمل الرياضي ، التباين ، الانحراف المعياري

$X$  متغيرا عشوائيا على  $\Omega$  و  $P$  احتمال على  $\Omega$

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	.....	$x_n$
$P(X = x_i)$	$P_1$	$P_2$	$P_3$		$P_n$

$E(X) = (x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + \dots + x_n P_n)$	الام الرياضي
$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i^2 P_i) - (E(X))^2$	التباين

( $\beta$ ) متخالفة في الأرقام ؟

II. نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل عملية سحب كراتين مجموع الرقمين على الكرات المسحوبة .

5- عين قانون الاحتمال المتغير العشوائي ؟

6- احسب الآمال الرياضي ؟

7- احسب التباين ؟

8- احسب الانحراف المعياري ؟

تمرين 07: صندوق يحوي 5 كرات غير متميزة في اللبس مرقمة من 1 إلى 5 ، نسحب منه على التوالي كرتين

دون إرجاع الكرة المسحوبة حتى نهاية التجربة ، و ليكن  $X$  المتغير العشوائي أكبر قيمة في السحبتين .

(1) عين عدد طرق سحب كرتين بهذه الصيغة .

(2) عين مجموعة القيم الممكنة لـ  $X$  .

(3) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  .

(4) احسب الآمال الرياضي ؟

(5) احسب التباين و الانحراف المعياري ؟

تمرين 08: حجر نرد غير مزيف أوجهه تحمل الأرقام : 3;2;2;1;1;0

يرميه لاعب مرتين متتابتين و يسجل الرقم الظاهر على الوجه العلوي في كل رمية .

يريد اللاعب أن يكون ربحه هو مجموع الرقمين المحصل عليهما و الذي نرمز له بالرمز  $X$  .

(1) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  .

(2) أحسب المتوسط الحسابي  $E(X)$  للتوزيع الناتجة .

(3) احسب التباين و الانحراف المعياري ؟

تمرين 09: لدينا خمس كرات سوداء مرقمة كما يلي : 1,2,3,4,5 و أربع كرات بيضاء مرقمة كما يلي : 6,7,8,9.

(1) نضع هذه الكرات في كيس واحد و نسحب عشوائيا كراتين في أن واحد من هذ الكيس . احسب احتمال سحب :

A. كرتين تحملان رقمين فرديين .

B. كراتين تحملان رقمين من مضاعفات 3

C. كراتين تحملان رقمين فرديين ومن مضاعفات 3

(2) نسحب الآن كرتين تحملان رقمين فرديين . ما احتمال أن تحملا هاتين الكرتين رقمين من مضاعفات 3؟

(3) نضع الآن الكرات السود في كيس و الكرات البيضاء في كيس آخر . نسحب عشوائيا كرة من كل كيس . احسب احتمال أن يكون مجموع ترقيم الكراتين يساوي 9.

$$\text{حل مختصر : } R_{1A} = \frac{10}{36} / R_{1B} = \frac{3}{36} / R_{1C} = \frac{1}{36} / R_2 = \frac{1}{10} / R_3 = \frac{3}{20} /$$

### شجرة الاحتمالات

التمرين 10: تحتوي علبة على 10 قريصات لا يمكن التفريق بينها باللمس ، من بينها 6 حمراء اللون تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8 والبقية بيضاء اللون تحمل الأرقام 1 ، 3 ، 5 ، 5 .

- نسحب 3 قريصات من هذه العلبة واحدة تلو الأخرى دون إرجاع المطلوب :

أ- شكل شجرة الاحتمال المناسبة لذلك .

ب- احتمال الحصول على 3 قريصات من نفس اللون .

ت- احتمال الحصول على 3 قريصات بلونين مختلفين .

التمرين 10: الجدول التالي يعطي توزيع 500 تلميذ في احد الثانويات.

التلميذ	ذكر	انثى
يملك هاتف نقال	60	240
لا يملك هاتف نقال	120	80

نختار عشوائيا تلميذ من الثانوية و نسمي الحوادث :

$H$  الحديثة التلميذ المختار ذكر و  $F$  الحديثة التلميذ المختار أنثى .

$S$  الحديثة: التلميذ يملك هاتف نقالا و  $\bar{S}$  الحديثة: التلميذ لا يملك هاتف نقالا.

(1) شكل شجرة الاحتمال المناسبة لهذه التجربة .

(2) احسب احتمال الحوادث التالية:

(أ) التلميذ المختار أنثى ويملك هاتف نقالا.

(ب) التلميذ المختار لا يملك هاتف نقالا.

(3) نفرض ان التلميذ المختار لا يملك هاتف نقالا ، ما هو احتمال ان يكون هذا التلميذ ذكر؟

**التمرين 11:** صندوق  $A$  يحوي 4 كريات حمراء و 6 كريات سوداء غير متمايزة في اللمس و صندوق  $B$  يحوي على كرية حمراء و 9 كريات سوداء غير متمايزة في اللمس . (متساوية الاحتمال)

I. يرمي لاعب زهرة نرد غير مزيفة و مرقمة من 1 إلى 6 مرة واحدة .

- إذا تحصل لاعب على رقم 1 فيسحب كرة واحدة من الصندوق  $A$  .

- إذا لم يتحصل لاعب على رقم 1 فيسحب كرة واحدة من الصندوق  $B$  .

(1) شكل شجرة الاحتمالات لهذه التجربة

(2) نسمي  $R$  الحديثة : الحصول على كرية حمراء بين أن :  $P(R) = 0.15$

(3) تحصل اللاعب على كرية حمراء بين أن احتمال أن تكون من الصندوق

$A$  أكبر أو تساوي من احتمال أن تكون من الصندوق  $B$  .

II. اللاعب يكرر هذه اللعبة مرتان (مستقلة عن بعضها بمعنى يعيد الصندوق إلى

و وضعيته الأولى بعد كل سحب ) . ليكن  $x$  عدد طبيعي غير معدوم ، يتحصل

اللاعب على النقطة  $x$  عن كل كرية حمراء ويخسر (2-) نقطة عن كل كرية

سوداء.

(1) عين قيم المتغير العشوائي  $X$  .

(2) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  بدلالة  $x$  .

(3) احسب الآمال الرياضي بدلالة  $x$  ؟

(4) ما هي أصغر قيمة ل  $x$  حتى تكون اللعبة مربحة ؟

**تمرين 12:** صندوق  $U_A$  يحتوي على خمسة كرات ، 3 من بينه صفرا و كرتين زرق . صندوق  $U_B$  يحتوي على ستة كرات من بينه كرتين حمرا ، ثلث كرات زرق و كرات صفرا.

نسحب عشوائيا كرات من صندوق  $U_A$  ثم نسحب كرات ثانية من الصندوق  $U_B$

(1) أنشئ شجرة الاحتمالات.

(2) احسب احتمال سحب كرتين حمرا.

(3) احسب احتمال سحب كرتين زرق.

(4) احسب احتمال سحب كرتين مختلفتين في ألون.

(5) ما احتمال سحب كرات حمرا علما أن الكرات ألون صفرا.

**تمرين 13:** يحتوي كيس على 10 كرات متماثلة لا نفرق بينهما عند اللمس ، 3 حمراء ، 3 خضراء ، 4 بيضاء.

I. نسحب من الكيس ثلاث كرات في أن واحد ،

(5) ما هو عدد السحب الممكنة ؟

(6) ما هو احتمال الحصول على :

$\alpha$  ( نفس اللون ؟  $\beta$  ) متخالفة في الألوان متنى متنى ؟  $\gamma$  ) كرة بيضاء على الأقل ؟

II. نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كرات عدد

الكرات البيضاء المسحوبة .

9- عين قانون الاحتمال المتغير العشوائي ؟

10- احسب الآمال الرياضي ؟

11- احسب التباين ؟

12- احسب الانحراف المعياري ؟

(3) نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يدل على العدد نفسه إن كان فردي وعلى القيمة  $n$  إن كان العدد زوجي.

(أ) عين بدلالة  $n$  كل ما يلي

- عين مجموعة قيم المتغير العشوائي  $X$  ؟
- عين قانون الاحتمال؟
- احسب التباين ؟
- الانحراف المعياري ؟

(ت) من اجل  $E(X) = \frac{34}{15}$  احسب الانحراف المعياري في هذه الحالة.



انواع زهرة نرد

**تمرين 14:** نرمي حجرة نرد متجانس الأوجه تحمل الأرقام 1,2,3,4,5,6 احتمال ظهورها هي على الترتيب  $P_6, P_5, P_4, P_3, P_2, P_1$  وتشكل متتالية حسابية حدها الأول هو

$$\frac{1}{12}$$

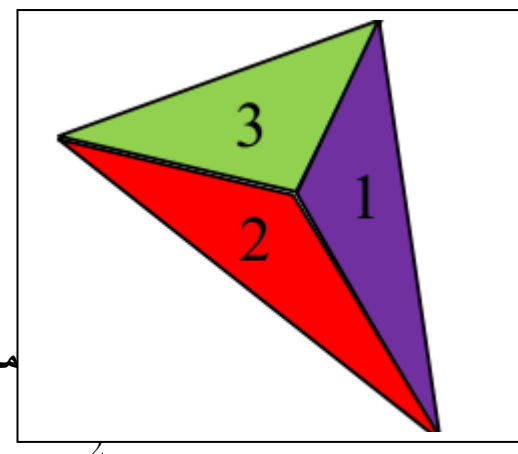
(1) احسب كل من  $P_6, P_5, P_4, P_3, P_2, P_1$ .

(2) إذا كانت  $A$  الحادثة الحصول على عدد أولي وكانت  $B$  الحادثة الحصول على عدد فردي ، هل  $A$  و  $B$  مستقلان .

(3) نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يدل على العدد نفسه إن كان فردي وعلى نصف العدد إن كان زوجي.

- عين مجموعة قيم المتغير العشوائي  $X$  ؟
- عين قانون الاحتمال؟
- احسب التباين ؟
- الانحراف المعياري ؟

**تمرين 14:**



مال ظهورها هي على

نرمي حجرة نرد

الترتيب  $P_3, P_2, P_1$

(1) احسب كل من  $P_4, P_3, P_2, P_1$ .

(2) إذا حصلنا على عدد فردي احسب احتمال أن يكون هذا العدد أولي .