



الميسر



في الرياضيات

Hard equation



3
AS

ملخصات هامة لجميع الدروس
حلول تمارين ومسائل الكتاب
المدرسي بالتفصيل

الجزء الأول

الشعب:
علوم تجريبية
رياضيات



وفق التعميم الصادر من وزارة التربية الوطنية

El Monamia

الملكية



المحور الأول

النهايات والاستمرارية

Hard Equation

(2) النهاية الغير المنتهية لدالة عند $+\infty$:

تعريف: لتكن f دالة لها نهاية $+\infty$ عند $+\infty$ يعني من أجل كل عدد حقيقي $A > 0$ لدينا $f(x) > A$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

نعرف بنفس الكيفية النهاية عند $-\infty$

التفسير الهندسي:

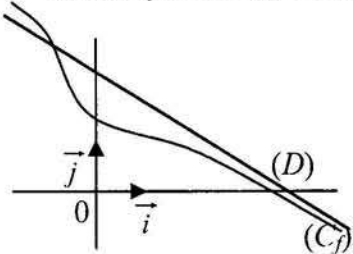
إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ وإذا كان $f(x)$

يمكننا كتابته على الشكل

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = a$ مع $f(x) = ax + b + h(x)$

فإن المستقيم (D) ذي المعادلة $y = ax + b$

مستقيما مقاربا مائلا لـ (C_f) بجوار $+\infty$.



II - نهاية دالة عند a

(1) النهاية المنتهية لدالة عند a :

ليكن a عددا حقيقيا

I - نهاية دالة عند اللانهاية

(1) النهاية المنتهية لدالة عند $+\infty$:

لتكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $[a, +\infty[$ و (C_f) منحناها البياني.

تعريف: الدالة f تؤول إلى l (عددا حقيقيا) لما x تؤول إلى $+\infty$ يعني كل مجال مفتوح يشمل l يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

ونرمز $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

- نعرف بنفس الكيفية النهاية عند $-\infty$

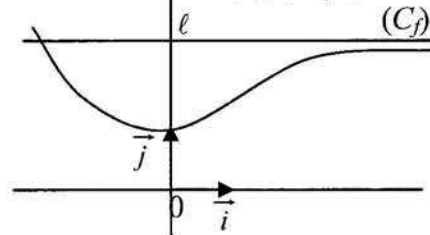
لدالة f معرفة على مجال من الشكل $]-\infty, b]$.

التفسير الهندسي:

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ فإن المستقيم ذي

المعادلة $y = l$ مستقيما مقاربا أفقيا

للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$



Hard Equation ☆ الفهرس ☆ Hard Equation

الصفحة

الدرس

05

المحور الأول: النهايات والاستمرارية

57

المحور الثاني: الاشتقاقية

124

المحور الثالث: الدوال الأسية واللوغاريتمية

185

المحور الرابع: التزايد المقارن

234

المحور الخامس: الدوال الأصلية

262

المحور السادس: الحساب التكاملي

310

المحور السابع: مجموعة الاعداد المركبة

415

المحور الثامن: المتتاليات العددية



لأعداد l و α أعداد حقيقية

$\lim f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha > 0$	$\lim \alpha f$	αl	$+\infty$
$\alpha < 0$	$\lim \alpha f$	αl	$-\infty$

خواص:

- كل الدوال المحصل عليها بالعمليات على دوال ماثوفة أو بتركيبها مستمرة على مجال من مجموعة تعريفها.

- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

- الدوال كثيرات الحدود، \sin ، \cos مستمرة على \mathbb{R}

- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

العمليات على النهايات

(1) نهاية مجموع دالتين أو مجموع متتاليتين:

لأعداد الحقيقية l و l'

$\lim(f(x)+g(x))$	$\lim g(x)$	$\lim f(x)$
$l+l'$	l'	l
∞	∞	l
∞	l'	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
ح ع ت	$-\infty$	$+\infty$
ح ع ت	$+\infty$	$-\infty$

ح ع ت يعني حالة عدم تعيين

(2) نهاية جداء دالة بعدد حقيقي α غير معدوم:

لأعداد l و l' أعداد حقيقية

$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$	$\lim g(x)$	$\lim f(x)$
$\frac{l}{l'}$	$l' \neq 0$	l
∞	0	$l \neq 0$
0	$l' \neq 0$	0
0	∞	l
∞	0	∞
ح ع ت	$-\infty$	$+\infty$
ح ع ت	$+\infty$	$-\infty$
ح ع ت	0	0

(4) نهاية حاصل قسمة دالتين أو حاصل قسمة متتاليتين:

استمرارية دالة

تعريف:

- لتكن f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد الحقيقي a

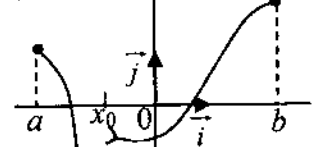
الدالة f مستمرة عند a يعني $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ أو

الدالة f مستمرة عند a يعني $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$

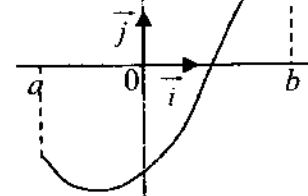
- الدالة f مستمرة على المجال I يعني الدالة f مستمرة عند كل نقطة من I .

بيانيا تفسر أنه يمكننا رسم بيان الدالة f على المجال I بدون رفع اليد أو القلم من الورقة.

الدالة f غير مستمرة عند x_0 على المجال $[a, b]$



الدالة f مستمرة على المجال $[a, b]$



تعريف: دالة f تقبل نهاية l (عدد حقيقي) عند a يعني كل مجال مفتوح يشمل l يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من a .

ونرمز: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

(2) النهاية الغير المنتهية لدالة عند a :
ليكن a عددا حقيقيا

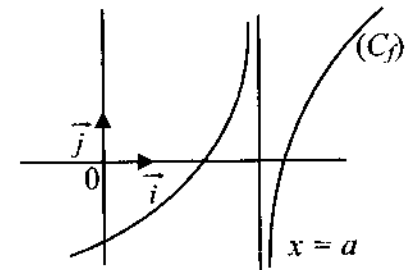
تعريف: دالة f تقبل كنهاية $+\infty$ عند $A > 0$ يعني من أجل كل عدد حقيقي $A > 0$ كل مجال من الشكل $[A, +\infty[$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من a

ونرمز: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

نعرف بنفس الكيفية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$

التفسير الهندسي:

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$ فإن المستقيم ذي المعادلة $x = a$ مستقيما مقاربا عموديا (شاقوليا) للمنحنى (C_f)



(5) نهاية مركبة دالتين:

إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ و $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$

Hard Equation

ملاحظة:

يمكننا تمديد هذه النظرية لدالة معرفة على مجال $[a, b[$ ، $]a, b[$ أو $]a, b[$ ، نحدد عندئذ صور هذه الحالات لحساب النهايات عند حدود هذه المجالات.

نظرية القيم المتوسطة

(1) نظرية القيم المتوسطة:

لتكن الدالة f معرفة ومستمرة على مجال I و a, b عددين حقيقيين من I من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = k$

نص آخر:

إذا كانت الدالة f معرفة ومستمرة على مجال I ، صورة المجال I بالدالة f هو مجال (2) نظرية القيم المتوسطة:

إذا كانت الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a, b]$ ، إذا من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا c في المجال $[a, b]$

ملاحظة: تصرف يعني (Comportement)

العلاقات التي تربط الدوال في جوار a	تصرف الدوال g و h	تصرف الدالة f
$f(x) \leq g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$
$f(x) \geq g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$
$ f(x) - \ell \leq g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$
$f(x) \leq g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x);$ $\ell \leq \ell'$
$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ (Théorème des gendarmes)

المجالات - الصور

نرمز J بالمجال الصورة بالدالة f للمجال I علما أن f مستمرة على I أي: $J = f(I)$

I	f متزايدة تماما على I	f متناقصة تماما على I
$[a, b]$	$J = [f(a), f(b)]$	$J = [f(b), f(a)]$
$]a, b[$	$J =]f(a), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$	$J =]\lim_{x \rightarrow b} f(x), f(a)[$
$]a, b]$	$J =]\lim_{x \rightarrow a} f(x), f(b)[$	$J =]f(b), \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$
$]a, b[$	$J =]\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$	$J =]\lim_{x \rightarrow b} f(x), \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$

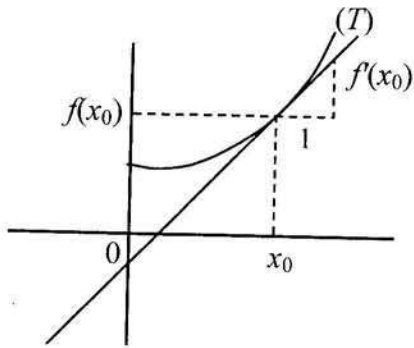
نظريات المقارنة:

النتائج التالية تبقى صحيحة إذا كانت الدوال هم متتاليات. إذا عرفنا تصرف بعض الدوال يمكننا استنتاج بالمقارنة تصرف دوال أخرى. في الجدول أدناه الترميز a تمثل عدد $+\infty$ أو $-\infty$

الاشتقاقية

Hard equation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



3. المشتقات المتتالية

تعريف: f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال I من \mathbb{R}

إذا قبلت الدالة f' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة (f') تسمى المشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بالرمز f'' إذا قبلت الدالة f'' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة (f'') تسمى المشتقة الثالثة للدالة f ونرمز لها بالرمز f''' تسمى الدوال $f', f'', f''', \dots, f^{(n)}$ المشتقات المتتالية للدالة f

الاشتقاقية

1. العدد المشتق - الدالة المشتقة

تعريف: f دالة معرفة على مجال I من \mathbb{R} ، و a و $(a+h)$ عدنان حقيقيان من I ، $h \neq 0$ ، نقول أن f تقبل الاشتقاق عند a إذا قبلت النسبة $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ نهاية محدودة لما h يؤول إلى 0 نسمي هذه النهاية العدد المشتق للدالة f عند a ونرمز لها بالرمز $f'(a)$

ملاحظة: إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I ونسمي الدالة $f': x \rightarrow f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f

2. مماس منحنى دالة

تعريف وخاصية: f دالة معرفة على مجال I من \mathbb{R} وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم (o, \vec{i}, \vec{j}) إذا قبلت f الاشتقاق عند x_0 فإن (C) يقبل عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$ مماسا (T) معامل توجيهه $f'(x_0)$ ومعادلته:

$$\text{معادلة } (\Gamma) \text{ هي } y^2 - 2xy + 1 = 0 \text{ مع } x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

(4) ليكن الشعاع $\vec{\mu}$ من المستوى حيث $\vec{\mu} = \vec{i} + 2\vec{j}$

ولتكن $M(x, y)$ في المعلم (o, \vec{i}, \vec{j})

و $M(x', y')$ في المعلم $(o, \vec{i}, \vec{\mu})$

ومنه لدينا $\vec{OM} = x'\vec{i} + y'\vec{\mu}$

و $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

وبالتالي $x'\vec{i} + y'\vec{\mu} = x\vec{i} + y\vec{j}$

ومنه $x'\vec{i} + y'(\vec{i} + 2\vec{j}) = x\vec{i} + y\vec{j}$

ومنه $(x' + y')\vec{i} + 2y'\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$\begin{cases} x = x' + y' \\ y = 2y' \end{cases} \text{ وعليه}$$

(ب) معادلة (Γ) في المعلم $(o, \vec{i}, \vec{\mu})$ هي

$$(2y')^2 - 2(x' + y')(2y') + 1 = 0$$

ومنه معادلة (Γ) في المعلم $(o, \vec{i}, \vec{\mu})$ هي

$$y = \frac{1}{4x} \text{ أي } 1 - 4xy = 0: (\Gamma)$$

مع $x \neq 0$

(ج) طبيعة (Γ) هو قطع زائد معادلته

$$y = \frac{1}{4x}$$

اشتقاق دالة مركبة

1. مشتقة الدالة $(\nu\mu)$

مبرهنة: إذا قبلت الدالة μ الاشتقاق على مجال I من \mathbb{R} وقابلت الدالة ν الاشتقاق على $\mu(I)$ فإن الدالة $(\nu\mu)$ تقبل الاشتقاق على

I ولدينا من أجل كل x من I :

$$(\nu\mu)'(x) = \mu'(x) \times \nu'[\mu(x)]$$

تطبيقات:

♦ مشتقة الدالة: $x \mapsto \sqrt{\mu(x)}$

إذا كانت الدالة μ قابلة للاشتقاق على

مجال I من \mathbb{R} وكانت موجبة تماما على I

فإن الدالة $\sqrt{\mu}$ تقبل للاشتقاق على I ولدينا

$$(\sqrt{\mu})' = \frac{\mu'}{2\sqrt{\mu}}$$

♦ مشتقة الدالة: $x \mapsto [\mu(x)]^n$ (n عدد

طبيعي يحقق $n \geq 2$)

إذا كانت الدالة μ قابلة للاشتقاق على

مجال I من \mathbb{R} فإن الدالة μ^n تقبل للاشتقاق

على I ولدينا: $(\mu^n)' = n\mu^{n-1}\mu'$

♦ مشتقة الدالة: $x \mapsto \frac{1}{[\mu(x)]^n}$ (n عدد

طبيعي يحقق $n \geq 1$)

إذا كانت الدالة μ قابلة للاشتقاق على

مجال I من \mathbb{R} ولا تنعدم على I فإن الدالة

$\frac{1}{\mu^n}$ تقبل للاشتقاق على I ولدينا:

التي تنعدم الدالة f من أجلها فإن الدالة f متزايدة تماما على I

♦ إذا كان من أجل كل x من I : $f(x) < 0$

فإن هذا ممكن من أجل عدد محدود من القيم

التي تنعدم الدالة f من أجلها فإن الدالة f

متناقصة تماما على I

♦ إذا كان من أجل كل x من I : $f(x) = 0$

فإن الدالة f ثابتة على I

2. القيم الحدية المحلية

تعريف: f دالة معرفة على مجال I من \mathbb{R} و

x_0 عدد حقيقي من I

♦ نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى

للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J

محتوى في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x

من J : $f(x) \leq f(x_0)$

♦ نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى

للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J

محتوى في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x

من J : $f(x) \geq f(x_0)$

♦ نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لـ f يعني

أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى

مبرهنة: f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على

مجال مفتوح I من \mathbb{R} و x_0 عدد حقيقي من I

إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند x_0 مغيرة

إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f

المشتقة	الدالة
$\mu' + \nu'$	$\mu + \nu$
$k\mu'$	$k\mu$
$\mu'\nu + \nu'\mu$	$\mu \times \nu$
$\frac{-\nu'}{\nu^2}$	$\frac{1}{\nu}$
$\frac{\mu'\nu - \nu'\mu}{\nu^2}$	$\frac{\mu}{\nu}$

(الدالة ν لا تنعدم على I)

نتائج: ♦ الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

♦ الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال محتوي في مجموعة تعريفها

3. مشتقة الدالة $\mu(ax+b)$

مبرهنة: a و b عدنان حقيقيان مع $a \neq 0$

μ دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من \mathbb{R} .

ليكن J المجال المكون من الأعداد الحقيقية x

حيث $(ax+b)$ ينتمي إلى I

الدالة $f: x \mapsto \mu(ax+b)$ قابلة للاشتقاق

على I ولدينا $f'(x) = a\mu'(ax+b)$

اتجاه تغير دالة

1. المشتقة واتجاه تغير دالة

مبرهنة: f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من \mathbb{R}

♦ إذا كان من أجل كل x من I : $f'(x) > 0$

فإن f متزايدة على I

4. الاشتقاق والاستمرارية

خاصية: إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال I فإن f مستمرة على هذا المجال.

ملاحظة: عكس هذه الخاصية ليس دائما صحيحا

المشتقات والعمليات

1. مشتقات دوال مألوفة

مجالات قابلية الاشتقاق	$f(x)$	$f'(x)$
\mathbb{R}	C (حيث C عدد حقيقي ثابت)	0
\mathbb{R}	x	1
\mathbb{R}	x^n ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$)	$n x^{n-1}$
$]-\infty, 0[$ أو $]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$]0, +\infty[$	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
\mathbb{R}	$\cos x$	$-\sin x$
\mathbb{R}	$\sin x$	$\cos x$

2. المشتقات والعمليات على الدوال

μ و ν دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال

I من \mathbb{R} و k عدد حقيقي

$$\left(\frac{1}{\mu'}\right)' = -\frac{n\mu'}{\mu'^2}$$

يستعمل هذا الترميز في العلوم الفيزيائية

$$f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}, f' = \frac{df}{dx}$$

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$$

2. طريقة أولر

تسمح طريقة أولر بإنشاء تمثيلات بيانية تقريبية لدالة f معرفة بـ f' و $y_0 = f(x_0)$ ترتكز هذه الطريقة على التقريب التآلفي للدالة f

بحيث من أجل h قريب من 0 لدينا

$$f(x_0 + h) \cong f(x_0) + h f'(x_0)$$

انطلاقا من النقطة $A(x_0, y_0)$ بحيث

$$f'(x_0) \neq 0 \text{ ننشئ النقطة } A_1(x_1, y_1) \text{ ذات}$$

الفاصلة $x_1 = x_0 + h$ والتي تنتمي إلى

المستقيم الذي معامل توجيهه $f'(x_0)$ والمار من

$$A_0 \text{ وبالتالي } y_1 = f(x_0) + h f'(x_0) \text{ وبما أن}$$

$$f(x_0 + h) \cong f(x_0) + h f'(x_0) \text{ من أجل } h$$

قريب من 0 فإن النقطة $A_1(x_1, y_1)$ قريبة من

(C) منحنى الدالة f

بنفس الطريقة يمكن إنشاء انطلاقا من A_1

النقطة $A_2(x_2, y_2) = f(x_1) + h f'(x_1)$ وهكذا

على التوالي يمكن إنشاء النقط $A_n(x_n, y_n)$

$$\text{حيث } x_n = x_{n-1} + h$$

$$\text{و } y_n = f(x_{n-1}) + h f'(x_{n-1}) \text{ مع } n \geq 1$$

يربط النقط A_0, A_1, A_2, \dots نحصل على

تمثيل بياني تقريبي لـ f مرتبط باختيار h

الذي يسمى الخطوة ونحصل على أكثر دقة

كلما كان h أقرب من 0

التقريب التآلفي - طريقة أولر

1. التقريب التآلفي

f دالة معرفة على مجال I مفتوح من \mathbb{R}

إذا قبلت f الاشتقاق عند x من I فإنه توجد

دالة ε بحيث من كل عدد حقيقي h حيث

$(x + h)$ ينتمي إلى I لدينا:

$$f(x + h) = f(x) + h f'(x) + h \varepsilon(h)$$

$$\text{مع } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

من أجل h قريب من 0 نكتب عندئذ:

$$f(x + h) \cong f(x) + h f'(x)$$

نسمي $f(x) + h f'(x)$ التقريب التآلفي لـ

$f(x + h)$ من أجل h قريب من 0 المرفق بالدالة f

الكتابة التفاضلية

$$\Delta x = (x + h) - x$$

$$\text{بوضع } \Delta y = f(x + h) - f(x) \text{ نكتب المساواة}$$

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \Delta x \varepsilon(\Delta x) \text{ ومنه التقريب}$$

$$\Delta y \cong f'(x) \Delta x \text{ عندما يكون } \Delta x \text{ قريبا من 0}$$

نصطلح الصياغة التفاضلية التالية:

$$dy = f'(x) dx \text{ أو } f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

المحور الثالث

الدوال الأسية واللوغاريتمية Hard equation

تعريف الدالة الأسية

مبرهنة: توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} وتحقق $f' = f$ و $f(0) = 1$
هذه الدالة تسمى الدالة الأسية ونرمز لها بـ:
 Exp

نتائج:

$$Exp(0) = 1$$

الدالة Exp قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}$:
 $[Exp(x)]' = Exp(x)$
الدالة Exp موجبة تماما على \mathbb{R}

الخاصية الأساسية: من أجل كل x و y من \mathbb{R} :
 $Exp(x+y) = Exp(x) \times Exp(y)$

(1) الترميز: e^x

تعريف: العدد الحقيقي $Exp(1)$ يرمز له بـ e
أي $Exp(1) = e$

(2) خواص:

العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة Exp قريب من 2,718

من أجل كل عدد حقيقي: $Exp(x) = e^x$

نتائج: من أجل كل عددين حقيقيين a و b :

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}, e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$e^a = e^{a \cdot 1} = (e^1)^a = e^a$$

دراسة الدالة: $x \mapsto e^x$

الدالة $x \mapsto e^x$ معرفة، مستمرة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}$:
 $(e^x)' = e^x$ وهي دالة متزايدة تماما على \mathbb{R}

(1) النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

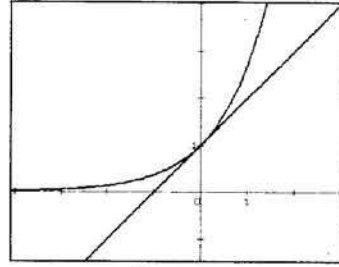
بما أن الدالة الأسية قابلة للاشتقاق عند 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

جدول تغيرات:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Exp	0	1	e	$+\infty$

التمثيل البياني:



من أجل h قريب جدا من 0 لدينا:

$$e^h \approx 1 + h$$

محور الفواصل هو مستقيم مقارب أفقي للمنحنى الممثل للدالة الأسية عند $-\infty$

معادلات ومتراجحات:

خواص:

من أجل كل عدد حقيقي k موجب تماما المعادلة $e^x = k$ تقبل حلا وحيدا \mathbb{R}

من أجل كل عددين حقيقيين x و y :

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

$$e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$$

الترتيب المقارن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, n > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

الدالة e^x :

(1) الدالة المشتقة:

مبرهنة: لتكن الدالة u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I . الدالة المركبة ($Exp \circ u$) نرمز

لها بـ $e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ومن أجل كل

$$(e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)} : x \in I$$

(2) الدالة الأصلية:

مبرهنة: لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على

مجال I . دالة أصلية للدالة $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

هي الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$

الدالة اللوغاريتمية

تعريف 1: ليكن x عدد حقيقي موجب تماما.

يوجد عدد حقيقي وحيد y بحيث $e^y = x$ هذا

العدد الحقيقي يسمى اللوغاريتم النيبيري لـ

x ويرمز له بـ $Ln x$ نسمي الدالة اللوغاريتمية

النيبيرية الدالة التي نرمز لها بـ Ln التي من

أجل كل x من المجال $]0, +\infty[$ تفرق العدد

الحقيقي $Ln x$

تعريف 2: الدالة اللوغاريتمية النيبيرية هي

الدالة الأصلية للدالة المقلوب على $]0, +\infty[$

$$Ln x = \int \frac{1}{t} dt$$
 والتي تنعدم عند 1 أي

نتائج:

من أجل كل عدد حقيقي: $x > 0$ ومن

أجل كل عدد حقيقي y :

$$y = Ln x \Leftrightarrow x = e^y$$

من أجل كل $x > 0$: $e^{Ln x} = x$

ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $Ln e^x = x$

خاصية أساسية: من أجل كل x و y موجبان

$$Ln(x \times y) = Ln x + Ln y$$
 تماما:

الخواص الجبرية للدالة Ln:

قواعد: من أجل كل عددين حقيقيين $a > 0$ و $b > 0$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{Ln } a^n = n \text{Ln } a \quad \diamond$$

$$\text{Ln} \left(\frac{1}{b} \right) = -\text{Ln } b \quad \diamond$$

$$\text{Ln} \left(\frac{a}{b} \right) = \text{Ln } a - \text{Ln } b \quad \diamond$$

$$\text{Ln}(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \text{Ln } a \quad \diamond$$

$$\text{Ln } a^n = -n \text{Ln } a \quad \diamond$$

دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية:

الدالة Ln معرفة، مستمرة وقابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ومن أجل كل عدد حقيقي

$$(\text{Ln } x)' = \frac{1}{x} \quad : x > 0$$

الدالة Ln متزايدة تماما على المجال $]0, +\infty[$

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Ln } x = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Ln } x = +\infty$$

♦ بما أن الدالة Ln قابلة للاشتقاق عند 1

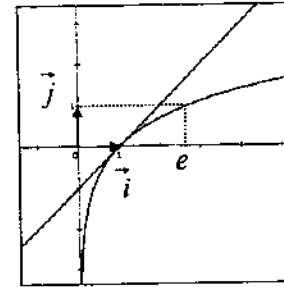
$$\text{فإن: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Ln } x}{x-1} = 1 \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}(x+1)}{x} = 1$$

جدول تغيرات:

x	0	1	e	$+\infty$
Ln	$-\infty$	0	1	$+\infty$

التمثيل البياني:

المنحنى البياني الممثل للدالة Ln يقبل محور الترتيب مستقيم مقارب عمودي (شاقولي) من أجل h قريب من الصفر أي $h \approx 0$ لدينا $\text{Ln}(1+h) \approx h$



معادلات ومترجمات:

خاصية: من أجل كل عددين حقيقيين a و b موجبين تماما:

$$\text{Ln } a = \text{Ln } b \quad \text{يكافئ} \quad a = b$$

$$\text{Ln } a < \text{Ln } b \quad \text{يكافئ} \quad a < b$$

التزايد المقارن:

$$\text{خواص: } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \text{Ln } x = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Ln } x}{x} = 0$$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \text{Ln } x = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Ln } x}{x^n} = 0$$

الدالة (Lnou):

المشتقة: مبرهنة

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق وموجب تماما على مجال I فإن الدالة (Lnou) يرمز لها بـ

Lnou قابلة للاشتقاق على I ومن أجل كل

$$(\text{Lnou})' = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad : x \in I$$

$$(\text{Lnou})' = (\text{Ln } u)' = \frac{u'}{u} \quad \text{أي}$$

الدالة الأصلية:

مبرهنة: لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على

مجال I ولا تنعدم على المجال I

فإن دالة أصلية على المجال I للدالة $\frac{u'}{u}$ هي

$$\text{Ln}|u|$$

ملاحظة: إذا كانت u موجبة تماما على I

دالة أصلية للدالة $\frac{u'}{u}$ هي الدالة Ln|u| وبما

ان $u > 0$ وبالتالي هي Ln(u)

الدالة اللوغاريتمية العشرية:

تعريف: الدالة اللوغاريتمية العشرية هي

الدالة التي نرمز لها بـ Log المعرفة على

$$\text{Log } x = \frac{\text{Ln } x}{\text{Ln } 10} \quad]0, +\infty[$$

خواص:

$$\text{Log } 1 = 0 \quad \diamond$$

$$\text{Log } 10 = 1 \quad \diamond$$

ومنه كل عددين حقيقيين a و b موجبين

$$\text{تماما } \text{Log } ab = \text{Log } a + \text{Log } b$$

المحور الرابع

التزايد المقارن Hard_equation



$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad (7)$$

الدالة الجذر النوني:

مبرهنة وتعريف: من أجل كل عدد حقيقي

a ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

يوجد عدد حقيقي وحيد b يحقق $b^n = a$

يسمى b الجذر النوني للعدد a ونرمز إليه

بالرمز $\sqrt[n]{a}$

نسمي الدالة المعرفة على $[0, +\infty[$ حيث

$x \mapsto \sqrt[n]{x}$ الدالة الجذر النوني

خاصية 1: من أجل كل عدد حقيقي موجب

تماما a ومن أجل كل عدد طبيعي غير

معدوم n : $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

ملاحظة: نضع اصطلاحا $0^{\frac{1}{n}} = 0$

التزايد المقارن

(1) التزايد المقارن للدالتين: $x \mapsto e^x$,

$x \mapsto x$

خواص: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

(2) التزايد المقارن للدالتين: $x \mapsto Lnx$,

$x \mapsto x$

قوى عدد حقيقي موجب تماما

ليكن a عددا حقيقيا موجب تماما وليكن n

عددا صحيحا نسبيا

نعلم أن $Ln a^n = n Ln a$

وبالتالي $a^n = e^{n Ln a}$

وبما أن $Ln e = 1$ فإن من أجل كل عدد

حقيقي x : $e^{x Ln a} = a^x$

تعريف 1: نضع $a^b = e^{b Ln a}$ من أجل كل

عديدين حقيقيين a و b حيث $a > 0$ و b

كفي

تعريف 2: عدد حقيقي موجب تماما

نسمي الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$f(x) = a^x = e^{x Ln a}$ الدالة الأسية ذات

الأساس a

قواعد الحساب:

خواص: من أجل كل عديدين حقيقيين

موجبين تماما a , b ومن أجل كل عديدين

حقيقيين x, y لدينا

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (4) \quad Ln(a^x) = x Ln a \quad (1)$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (5) \quad a^x \times a^y = a^{x+y} \quad (2)$$

$$(ab)^x = a^x b^x \quad (6) \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad (3)$$

خواص: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x Lnx = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Lnx}{x} = 0$

(3) التزايد المقارن مع الدالة: $x \mapsto x^n$
($n \in \mathbb{N}^*$)

خواص: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n Lnx = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Lnx}{x^n} = 0$

خلاصة: كل الدوال $x \mapsto e^x$, $x \mapsto Lnx$,

مع $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) تؤول إلى $+\infty$ لما

يؤول x إلى $+\infty$ إلا أن سلوكها مختلف عند

اللانهاية تتفوق الدالة الأسية على الدالة قوة

وتتفوق الدالة قوة على الدالة اللوغاريتمية

النيبرية.

المحور الخامس

الدوال الأصلية

Hard equation

أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0) = y_0$



حساب الدوال الأصلية

(1) الدوال الأصلية لدوال ماثوفة:

يتم الحصول على النتائج المخصصة في الجدول الموالي انطلاقا من قراءة عكسية لمشتقات دوال ماثوفة. الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي الدوال F ، يمثل c عددا حقيقيا كيفيا

$f(x)$	$F(x) =$	$I =$
a (عددي حقيقي)	$ax + c$	\mathbb{R}
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	\mathbb{R}
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$]-\infty, 0[$ أو $]0, +\infty[$
$\frac{1}{\mu^n}$ ($n \geq 2$)	$\frac{-1}{(n-1)\mu^{n-1}} + c$	$]-\infty, 0[$ أو

أ. الدوال الأصلية

(1) الدالة الأصلية لدالة على مجال:

تعريف: f دالة معرفة على مجال I

نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة للاشتقاق على I مشتقتها F' هي f

من أجل كل x من I : $F'(x) = f(x)$

(2) مجموعة الدوال الأصلية لدالة:

خواص:

❖ إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل دوالا أصلية على I

❖ إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال $F(x) + c$ حيث c عدد حقيقي ثابت.

نتيجة: دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط

(3) الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير:

خاصية: f دالة مستمرة على مجال I ، x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد كيفي توجد دالة

$n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{x^n}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0, +\infty[$
$\sin x$	$-\cos x + c$	\mathbb{R}
$\cos x$	$\sin x + c$	\mathbb{R}
$1 + \tan^2 x$	$\tan x + c$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi \right\}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$	$k \in \mathbb{Z}$

خواص:

❖ إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب f و g على مجال I فإن $(F + G)$ دالة أصلية لـ $(f + g)$ على I

❖ إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن (kF) دالة أصلية للدالة (kf) على المجال I . ($k \in \mathbb{R}$)

الدوال الأصلية والعمليات على الدوال:

μ دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة μ
$u' \cdot u$	$\frac{1}{2}u^2 + c$	
$u' \cdot u^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c$	من أجل كل $x \in I$

المعادلات التفاضلية

تعريف: معادلة تفاضلية هي معادلة

(1) المجهول فيها دالة غالبا ما نرمز إليها بالرمز y ، أو حرف آخر

(2) تظهر فيها بعض مشتقات y (المشتقة الأولى y' أو مشتقة من رتبة أكبر y'' ، ...)

(3) نسمي حلا للمعادلة التفاضلية (E) في مجال I كل دالة φ تحقق (E) في I

المعادلات التفاضلية من الشكل:

$$y' = f(x)$$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكانت F دالة أصلية لها على I فإن حلول المعادلة التفاضلية: $y' = f(x)$ هي الدوال y حيث $y = F(x) + c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

المعادلات التفاضلية من الشكل:

$$y'' = f(x)$$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال

I وكانت F دالة أصلية لها على I وكانت G

دالة أصلية للدالة F على I فإن حلول المعادلة

التفاضلية: $y'' = f(x)$ هي الدوال y حيث

$y = G(x) + c_1x + c_2$ مع c_1 و c_2 عدنان

حقيقيان ثابتان.

المعادلات التفاضلية من الشكل:

$$y'' = -\omega^2 y$$

مبرهنة: إذا كان ω عددا حقيقيا غير

معدوما فإن حلول المعادلة التفاضلية

$y'' = -\omega^2 y$ هي الدوال y حيث

$y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$ مع c_1 و c_2

عدنان حقيقيان ثابتان.

الحساب التكاملي Hard equation

تعريف 1: لتكن f دالة مستمرة وموجبة على المجال $[a, b]$ و (ϑ) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد $(O, \overline{OI}, \overline{OJ})$

وحدة المساحة هي مساحة المستطيل $OIKJ$

التكامل المحدود من a إلى b للدالة f نرمز له بـ $\int_a^b f(x)dx$ هو مساحة الحيز تحت المنحنى (ϑ)

تعريف 2: لتكن f دالة مستمرة وسالبة على المجال $[a, b]$ و (ϑ) تمثيلها البياني في معلم متعامد. العدد $\int_a^b f(x)dx$ هو معاكس مساحة الحيز (D) المحدد بمحور الفواصل والمنحنى (ϑ) والمستقيمات ذا المعادلة $x = a$ أو $x = b$

القيمة المتوسطة:

تعريف 3: لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a, b]$ مع $a < b$

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a, b]$ هو

$$u = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx$$

التكامل والدالة الأصلية

(1) حساب تكامل بواسطة دالة أصلية:

مبرهنة: لتكن f دالة مستمرة على مجال I من أجل كل الأعداد الحقيقية a و b من المجال I . F هي دالة أصلية للدالة f على I لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(2) دالة معرفة بتكامل:

مبرهنة: لتكن الدالة f مستمرة على مجال I وليكن x عدد حقيقي من I الدالة F المعرفة على I بـ: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ هي الدالة الأصلية الوحيدة لـ f على I التي تنعدم عند a

نتيجة: الدالة F قابلة للاشتقاق على I

$$F' = f$$

خواص التكامل: لتكن f دالة مستمرة على

مجال I , a و b عددين حقيقيين من I لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

(1) علاقة شال: من أجل كل أعداد حقيقية

a, b, c من المجال I

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(5) حصر القيمة المتوسطة:

مبرهنة: لتكن f دالة مستمرة على مجال I

وليكن m و M عددين حقيقيين

$a \leq b$ و a و b عددين حقيقيين من I بحيث:

إذا كان من أجل كل $x \in [a, b]$:

$$m \leq f(x) \leq M$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

ملاحظة: هذه المبرهنة تسمح لنا بحصر

تكامل بدون حسابه.

التكامل بالتجزئة:

مبرهنة: لتكن μ و ν دالتان قابلتان

للاشتقاق على مجال بحيث μ' و ν'

مستمرتان على المجال I فإن من أجل كل

عددين حقيقيين a و b من المجال I

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

ملاحظة: التكامل بالتجزئة يسمح لنا

بتعويض حساب التكامل لدالة التي لا نعلم

لها دالة أصلية بتكامل بسيط يمكننا حسابه.

(2) خطية التكامل: لتكن f و g دالتان

مستمرتان على المجال I من أجل كل عدد

حقيقي λ ومن أجل كل عددين حقيقيين a

و b من I لدينا:

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

(3) إيجابية التكامل: لتكن f دالة مستمرة

على المجال I , a و b عدنان حقيقيان من I

إذا كان $a \leq b$ و $f \geq 0$ على المجال $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

ملاحظات:

(1) الشروط $a \leq b$ و $f \geq 0$ ضرورية لكي

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

(2) هذه المبرهنة تسمح لنا بتحديد مباشرة

إشارة تكامل بدون حسابه.

(4) التكامل والترتيب: ليكن f و g دالتان

مستمرتان على مجال I , a و b عدنان

حقيقيان من المجال I

إذا كان $a \leq b$ و $f \leq g$ على المجال $[a, b]$

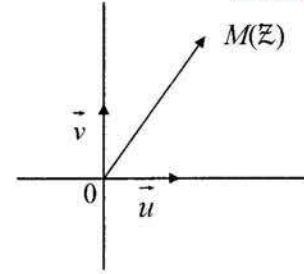
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

ملاحظة: هذه المبرهنة تساعدنا عمليا لمقارنة

تكاملين بدون حسابهما



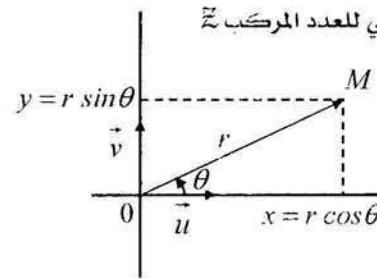
مجموعة الأعداد المركبة Hard equation



الشكل المثلثي لعدد مركب:

تعريف: ليكن z عددا مركبا غير معدوم و M النقطة التي لاحتقتها z ليكن (r, θ) الثنائية القطبية للنقطة M ومنه r يسمى طولية العدد المركب z ونرمز له بـ: $r = |z|$ و θ يسمى عمدة للعدد المركب z ونرمز له بـ: $\theta = Arg(z)$

الكتابة $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ تسمى الشكل المثلثي للعدد المركب z



العدد المركب المرافق:

تعريف: ليكن z عدد مركب حيث $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ، مع $z = x + iy$

الشكل الجبري لعدد مركب:

المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر (o, \vec{u}, \vec{v})

تعريف 1: لتكن النقطة M للمستوي ذات الإحداثيات (x, y) لائحة النقطة M هو العدد المركب $z = x + iy$ حيث i هو عدد تخيلي بحيث $i^2 = -1$ مجموعة الأعداد المركبة نرمز لها بـ \mathbb{C}

الكتابة $(x + iy)$ تسمى العبارة الجبرية للعدد المركب z

العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z ونرمز بـ: $x = Re(z)$

والعدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد المركب z ويرمز له بـ: $y = Im(z)$

تعريف 2: عدنان مركبان متساويان معناه لهما نفس الجزء الحقيقي ونفس الجزء التخيلي أي $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$

$$\begin{cases} x' = x \\ z = z' \text{ معناه } \\ y' = y \\ Re(z') = Re(z) \\ \text{أي } \\ Im(z') = Im(z) \end{cases}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \text{ ومنه}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'} \quad (2)$$

(3) من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$:

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n$$

(4) من أجل كل عدد مركب z' غير معدوم:

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

$$|zz'| = |z| |z'| \quad (5)$$

$$Arg(zz') = Argz + Arg(z') + 2k\pi \quad (6)$$

$$z \neq 0 \text{ مع } \frac{1}{z} = \frac{1}{\overline{z}} \quad (7)$$

$$Arg\left(\frac{1}{z}\right) = -Argz + 2k\pi \quad (8)$$

$$z' \neq 0 \text{ مع } \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (9)$$

$$Arg\left(\frac{z}{z'}\right) = Arg(z) - Arg(z') + 2k\pi \quad (10)$$

$$|z^n| = |z|^n: n \text{ من أجل كل عدد طبيعي } \quad (11)$$

$$(12) \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ ومن أجل كل عدد مركب } z \text{ غير معدوم:}$$

$$Arg(z^n) = nArg(z) + 2k\pi$$

$$(13) \text{ قانون موافر: من أجل كل عدد حقيقي } \theta:$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

الشكل الأسّي لعدد مركب:

تعريف: من أجل كل عدد حقيقي θ نرمز:

تسمى مرافق العدد المركب z العدد المركب $\overline{z} = x - iy$ بحيث $\overline{\overline{z}} = z$

خواص:

(1) النقط M ذات اللاحقة z و M' ذات اللاحقة \overline{z} متناظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل.

$$z \in \mathbb{R} \text{ معناه } z = \overline{z} \quad (2)$$

$$z \text{ تخيلي صرف معناه } z = -\overline{z} \quad (3)$$

$$\overline{\overline{z}} = z \quad (4)$$

$$z\overline{z} = x^2 + y^2 = r^2 \quad (5)$$

العمليات في \mathbb{C} :

الجمع:

تعريف: ليكن $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ فإن $z + z' = (x + x') + i(y + y')$

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

خاصية: كل عدد مركب $z = x + iy$ ، $(-z) = -x - iy$ يقبل معاكس $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(-z) = -x - iy$$

نتيجة: الشعاع \overrightarrow{AB} لاحتته $(z_B - z_A)$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad \text{خاصية:}$$

الضرب:

تعريف: ليكن $z = x + iy$ ، $z' = x' + iy'$ فإن $zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$

$$zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$$

خواص:

(1) كل عدد مركب غير معدوم $z = x + iy$ يقبل مقلوب يرمز له بـ: $\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy}$ ومنه

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy}$$

$$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

الأعداد المركبة والتحويلات النقطية:

الانسحاب: الكتابة المركبة المرفقة

لانسحاب الذي شعاعه $\vec{\mu}$ ذات اللاحقة b هي $z' = z + b$

التحاكي: ليكن k عدد حقيقي غير معدوم.

الكتابة المركبة المرفقة للتحاكي الذي

مركزه Ω ونسبته k هي

$z' - \omega = k(z - \omega)$ حيث ω هي لاحقة النقطة Ω

حالة خاصة: في حالة $\Omega = 0$: $z' = kz$

الدوران: الكتابة المركبة للدوران الذي

مركزه Ω وزاويته θ هي

$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ حيث ω لاحقة النقطة Ω

حالة خاصة: في حالة $\Omega = 0$: $z' = e^{i\theta}z$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

نتيجة: كل عدد مركب z غير معدوم

طويلته r وعمدة له θ يكتب على الشكل

$$z = r e^{i\theta}$$

هذه الكتابة تسمى الشكل الأسّي للعدد

المركب z

قوانين أولر: "Formule D'EULER" من

أجل كل عدد حقيقي θ لدينا:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ و } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

قوانين أولر تسمح لنا بتخطيط كثيرات الحدود المثلثية.

المعادلات من الدرجة الثانية ذات معاملات

حقيقية:

لتكن المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ ذات

المجهول z و a, b, c أعداد حقيقية بحيث

$$a \neq 0$$

نسمي مميز المعادلة العدد الحقيقي

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

♦ إذا كان $\Delta > 0$ المعادلة تقبل حلين

حقيقيين

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

♦ إذا كان $\Delta = 0$ المعادلة تقبل حلا

$$z = \frac{-b}{2a} \text{ مضاعفا حقيقيا}$$

♦ إذا كان $\Delta < 0$ المعادلة تقبل حلين

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ مركبين مترافقين}$$

المتتاليات العددية Hard Equation

الاستدلال بالتراجع (البرهان بالتراجع): ترميز: صورة عدد طبيعي ، نرمز
(بديهية التراجع) (Axiome) له بـ: u_n نقول أن العدد الحد هو الحد
(récurrence) العام للمتتالية u أو الحد الذي دليله n
لتكن $P(n)$ خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي
 n
❖ إذا كان $P(0)$ صحيحة
❖ ومن أجل كل عدد طبيعي n : كون $P(n)$
صحيحة تستلزم $P(n+1)$ صحيحة فإن $P(n)$
صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

تعريف متتالية: متتالية يمكن أن تكون معرفة
❖ بمعرفة حدها العام المعبر بدلالة n
❖ بمعرفة حدها الأول وعلاقة تراجعية

ملاحظات:

❖ من فرض " $P(n)$ صحيحة" تستلزم
 $P(n+1)$ صحيحة نقول: $P(n)$ وراثية
❖ لبرهنة بالتراجع على خاصية $P(n)$
صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر
من أو يساوي n_0 مع $(n_0 \in \mathbb{N}^+)$
نتحقق من صحة $P(n_0)$ ونبرهن أن الخاصية
 $P(n)$ وراثية أي نفرض $P(n)$ صحيحة من
أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$
ونبرهن صحة $P(n+1)$
❖ البرهان بالتراجع يشمل مبدئين: مبدأ
الابتدائية ومبدأ الوراثة

مفهوم متتالية: متتالية عددية هي دالة من
 \mathbb{N} نحو \mathbb{R}

المتتاليات الحسابية – المتتاليات الهندسية

المتتاليات الحسابية:
المتتالية (u_n) متتالية حسابية إذا وجد عدد
حقيقي r بحيث من أجل كل عدد طبيعي n :
 $u_{n+1} = u_n + r$
العدد الحقيقي r يسمى أساس المتتالية
عبارة الحد العام بدلالة n :
من أجل كل عددين طبيعيين n و p لدينا:
 $u_n = u_p + (n-p)r$
وعلى الخصوص: $u_n = u_0 + nr$

نهاية متتالية حسابية:

❖ إذا كان $r > 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

❖ إذا كان $r < 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

مجموع $(n+1)$ الحدود الأولى لمتتالية

حسابية: ليكن $n \in \mathbb{N}^+$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \text{ فإن}$$

$$S_n = \left(\frac{n+1}{2} \right) (u_0 + u_n)$$

نستنتج من هذه العلاقة مجموع n الأعداد الطبيعية الأولى أي:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

المتتاليات الهندسية:

المتتالية (u_n) هندسية إذا وفقط إذا يوجد عدد حقيقي q بحيث من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = q u_n$$

العدد الحقيقي q يسمى أساس المتتالية

عبارة الحد العام بدلالة n :

من أجل كل عددين طبيعيين n و p لدينا:

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

$$\text{على الخصوص: } u_n = u_0 \times q^n$$

نهاية متتالية هندسية:

♦ إذا كان $|q| < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ ومنه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

♦ إذا كان $q > 1$ و $u_0 > 0$ فإن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

♦ إذا كان $q > 1$ و $u_0 < 0$ فإن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

♦ إذا كان $q < -1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ غير موجودة

مجموع $(n+1)$ الحدود الأولى لمتتالية

هندسية: ليكن $n \in \mathbb{N}^+$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

♦ إذا كان $q = 1$ فإن $S_n = (n+1)u_0$

$$S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} : q \neq 1$$

نستنتج من هذه العلاقة أنه إذا كان $q \neq 1$:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

المتتاليات الرتيبة - المحدودة من

الأعلى - المحدودة من الأسفل

تعريف 1:

♦ متتالية (u_n) متزايدة معناه من أجل كل

$$n \text{ طبيعي } u_{n+1} \geq u_n$$

♦ متتالية (u_n) متناقصة معناه من أجل كل

$$n \text{ طبيعي } u_{n+1} \leq u_n$$

نقول عن متتالية أنها رتيبة إذا وفقط إذا

كانت إما متزايدة أو إما متناقصة

تعريف 2:

♦ متتالية (u_n) محدودة من الأعلى إذا وجد

عدد حقيقي M بحيث من أجل كل عدد

$$n \text{ طبيعي } u_n \leq M$$

♦ متتالية (u_n) محدودة من الأسفل إذا وجد

عدد حقيقي m بحيث من أجل كل عدد

$$n \text{ طبيعي } u_n \geq m$$

♦ متتالية (u_n) محدودة إذا كانت محدودة

من الأسفل ومن الأعلى

ملاحظات:

♦ يجب أن يكونا الأعداد الحقيقية M و m

مستقلان عن n

♦ إذا كان M عنصر حاد من الأعلى

للمتتالية (u_n) ومنه كل عدد أكبر من M

هو أيضا عنصر حاد من الأعلى للمتتالية

$$(u_n)$$

♦ إذا كان m عنصر حاد من الأسفل

للمتتالية (u_n) ومنه كل عدد أصغر من m

هو أيضا عنصر حاد من الأسفل للمتتالية

$$(u_n)$$

♦ كل متتالية متزايدة محدودة من الأسفل

بحدها الأول

♦ كل متتالية متناقصة محدودة من الأعلى

بحدها الأول

♦ يوجد متتاليات غير محدودة من الأعلى

ولا من الأسفل على سبيل المثال:

$$u_n = (-1)^n (n+1)$$

نهاية متتالية

تعريف 1: لتكن (u_n) متتالية عددية و ℓ

عدد حقيقي نقول أن المتتالية (u_n) تتقارب

نحو ℓ معناه كل مجال مفتوح يشمل ℓ

يحوي كل حدود المتتالية ابتداء من رتبة

$$\text{معينة ونكتب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

إذا كانت المتتالية (u_n) تتقارب نحو ℓ نقول

أنها متقاربة فعكس ذلك نقول أنها متباعدة

ملاحظة: قول أن متتالية متباعدة معناه إما

$$u_n \rightarrow +\infty \text{ أو } u_n \rightarrow -\infty$$

(النهاية غير موجودة)

أو نهايتها لا $+\infty$ أو $-\infty$ هي إما $+\infty$ أو $-\infty$

$$\text{مثال: } u_n = 3^n$$

وحدانية النهاية: إذا كانت متتالية متقاربة

فإن نهايتها وحيدة.

♦ مبرهنة: كل متتالية متقاربة هي متتالية

محدودة.

عكس هذه المبرهنة غير صحيح: يوجد

متتاليات محدودة وغير متقاربة مثال:

$$u_n = (-1)^n$$

تعريف 2: لتكن (u_n) متتالية عددية نقول أن

المتتالية (u_n) تؤؤل إلى $+\infty$ معناه كل

مجال من الشكل $[A, +\infty[$ ، A عدد حقيقي

يشمل كل حدود المتتالية ابتداء من رتبة

معينة

تعريف 3: نقول أن المتتالية (u_n) تؤؤل إلى

$-\infty$ معناه كل مجال من الشكل $]-\infty, A]$ ،

A عدد حقيقي يشمل كل حدود المتتالية

ابتداء من رتبة معينة

مبرهنة: كل متتالية متزايدة غير محدودة

من الأعلى تؤؤل إلى $+\infty$

وكل متتالية متناقصة غير محدودة من

الأسفل تؤؤل إلى $-\infty$

العمليات على النهايات: هي نفسها

العمليات على

النهايات والترتيب: لتكن (u_n) و (v_n) متناهيتان حقيقيتان إذا كان:

♦ (u_n) متقاربة نحو l

♦ (v_n) متقاربة نحو l'

♦ وابتداء من رتبة معينة $u_n \leq v_n$ فإن $l \leq l'$

♦ إذا كان $u_n \leq a$ ($a \in \mathbb{R}$) و (u_n) متقاربة نحو l فإن $l \leq a$

♦ إذا كان (u_n) متناهية موجبة وتقتارب نحو l فإن $l \geq 0$

♦ إذا كانت المتناهية (u_n) متزايدة ومتقاربة نحو l فإن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا

$$u_n \leq l$$

♦ إذا كانت (u_n) متناهية متناقصة ومتقاربة نحو l فإن من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_n \geq l$$

♦ لتكن (u_n) و (v_n) متناهيتين عدديتين بحيث ابتداء من رتبة معينة $u_n \leq v_n$

♦ إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ فإن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

♦ إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ فإن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

النهايات بالحصر: لتكن (u_n) ، (v_n) و (w_n) ثلاثة متناهيات عددية نفرض أن (v_n) و (w_n) متقاربتان نحو نفس النهاية l وابتداء من

رتبة معينة $v_n \leq u_n \leq w_n$ فإن المتناهية (u_n) متقاربة وتقتارب نحو l

مبرهنة:

♦ كل متناهية متزايدة ومحدودة من الأعلى متقاربة

♦ كل متناهية متناقصة ومحدودة من الأسفل متقاربة

ملاحظة: هذه المبرهنة تسمح لنا بمعرفة تقارب أو عدم تقارب متناهية ولا تعطيا قيمة النهاية التي تقتارب لها

المتناهيتان المتجاورتان

متناهيتان (u_n) و (v_n) متجاورتان معناه إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$$

مبرهنة: إذا كانت المتناهيتان (u_n) و (v_n) متجاورتان فإنهما متقاربتان ولهما نفس

النهاية

ملاحظة:

♦ هذه المبرهنة تعطينا وجود النهاية المشتركة للمتناهيتان ولا تعطينا قيمة

النهاية

♦ إذا كان المتناهية (u_n) متزايدة والمتناهية (v_n) متناقصة ونهايتهما المشتركة l بحيث

$$u_n \leq l \leq v_n \quad n: \text{ عدد طبيعي}$$

ملاحظة: إذا كان المتناهية (u_n) معرفة بـ $u_{n+1} = f(u_n)$ وإذا كانت (u_n) متقاربة نحو l

والدالة f مستمرة عند l فإن $f(l) = l$

ومنه إذا كانت (u_n) متقاربة نحو l فإن l هي حل المعادلة $f(x) = x$

وبالتالي هي فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C) الممثل للدالة f مع المستقيم (D) ذي

$$y = x$$

الجداء السلمي في الفضاء

Hard_equation

في معلم متعامد ومتجانس (o, \vec{i}, \vec{j}) للمستوى (P) إذا كان للأشعة \vec{u} و \vec{v} مركبات على الترتيب (x, y) و (x', y') فإن:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

نتيجة: $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

بعد نقطة عن مستقيم

تعريف: ليكن (D) مستقيم شعاع توجيه له \vec{u} نسمي شعاعا ناظمي لـ (D) كل شعاع غير معدوم عمودي على \vec{u}

خواص:

(1) لتكن A نقطة من المستوى و \vec{n} شعاع غير معدوم. مجموعة النقط M من المستوى بحيث $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ هي المستقيم المار من A وشعاع ناظمي له \vec{n}

(2) في معلم متعامد ومتجانس المستقيم (D) ذي المعادلة: $ax + by + c = 0$ مع $(a, b) \neq (0, 0)$ يقبل شعاع ناظمي \vec{n} حيث $\vec{n}(a, b)$

(3) لتكن A نقطة من المستوى (P) و (D) مستقيم من المستوى ولتكن B نقطة من (D) و \vec{n} شعاع ناظمي لـ (D)

بعد النقطة A إلى المستقيم (D) هي:

تذكير حول الجداء السلمي في المستوى

تعريف: ليكن \vec{u} و \vec{v} شعاعان غير معدومين من المستوى (P) الجداء السلمي للشعاعين \vec{u} و \vec{v} في المستوى (P) ونرمز له بـ: $\vec{u} \cdot \vec{v}$ هو

$$\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

ملاحظة:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ إذا وفقط إذا } \vec{u} = \vec{0} \text{ أو } \vec{v} = \vec{0}$$

أو \vec{u} و \vec{v} متعامدان

$$\vec{u} \cdot \vec{u} \text{ نرسم له بـ: } \vec{u}^2 \text{ ويسمى المربع السلمي لـ } \vec{u} \text{ ولدينا } \vec{\mu}^2 = \|\vec{\mu}\|^2$$

خواص: ليكن \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} ثلاث أشعة من

المستوى (P) و k عدد حقيقي

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Hard_equation ☆ الفهرس ☆ Hard_equation

الصفحة

الدرس

05

المحور التاسع: الجداء السلمي في الفضاء.

56

المحور العاشر: المستقيمات والمستويات في الفضاء.

91

المحور الحادي عشر: التماس المباشر

144

المحور الثاني عشر: الاحتمالات الشرطية

192

المحور الثالث عشر: قوانين الاحتمال

217

المحور الرابع عشر: القسمة الإقليدية في \mathbb{Z}

253

المحور الخامس عشر: الموافقات في \mathbb{Z}

291

المحور السادس عشر: الأعداد الأولية



بعد النقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ عن المستوى (P) هي:

$$d = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

طرائق

لبرهنة مستقيم عمودي على مستوي:

♦ إذا كان مستقيم عمودي على مستقيمين متقاطعين من نفس المستوى فإنه عمودي على هذا المستوى

♦ يمكن استعمال طريقة شعاعية إذا كان الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

- إما أن نبرهن أن شعاع توجيه المستقيم عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا عن

المستوى (حساب الجداء السلمي)

- إما أن نبرهن أن شعاع توجيه المستقيم مرتبط خطيا مع شعاع ناظمي للمستوي

لبرهنة تعامد مستويين:

مستويين متعامدان إذا وفقط إذا أحدهما يحوي مستقيم عمودي على الآخر ولهذا

نبرهن أن مستويين (P) و (P') شعاعان ناظميها على الترتيب \vec{n} و \vec{n}' متعامدان

معناه $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ متعامدان

عبارة الجداء السلمي: في معلم متعامد

ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ للفضاء الجداء

السلمي للشعاعين $\vec{u}(x, y, z)$ و $\vec{v}(x', y', z')$

هو: $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

خواص الجداء السلمي: ليكن $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

ثلاث اشعة من الفضاء و k عدد حقيقي

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$(\vec{ku}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\vec{kv}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$$

بعد نقطة عن مستوي

تعريف:

♦ ليكن (P) مستوي و M من الفضاء نسمي بعد النقطة M عن المستوى (P) المسافة MH

للنقطة M عن مسقطها العمودي H على المستوى (P)

♦ ليكن (P) مستوي ناظمه \vec{n} و A نقطة من المستوى (P) . المسافة للنقطة M من

الفضاء عن المستوى (P) هي: $d = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

♦ الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ وليكن (P) المستوي

ذي المعادلة: $ax + by + cz + d = 0$;

$$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

تعريف: ليكن (P) و (P') مستويين شعاعا

ناظميها على الترتيب \vec{n} و \vec{n}'

(P) و (P') متعامدان معناه $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$

متعامدان

مثال: ليكن A, B, C ثلاث نقط متمايضة من الفضاء. ما هي مجموعة النقط M من

الفضاء بحيث $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = \vec{AC} \cdot \vec{AM}$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AM} = \vec{AC} \cdot \vec{AM}$$

$$\text{معناه } (\vec{AB} - \vec{AC}) \cdot \vec{AM} = 0$$

$$\vec{CB} \cdot \vec{AM} = 0$$

ومنه مجموعة النقط M هو المستوى المار من A وشعاع ناظمي له \vec{CB}

الاسقاط العمودي:

تعريف 1: نسمي المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم (D) النقطة M' تقاطع المستقيم (D) والمستوي (P) الذي يشمل M وعمودي على (D)

تعريف 2: نسمي المسقط العمودي للنقطة M على المستوى (P) النقطة M' تقاطع المستوى (P) والمستقيم (D) المار من M وعمودي على المستوى (P)

تعريف 3: نسمي المسقط العمودي للنقطة M على المستوى (P) النقطة M' تقاطع المستوى (P) والمستقيم (D) المار من M وعمودي على المستوى (P)

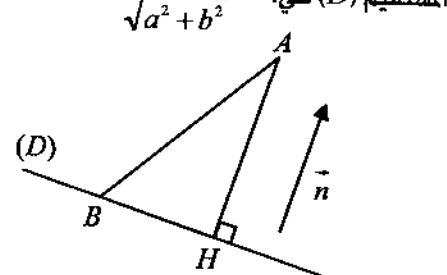
تعريف الجداء السلمي:

تعريف: الجداء السلمي في الفضاء للشعاعين \vec{u} و \vec{v} هو الجداء السلمي للشعاعين \vec{u} و \vec{v} في كل مستوي يشمل هذين الشعاعين

$$AH = \frac{|\vec{BA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

(4) في معلم متعامد ومتجانس إذا كان $A(x_A, y_A)$ و (D) معادلة له هي:

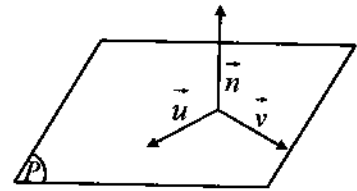
$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



الجداء السلمي في الفضاء

المستويات المتعامدة:

تعريف: كل شعاع غير معدوم عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا لمستوي (P) هو شعاع ناظمي للمستوي (P)



خواص:

♦ ليكن (P) مستوي و A نقطة من (P) و \vec{n} شعاع ناظمي لـ (P) فإن المستوى (P) هو مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

المستقيمات والمستويات في الفضاء Hard equation

1. التمييز المرجحي

خاصية 1:

المستقيم (AB) هو مجموعة مراجح النقط B و A
 القطعة المستقيم [AB] هي مجموعة مراجح النقط A و B المرفقة بالمعاملات من نفس الإشارة

ملاحظة: هذه الخاصية تسمح لنا ببرهنة استقامية ثلاث نقط (أي ثلاث نقط في استقامة واحدة) بإثبات أحد النقط هو مرجح النقطتين الآخرين

خاصية 2: المستوي (ABC) هو مجموعة مراجح النقط A, B, C . الحيز داخل المثلث الأضلاع منتمية هي مجموعة المراجع للنقط A, B, C مرفقة بمعاملات لهم نفس الإشارة

ملاحظة: هذه الخاصية تسمح لنا ببرهنة أن أربع نقط من نفس المستوي بإثبات أحد النقط هو مرجح الثلاث النقط المتبقية

2. التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفضاء

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ولتكن النقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ و $\vec{\mu}(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ مع جملة معادلات وسيطية للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة A وشعاع توجيه له هي:

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \text{ مع } (t \in \mathbb{R})$$

ملاحظة: هذا التمثيل ليس وحيد

المعادلة الديكارتيية لمستوي

تعريف: كل شعاع غير معدوم عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من مستوي (P) هو شعاع عمودي على (P)

نتيجة: إذا كان \vec{n} شعاعا ناظميا (عموديا) على (P) فإن \vec{n} عمودي على كل شعاع من المستوي (P)

وبالتالي كل مستقيم موجه بالشعاع \vec{n} هو مستقيم عمودي على (P)

تعيين مستوي \vec{n} شعاع غير معدوم M نقطة

من الفضاء

مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ هي المستوي (P) الذي يشمل A و \vec{n} شعاع ناظمي له

خاصية: كل مستوي $\vec{n}(a, b, c)$ شعاع ناظمي له يقبل معادلة ديكارتية من الشكل:

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ حيث } d \text{ عدد حقيقي}$$

حالات خاصة:

معادلة ديكارتية للمستوي (o, \vec{i}, \vec{j}) هي

$$z = 0$$

معادلة ديكارتية للمستوي (o, \vec{j}, \vec{k}) هي

$$x = 0$$

معادلة ديكارتية للمستوي (o, \vec{i}, \vec{k}) هي

$$y = 0$$

مستويان \vec{n} و \vec{n}' مستويان ناظميان

لها على الترتيب

(P) يوازي (P') معناه يوجد عدد حقيقي k

$$\vec{n}' = k\vec{n}$$

(P) عمودي على (P') معناه $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$

تقاطع مستقيمات ومستويات

تقاطع مستويين:

ليكن (P) و (P') مستويان ناظميها على الترتيب \vec{n} و \vec{n}'

إذا كان \vec{n} و \vec{n}' مرتبطين خطيا فإن (P)

و (P') متوازيان تماما. ليس لهم أي نقطة

مشتركة

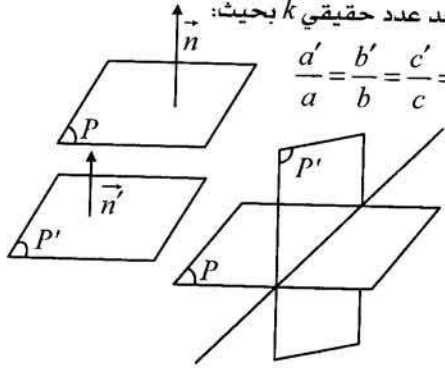
إذا كان \vec{n} و \vec{n}' غير مرتبطين خطيا فإن (P) و (P') متقاطعان، تقاطعهما هو مستقيم ليكن (P) و (P') المستويان الذي معادلتها على الترتيب: $ax + by + cz + d = 0$

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

المستويان (P) و (P') متقاطعان إذا وفقط إذا (a, b, c) و (a', b', c') غير متناسبين أي لا

يوجد عدد حقيقي k بحيث:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$



تقاطع مستقيم ومستوي:

ليكن (P) مستوي شعاعه الناظمي \vec{n} و (D)

مستقيم يشمل A وشعاع توجيه $\vec{\mu}$

إذا كان \vec{n} و $\vec{\mu}$ متعامدان فإن (P) و (D)

متوازيان

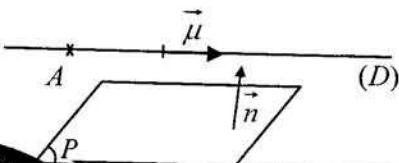
- إذا كان $A \in (P)$ فإن $(D) \subset (P)$

- إذا كان $A \notin (P)$ فإن (D) و (P) ليس

لهم أي نقطة مشتركة

إذا كان \vec{n} و $\vec{\mu}$ غير متعامدان فإن

المستقيم (D) والمستوي (P) متقاطعان



$$0 = ax + by + cz + d \text{ حيث}$$

$$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

- تميز مرجحي: $M \in (P)$ معناه M مرجح
الجملة $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ حيث
 $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

طرائق

دراسة الوضع النسبي لمستقيمين في
الفضاء:

ليكن $D_1(A_1, \vec{u}_1)$ و $D_2(A_2, \vec{u}_2)$ مستقيمين
من الفضاء بحيث D_1 يشمل A_1 وشعاع توجيه
له هو \vec{u}_1 ، D_2 يشمل A_2 وشعاع توجيه له هو
 \vec{u}_2

♦ إذا كان \vec{u}_1 و \vec{u}_2 مرتبطين خطيا فإن
 D_1 و D_2 متوازيان
- إذا كان $A_1 \in D_2$ فإن المستقيمين
منطبقين

- إذا كان $A_1 \notin D_2$ فإن المستقيمين
متوازيان تماما

♦ إذا كان \vec{u}_1 و \vec{u}_2 غير مرتبطين خطيا
فإن المستقيمان إما متقاطعان أو لا ينتميان
إلى نفس المستوى

- إذا كان $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ من نفس
المستوى فإن D_1 و D_2 متقاطعان

- إذا كان $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ ليسوا من نفس
المستوى فإن D_1 و D_2 ليسوا من نفس المستوى

دراسة الوضعية النسبية لمستقيم ومستوى:

ليكن $D(A, \vec{u})$ مستقيم من الفضاء و (P)
مستوى شعاع ناظمي له \vec{n} نحسب $\vec{u} \cdot \vec{n}$
♦ إذا كان $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ فإن \vec{u} و \vec{n} متعامدان
ومنه (D) و (P) متوازيان

- إذا كان $A \in (P)$ فعندئذ $(D) \subset (P)$

- إذا كان $A \notin (P)$ ومنه (D) و (P)

متوازيان تماما وليس لهما أي نقطة مشتركة

♦ إذا كان $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$ ومنه \vec{u} و \vec{n} ليسوا

متعامدان ومنه (D) و (P) متقاطعان
وتقاطعهما نقطة

دراسة الوضعية النسبية لمستويين:

ليكن (P) و (P') مستويين شعاعا ناظميهما
 \vec{n} و \vec{n}' على الترتيب

- إذا كان $\vec{n}(a, b, c)$ و $\vec{n}'(a', b', c')$

مرتبطين خطيا أي $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ فإن

المستويان (P) و (P') متوازيان

- إذا كان $A \in (P)$ و $A \notin (P')$ فإن (P) و

(P') منطبقان أي $(P) = (P')$

- إذا كان $A \in (P)$ و $A \notin (P')$ فإن (P) و

(P') متوازيان تماما وليس لهما نقطة
مشتركة

♦ إذا كان \vec{n} و \vec{n}' غير مرتبطين خطيا فإن

(P) و (P') متقاطعان وتقاطعهما مستقيم

توجيهات

♦ المستقيم (D) الذي يشمل A وشعاع توجيه
 $\vec{\mu}$ يمكن تمييزه بثلاث كصفات:

- شعاعيا: $\vec{AM} = k\vec{\mu}$; $k \in \mathbb{R}$ معناه
 $M \in D_{(A, \vec{\mu})}$

- تحليليا: $M(x, y, z)$ نقطة من $D_{(A, \vec{\mu})}$

$$\text{معناه } \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \text{ مع } t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{\mu}(a, b, c)$$

- تميز مرجحي: $M \in (D)$ معناه M مرجح
الجملة المثقلة $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ حيث
 $B \in (D)$ و $\alpha + \beta \neq 0$

♦ القطعة المستقيمة $[AB]$ يمكن تمييزها
بكيفيتين:

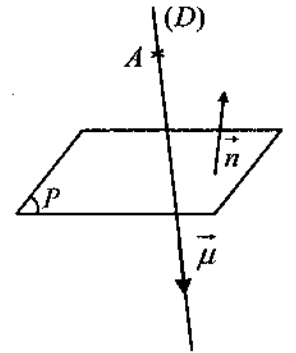
- شعاعيا: $M \in [AB]$ معناه $\vec{AM} = t\vec{AB}$
مع $t \in [0, 1]$

- تميز مرجحي: $M \in [AB]$ معناه M
مرجح الجملة $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ مع
 $\alpha + \beta \neq 0$ و β و α من نفس الإشارة

♦ المستوي (P) الذي يشمل A, B, C يمكن
تمييزه بثلاث كصفات:

- شعاعيا: $M \in (P)$ معناه
 $\vec{AM} = \alpha\vec{\mu} + \beta\vec{\nu}$ حيث $(A, \vec{\mu}, \vec{\nu})$ معلما لـ
 (P)

- تحليليا: بمعادلة ديكارتية



تقاطع ثلاث مستويات:

ليكن $(P_1), (P_2), (P_3)$ ثلاث مستويات ذات
معادلات على الترتيب:

$$\begin{aligned} (P_1): a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ (P_2): a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \\ (P_3): a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0 \end{aligned}$$

سُمي S جملة المعادلات الثلاث اعلاه

تقاطع $(P_1), (P_2), (P_3)$	حلول الجملة S
أي نقطة مشتركة	الجملة S لا تقبل حلول في \mathbb{R}^3
نقطة مشتركة واحدة النقطة A	الجملة S تقبل حلا وحيدا (x_A, y_A, z_A)
مستقيم (Δ)	الجملة S تقبل كحلول كل الثلاثيات حلول للمعادلتين التي تعرف (Δ)
(P_1) او (P_2) او (P_3)	الجملة S تقبل كحلول كل الثلاثيات حلول إحدى المعادلات

استعمال المرجح

مسألة الاستقامة:

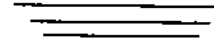
لكي نبرهن أن ثلاث نقاط A, B, C على استقامة واحدة يكفي أن نبرهن أن أحد النقط الثلاث هو مرجح النقطتين الأخرين.

مسألة نقطة تقاطع:

لكي نبرهن أن ثلاث مستقيمات $(AB), (CD), (EF)$ متقاطعة يكفي أن نبرهن على وجود نقطة G مرجح الثنائية (A,B) و (C,D) و (E,F)

مسألة النقط من نفس المستوي:

لكي نبرهن أن أربع نقاط A, B, C, D من نفس المستوي يكفي أن نبرهن أن أحد النقط هو مرجح النقط الثلاث الأخرى



المحور الحادي عشر

التشابه المباشر Hard equation

(3) كل تشابه لديه نقطتين صامدتين

متميزتين هو إما تحويل مطابق للمستوي أو

تناظر محوري

التقاييسات:

تعريف: نسمي تقاييس كل تشابه نسبته 1

ملاحظة:

❖ تقاييس هو تحويل نقطي يحافظ على

المسافات

❖ تركيب تقاييس وتحاكي الذي نسبته k

هي تشابه نسبته $|k|$

مثال: انسحاب، دوران أو تناظر محوري هي

تقاييسات

تصنيف التشابهات

❖ تشابه يحافظ على الزوايا الهندسية

تعريف: تشابه مباشر هو تشابه الذي يحافظ

على الزوايا الموجهة، تشابه غير مباشر هو

تشابه الذي يحول زاوية موجهة إلى

معاكستها

التشابه المباشر:

خاصية مميزة: تحويل S هو تشابه مباشر إذا

I. عموميات

تعريف: نسمي تشابه للمستوي كل تحويل

للمستوي الذي يحافظ على نسب المسافات

من أجل كل نقط A, B, C, D من المستوي

$$\text{بحيث } C \neq D : \frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

- تحويل نقطي f للمستوي هو تشابه إذا

وفقط إذا يوجد عدد حقيقي k موجب تماما

بحيث من أجل كل نقط A و B صورهما على

$$\text{الترتيب } A' \text{ و } B' \text{ لدينا } A'B' = k AB$$

العدد الحقيقي k يسمى نسبة التشابه

أمثلة:

❖ التحويل المطابق، الانسحاب، الدوران،

التناظرات المحورية هم تشابهات ذات النسبة 1

❖ التحاكيات ذات النسبة k هي تشابهات ذات

النسبة $|k|$

خواص:

(1) تركيب تشابهين ذات النسبة k و k' على

الترتيب هو تشابه نسبته kk' (التركيب ليس

تبديلي)

(2) التحويل العكسي لتشابه نسبته k ($k > 0$)

$$\text{هو تشابه نسبته } \frac{1}{k}$$

الكتابة المركبة S :	
$a \neq 0$ مع $Z' = aZ + b$	
a حقيقي	
$a = 1$	$a \neq 1$
S هو الانسحاب الذي نسبته a الذي شعاعه \vec{h} ومركزه Ω ذات اللاحقة ω حيث:	S هو التحاكي الذي نسبته a الذي شعاعه \vec{h} ومركزه Ω ذات اللاحقة ω حيث:
$b \neq 0$	$\omega = a\omega + b$
$b = 0$ إذا كان Ω هو التحويل المطابق	$\omega = a\omega + b$

تركيب تشابهيان مباشرين:

تركيب تشابهيان مباشرين للمستوي ذات النسب k و k' والزوايا θ و θ' على الترتيب هو تشابه مباشر للمستوي نسبته kk' وزاويته $(\theta + \theta')$

لتعيين المركز يمكن استعمال العبارات المركبة

حالات خاصة:

تركيب إنسحابين:

$$L_{\mu} \circ L_{\nu} = L_{\mu+\nu} = L_{\nu} \circ L_{\mu} \quad \diamond$$

$$r(\Omega, \theta) \circ r(\Omega, \theta') = \quad \diamond$$

$$r(\Omega, \theta') \circ r(\Omega, \theta) = r(\Omega, \theta + \theta')$$

$$h(\Omega, k) \circ h(\Omega, k') = \quad \diamond$$

$$h(\Omega, k') \circ h(\Omega, k) = h(\Omega, kk')$$

مركبان و a عدد مركب غير معدوم نسبته $|a|$ هي

تأثير التشابه على الأشكال الهندسية: كل تشابه الذي نسبته k

✦ يضرب المسافات في العدد الحقيقي k والمساحات في k^2

✦ يحافظ على الزوايا الهندسية، التوازي، التعامد، المنتصفات، الاستقامة، التقاطع، المرجح

✦ يحول مستقيم إلى مستقيم، قطعة مستقيمة إلى قطعة مستقيمة

✦ يحول دائرة \mathcal{C} ذات المركز I ونصف القطر r إلى دائرة \mathcal{C}' ذات المركز I' حيث $I' = S(I)$

ونصف القطر r' حيث $r' = kr$

الكتابة المركبة S :	
$a \neq 0$ مع $Z' = aZ + b$	
a غير حقيقي	
$ a = 1$	$ a \neq 1$
S هو الدوران الذي نسبته $ a $ وزاويته $\theta = Arg(a)$ ومركزه Ω ذات اللاحقة ω حيث:	S هو التشابه المباشر للمستوي نسبته $ a $ وزاويته $\theta = Arg(a)$ ومركزه Ω ذات اللاحقة ω حيث:
$\omega = a\omega + b$	$\omega = a\omega + b$

و فقط إذا كتابته المركبة هي $Z' = aZ + b$ حيث a و b عدنان مركبان و a عدد مركب غير معدوم. نسبة التشابه هو طولية العدد المركب a ، زاوية التشابه هي عمدة العدد المركب a

✦ كل تشابه للمستوي مباشر غير الانسحاب يقبل نقطة صامدة وحيدة تسمى مركز التشابه

ميرهنة: تشابه مباشر للمستوي الذي نسبته k وزاويته θ هو:

✦ إما انسحاب إذا كان $k = 1$ و $\theta = 0$

✦ إما تركيب في ترتيب كافي لدوران مركزه Ω وزاويته θ وتحاكي مركزه Ω ونسبته k

يقبل عندئذ كتابة مركبة من الشكل: $Z' - \omega = a(Z - \omega)$ النقطة Ω و $|a| = k$ و $Arg(a) = \theta + 2k\pi$

✦ ليكن A, B, A', B' أربع نقط من المستوي بحيث: $A \neq B$ و $A' \neq B'$

يوجد تشابه وحيد يحول A إلى A' و B إلى B' نسبته $\frac{A'B'}{AB}$ وزاويته $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$

التشابه الغير المباشر:

✦ تحويل نقطي هو تشابه غير مباشر للمستوي إذا و فقط إذا كتابته المركبة من الشكل $Z' = a\bar{Z} + b$ حيث a و b عدنان

المحور الثاني عشر

الاحتمالات الشرطية Hard equation

العد (القوائم – الترتيبات – التباديلات)

1. قوائم عناصر مجموعة منتهية

تعريف: E مجموعة منتهية ذات n عنصرا
($n \geq 1$) و p عدد طبيعي ($p \geq 1$)

نسمي قائمة ذات p عنصرا من E كل متتالية مرتبة من p عنصرا من عناصر E

إذا أردنا أن تكون هذه العناصر المرتبة متميزة

مثنى مثنى عندئذ لا يمكن للقائمة أن تحتوي أكثر من n عنصرا وهذا ما يقتضي

أن يكون $n \geq p \geq 1$

❖ من أجل كل عدد طبيعي p ($p \geq 1$) عدد قوائم E ذات p عنصرا يساوي n^p بينما يكون

عدد قوائم ذات p عنصرا المتميزة العناصر مثنى مثنى هو $(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$

هذا الجداء يحوي p عاملاً

ملاحظة: نسمي القائمة التي عناصرها

متميزة مثنى مثنى بترتيبية ويرمز لعدد ترتيبات p عنصرا من بين n عنصرا بالرمز

A_n^p ونكتب:

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$$

تعريف: ترتيبية ذات n عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا تسمى تبديلية ذات n عنصرا عدد التباديلات إذن هو:

$$n(n-1)(n-2)\dots\times 2\times 1$$

بالرمز $n!$ ويقرا مفكوك n أو (n عاملي)

$$A_n^n = n!$$

ملاحظة: يمكن كتابة عدد الترتيبات ذات p

عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا بالشكل

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ أي } \frac{n!}{(n-p)!}$$

التوفيقات – دستور ثنائي الحد

1 تعريف: E مجموعة منتهية ذات n عنصرا

($n \geq 1$) و p عدد طبيعي حيث ($n \geq p \geq 0$)

نسمي توفيق ذات p عنصرا من عناصر E

كل جزء من E ذي p عنصرا من عناصر E

نرمز لعدد التوفيقات ذات p عنصرا من

مجموعة ذات n عنصرا بالرمز C_n^p أو الرمز

$$\binom{p}{n}$$

ملاحظة: $C_n^1 = n$ أي أن عدد الأجزاء التي

تحتوي عنصرا واحدا من مجموعة ذات n

عنصرا هو n

بينما $C_n^0 = 1$ ومنه يوجد جزء واحد يحوي كل العناصر وهو المجموعة نفسها وكذلك يوجد واحد الذي لا يحوي أي عنصر هو الجزء الخالي أي $C_n^0 = 1$

مبرهنة: من أجل كل عددين طبيعيين n و p

$$n \geq p \geq 0$$

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

خواص:

(1) من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث

$$n \geq p \geq 0 \text{ لدينا } C_n^p = C_n^{n-p}$$

(2) من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث

$$n \geq p \geq 0 \text{ لدينا } C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

مثلث باسكال (TRIANGLE de PASCAL)

$p \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1	$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$			
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

دستور ثنائي الحد:

a و b عدنان طبيعيين، n عدد طبيعي

($n \geq 1$) لدينا:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p$$

$$= C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

ملاحظة:

❖ معاملات النشر في ثنائي الحد نعطي

لجدول باسكال

❖ نسمي أيضا ثنائي الحد لنيوتن (Binôme

de NEWTON)

نمذجة تجربة عشوائية:

عندما يكون عدد مخارج تجربته عشوائية

منتهيا. نعرف على مجموعة المخارج

$\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$ قانون احتمالات ودلها

بإعطاء متتالية أعداد (P_1, P_2, \dots, P_r)

تحقق: $\sum_{i=1}^r P_i = 1$ و $P_i \geq 0$ من أجل كل

$$1 \leq i \leq r$$

يكون النموذج مناسباً إلا في حالة اقتراب

التكرارات الإحصائية من الأعداد P_i عندما

يكون عدد التجارب أكبر

- الحدس يقودنا إلى النموذج التالي:

❖ في حالة تساوي الأعداد P_i نقول أن قانون

الاحتمال متساوي التوزيع (أو نقول تساوي

الاحتمال).

$$P(x_i) = P_i = \frac{1}{r} \text{ أي من كل } i \text{ لدينا}$$

❖ نذكر أن أمل قانون الاحتمال هو العدد

$$\mu = \sum_{i=1}^r P_i x_i \text{ تباينية هو العدد}$$

وفي حالة $f(x) \cdot 0$ فهي ليست في مصلحة اللاعب كما في مجال الإحصاء فإن التباين والانحراف المعياري مقياس للتشتت

خواص الاحتمالات الشرطية:

(1) لتكن B حادثة من مجموع المخارج E حيث $P(B) \neq 0$ بحيث الحادثة B تستلزم الحادثة A فإن احتمال الحادثة A علما أن B محققة هي 1 أي إذا كان: $B \subset A$ فإن $P_B(A) = 1$

(2) لتكن A و B حادثتان من مجموع المخارج ذات احتمالات غير معدومة. لدينا

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = P(A) \times P_A(B)$$

دستور الاحتمالات الكلية

(1) تجزئة مجموعة: نسمي تجزئة مجموعة أجزاء لهذه المجموعة كلها ليست خالية، منفصلة متنى متنى (لا يوجد جزءان لهما عنصر مشترك) واتحادهما المجموعة الكلية أي:

$$A_i \cap A_j = \phi \quad (2) \quad A_i \neq \phi \quad (1)$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = E \quad (3)$$



(2) لتكن $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ حوادث احتمالاتها غير معدومة تشكل تجزئة للمجموعة الشاملة E

لدينا من أجل كل حادثة B :

وفي حالة $f(x) \cdot 0$ فهي ليست في مصلحة اللاعب كما في مجال الإحصاء فإن التباين والانحراف المعياري مقياس للتشتت

مبرهنة: X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس الوضعية و a عدد حقيقي

خواص الخطية للأمل الرياضي:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(aX) = aE(X)$$

حيث $E(aX)$ و $E(X+Y)$ هما الأملان الرياضيتان لكل من $(X+Y)$ و (aX)

ينتج من المبرهنة السابقة:

X متغير عشوائي a و b عدنان حقيقيان لدينا:

$$E(X+b) = E(X) + b$$

$$Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$Var(aX) = a^2 Var(X)$$

$$\delta(aX) = |a| \delta(X)$$

$$Var(X+b) = Var(X)$$

$$\delta(X+b) = \delta(X)$$

الاحتمالات الشرطية

تعريف: لتكن A حادثة من مجموع المخارج E حيث $P(A) \neq 0$ نعرف على E احتمالا جديدا يرمز له بالرمز P_A حيث من أجل كل

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

حادثة B نكتب: P_A يسمى الاحتمال الشرطي علما أن A محققة

B, A	B, A	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
	حادثتان	
	كيفيتان	

المتغير العشوائي - الأمل الرياضي والبيانات لتغير عشوائي

متغير عشوائي X هو دالة عددية معرفة على مجموعة المخارج E ومزودة باحتمال P

X يأخذ القيم x_1, x_2, \dots, x_n بالاحتمالات

P_1, P_2, \dots, P_n معرفة كمان

$$P_i = P(X = x_i)$$

إرفاق القيم P_i بالقيم x_i هو تعريف قانون

احتمال جديد على E' هذا القانون يرمز له بـ

P_x أو P_x ويسمى قانون X

الأمل الرياضي للمتغير عشوائي X هو الأمل

الرياضي لقانون احتماله P_x وكذلك

التباين والانحراف المعياري ونرمز لها على

الترتيب بالرموز $E(X), Var(X), \delta(X)$

خواص الأمل الرياضي والتباين لتغير عشوائي:

$E(X)$ هو معدل القيم x_i مرفقة بالقيم P_i

بالمقارنة مع مجال الإحصاء $E(X)$ هو \bar{X} وفي

ميدان الألعاب هو الربح المتوسط الذي يأمله

اللاعب بعد تكرار اللعبة مرات كثيرة.

فانعدام $E(X)$ يدل أن اللعبة عادلة

و $E(X) > 0$ يعني أن اللعبة مريحة

$$v = \sum_{i=1}^n P_i (x_i - \mu)^2$$

وانحرافه المعياري هو العدد $\delta = \sqrt{v}$

ونذكر أن الحادثة هي كل جزء من E وأن

$\{x_i\}$ تدعى حادثة أولية E الحادثة الأكيدة و

ϕ هي الحادثة المستحيلة

♦ احتمال حادثة A هو مجموع احتمالات

كل المخارج التي لا تنتمي إلى A

$(P(\phi) = 0)$ وفي حالة تساوي احتمال يؤول

حساب احتمال A أي $P(A)$ إلى مسالة عد

مبرهنة: في حالة تساوي احتمال على E

يكون لدينا من أجل كل حادثة A

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } E}$$

بعض الخواص:

الخاصية	لغة الحوادث	أجزاء E
$0 \leq P(A) \leq 1$	A حادثة كيفية	A
$P(E) = 1$ $P(\phi) = 0$	الحادثتان الأكيدة والمستحيلة	ϕ, E
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	A, B غير متلائمتين	$A \cap B = \phi$
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	العكسية للحادثة A	\bar{A}

من أجل كل i و j حيث $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq m$

♦ في حالة استقلال الحوادث يكون احتمال قائمة النتائج هو جداء احتمالات كل النتائج (يحصل هذا عموماً في التجارب العشوائية المكررة)

♦ متغيران عشوائيان مرتبطان بتجربتين مختلفتين مستقلان

♦ الحادثة المستحيلة مستقلة على أي حادثة

أخرى

♦ الحادثة الأكيدة مستقلة على أي حادثة

أخرى

♦ إذا كانت الحادثة B مستقلة عن الحادثة

A فإن B مستقلة عن الحادثة \bar{A}

♦ الأمل الرياضي لجداء متغيران

عشوائيان مستقلان هو جداء الأمل

الرياضياتي للمتغيران أي:

$$E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$$

♦ التباين لمجموع متغيران عشوائيان

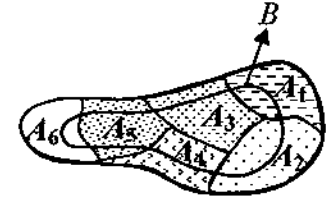
مستقلان هو مجموع تباينان المتغيران

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) \text{ العشوائيان أي:}$$

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

$$P(A_k \cap B) = P(A_k) \times P_{A_k}(B) \text{ مع}$$

من أجل كل k حيث $1 \leq k \leq n$



ملاحظة:

♦ يمكن أن تكون الحادثة $A_k \cap B = \phi$ من

أجل $1 \leq k \leq n$

♦ العائلة $\{A_k \cap B\}$ مع $1 \leq k \leq n$ تشكل

تجزئة للحادثة B

الحوادث المستقلة والمتغيرات

العشوائية المستقلة

تعريف: نقول عن حادثتين A و B أنهما

مستقلتان إذا وفقط إذا كان:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

إذا كان $P(A) \neq 0$ فإن $P(B/A) = P(B)$

تعريف: X و Y متغيران عشوائيان معرفان

على نفس الفضاء E

لنكن x_1, x_2, \dots, x_n قيم المتغير X

و y_1, y_2, \dots, y_n قيم المتغير Y

نقول أن X و Y مستقلان عندما تكون

الحدثتان $(X = x_i)$ و $(Y = y_j)$ مستقلتان



قوانين الاحتمال
Hard equation

قانون برنولي

تعريف: نسمي تجربة برنولي كل تجربة عشوائية ذات مخرجين متعاكسين S و \bar{S} باحتمالين p و $(1-p)$ على الترتيب

قانون برنولي هو المتغير العشوائي X حيث:

$$X = 1 \text{ إذا تحقق المخرج } S$$

$$X = 0 \text{ إذا تحقق المخرج } \bar{S}$$

قانون احتمال X هو: نسمي p وسيط المتغير العشوائي X

X	0	1
$p(X=x)$	$1-p$	p

خاصية: إذا كان المتغير العشوائي X يتبع قانون برنولي بوسيط p فإن الأمل الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$ يعطيان بالعلاقتين التاليتين:

$$E(X) = p \text{ و } V(X) = p(1-p)$$

مخطط برنولي وقانون ثنائي الحد

بتكرار تجربة برنولي n مرة (التجارب مستقلة) نعرف مخطط برنولي

تعريف: نقول أن متغير عشوائي X يتبع قانون ثنائي الحد بالوسيطين n و p إذا كان X يأخذ كقيمة عدد مرات تحقق المخرج S عند تكرار تجربة برنولي n مرة ونكتب:

$$X \rightarrow B(n, p)$$

مبرهنة: ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم و p عددا حقيقيا من المجال $[0, 1]$

متغير عشوائي يتبع قانون ثنائي الحد $B(n, p)$ من أجل كل عدد طبيعي k $0 \leq k \leq n$ لدينا:

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p)$$

قوانين الاحتمالات المستمرة

1. الكثافة

تعريف 1: f دالة معرفة على المجال $[a, b]$

حيث: $a < b$

نقول أن f كثافة احتمال على $[a, b]$ إذا تحقق ما يلي:

$$\diamond f \text{ مستمرة على } [a, b]$$

$$\diamond f \text{ موجبة على } [a, b]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1 \diamond$$

$$P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^x \text{ لدينا}$$

$$P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ ومنه}$$

2) الأمل الرياضي للمتغير X هو

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

دالة كثافة إذا تحقق ما يلي:

من أجل كل عددين α و β من $[a, b]$;

$(\beta \geq \alpha)$ لدينا:

$$E(X) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt \text{ لدينا}$$

$$E(X) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\lambda} [e^{-\lambda t}]_0^{\alpha} \text{ ومنه}$$

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(t) dt$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ وبالتالي}$$

خواص: من أجل كل α و β ينتميان إلى

المجال $[a, b]$

$$P(X = \alpha) = 0 \diamond$$

$$P(\alpha \leq X < \beta) = P(\alpha < X \leq \beta) \diamond$$

$$= P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \leq X \leq \beta)$$

2. قانون التوزيعات المنتظمة

تعريف: f دالة نقول أن المتغير العشوائي X

يتبع قانون التوزيع المنتظم على المجال $[a, b]$,

$(a < b)$ إذا كانت دالة كثافة الاحتمال

ثابتة على المجال $[a, b]$

القانون الأسي:

تعريف: نقول أن المتغير العشوائي X يتبع

القانون الأسي ذي الوسيط λ إذا كانت دالة

كثافة احتمال هي الدالة المعرفة من أجل

$$\text{كل } x \in [0, +\infty[\text{ بالعلاقة } f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

نتائج:

(1) ليكن x عددا من المجال $[0, +\infty[$ لدينا

$$P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

المحور الرابع عشر

القسمة الإقليدية في \mathbb{Z}

Hard Equation

القسمة الإقليدية في \mathbb{Z} :

مبرهنة: a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم. توجد ثنائية وحيدة (q, r) من الأعداد

$$0 \leq r < b \text{ و } a = bq + r$$

الصحيحة بحيث $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$ تسمى عملية البحث عن الثنائية (q, r)

بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b

يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل وباقي

القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b

ملاحظة: يمكن تمديد مفهوم القسمة

الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح

غير معدوم b ونحصل على $a = bq + r$

$$0 \leq r < |b|$$

القاسم المشترك الأكبر لعددين

طبيعيين: a عدد طبيعي غير معدوم ونرمز بـ

D_a إلى مجموعة قواسم العدد

ملاحظة: لدينا مجموعة قواسم هي \mathbb{N}^*

تعريف: ليكن a و b عدنان طبيعيان غير

معدومين، D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b

على الترتيب، $D_a \cap D_b$ هي مجموعة

القواسم المشتركة للعدد a و b

يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a \cap D_b$

بالقاسم المشترك الأكبر للعدد a و b

ونرمز له بـ: $PGCD(a, b)$

1. القسمة في \mathbb{Z}

ليكن a و b عدنان صحيحان و a غير معدوم

القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود

$$b = ka \text{ حيث } k \text{ عدد صحيح}$$

نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول

كذلك b مضاعف للعدد a

ونكتب a/b ونقرأ a يقسم b

$$\text{مثال: } 12 = 3 \times 4 = (-3) \times (-4)$$

ومنه $4/12$ و $-3/12$ وبالتالي مجموعة قواسم

\mathbb{Z} هي:

$$D_{12} = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

2. القواسم الخاصة

❖ من أجل كل عدد صحيح a لدينا

$$1/a \text{ و } -1/a \text{ و } a/a \text{ و } -a/a$$

❖ قواسم (-1) أو 1 في \mathbb{Z} هي (-1) و 1

قابلية القسمة في \mathbb{Z} : من أجل ثلاثة أعداد

صحيحة a, b, c الغير المعدومة

❖ إذا كان a/b و b/c فإن a/c

❖ إذا كان c/a و c/b فإن من أجل كل أعداد

$$c/\alpha a + \beta b : \beta \text{ و } \alpha \text{ صحيحة}$$

تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين

صحيحين:

تعريف: a و b عدنان طبيعيان غير معدومين

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو

العدد الطبيعي الوحيد d حيث:

$$d = \text{PGCD}(|a|, |b|)$$

خاصية: a و b عدنان صحيحان غير

معدومين و k عدد صحيح غير معدوم

$$\text{PGCD}(ka, kb) = |k| \text{PGCD}(a, b)$$

ملاحظة: a و b عدنان صحيحان غير

معدومين

$$\text{PGCD}(a, b) = |b| \text{ فإن } a \text{ يقسم } a$$

♦ إذا كان $r_2 \neq 0$ فإن

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(a, b) &= \text{PGCD}(b, r_1) \\ &= \text{PGCD}(r_1, r_2) \end{aligned}$$

نواصل هكذا حتى نجد باقيا معدوما ونسمي

r_n آخر باقيا غير معدوم وعليه

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(a, b) &= \text{PGCD}(b, r_1) = \\ \text{PGCD}(r_1, r_2) &= \dots = \text{PGCD}(r_n, 0) = r_n \end{aligned}$$

هذه الطريقة لإيجاد القاسم المشترك الأكبر

لعددين طبيعيين a و b تسمى بخوارزمية

إقليدس.

خاصية 2: القاسم المشترك الأكبر لعددين

طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقيا

غير معدوم في سلسلة قسومات خوارزمية

إقليدس.

خاصية 3: a و b عدنان طبيعيين غير

معدومين، k عدد طبيعي غير معدوم

$$\text{PGCD}(ka, kb) = k \text{PGCD}(a, b) \text{ لدينا}$$

تعريف: a و b عدنان طبيعيين غير معدومين

يكون العدنان a و b أوليين فيما بينهما إذا

و فقط إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر

يساوي 1

خاصية 4: a و b عدنان طبيعيين غير

معدومين، d قاسم مشترك للعددين a و b

$$b = db', a = da' \text{ نضع}$$

يكون d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و

b إذا و فقط إذا كان العدنان الطبيعيان a' و

b' أوليين فيما بينهما

ملاحظة: يرمز أيضا لمجموعة القواسم

المشتركة للعددين a و b بـ: $D_{a,b}$

ملاحظات: لدينا $\text{PGCD}(a, a) = a$

و $\text{PGCD}(1, a) = 1$ و $\text{PGCD}(0, a) = a$

حيث (a غير معدوم)

$$D_{a,b} = D_a \cap D_b = D_{\text{PGCD}(a,b)} \text{ لدينا}$$

أي مجموعة القواسم المشتركة لعددين

طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم

قاسمهما المشترك الأكبر.

خواص القاسم المشترك الأكبر

لعددين طبيعيين

خاصية 1: a و b عدنان طبيعيين غير

معدومين حيث $a \geq b$ ، r باقي قسمة a على

$$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r) \text{ فإن}$$

خوارزمية إقليدس: a و b عدنان طبيعيين

غير معدومين حيث $a > b$ بقسمة a على b

نحصل على $a = bq_1 + r_1$ مع $0 \leq r_1 < b$

حيث q_1 و r_1 عدنان طبيعيين

♦ إذا كان $r_1 = 0$ (أي b يقسم a) فإن

$$\text{PGCD}(a, b) = b$$

♦ إذا كان $r_1 \neq 0$ فإن

$$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r_1)$$

نقسم b على r_1 نحصل على $b = q_2 r_1 + r_2$

مع $0 \leq r_2 < r_1$ حيث q_2 و r_2 عدنان طبيعيين

♦ إذا كان $r_2 = 0$ (أي r_1 يقسم b) فإن

$$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r_1) = r_1$$

التعداد

مبرهنة: x عدد طبيعي غير معدوم أكبر

تماماً من 1 كل عدد طبيعي a أكبر من أو

يساوي x يكتب بطريقة وحيدة على الشكل:

$$a = q x^n + r_{n-1} x^{n-1} + r_{n-2} x^{n-2} + \dots + r_2 x^2 + r_1 x + r_0$$

حيث $0 \leq r_k < x$ و $0 < q < x$

مع $r_k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$

التعداد ذو الأساس x :

قاعدة: x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماماً

من 1. يعتمد التعداد ذو الأساس x على

الاصطلاحين التاليين:

(1) إذا كان $a < x$ (a عدد طبيعي). a يمثل

برمز وحيد يسمى رقماً

(2) إذا كان $a \geq x$ (a عدد طبيعي) من

المبرهنة a ينشر بطريقة وحيدة وفق العدد x :

$$a = q x^n + r_{n-1} x^{n-1} + r_{n-2} x^{n-2} + \dots + r_1 x + r_0$$

حيث $0 \leq r_k < x$ و $0 < q < x$

مع $r_k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

يمثل العدد a كما يلي:

$$a = q r_{n-1} r_{n-2} \dots r_1 r_0$$

الكتابة $a = q r_{n-1} r_{n-2} \dots r_1 r_0$ هي كتابة

العدد a في النظام ذي الأساس x

إذا كان $x = 10$ يكتب

$$a = q r_{n-1} r_{n-2} \dots r_1 r_0$$

الموافقات في \mathbb{Z}
Hard equation

أ. الموافقات في \mathbb{Z}

(1) تعريف: n عدد طبيعي غير معدوم، القول

أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد

n يعني أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة

على n ونرمز $a \equiv b[n]$ ونقرأ a يوافق b

بترديد n

أمثلة: $12 \equiv 34[11]$ ، $27 \equiv 92[5]$ ،

$-59 \equiv -3[8]$ ، $-20 \equiv 1[7]$

ملاحظات: من أجل كل عدد صحيح x :

$$a \equiv 0[1]$$

مبرهنة: a و b عدنان صحيحان و n عدد

طبيعي غير معدوم، a و b لهما نفس الباقي في

القسمة الإقليدية على n إذا وفقط إذا كان

$$(a - b) \text{ مضاعف لـ } n$$

نتيجة: a و b عدنان صحيحان و n عدد

طبيعي غير معدوم، a و b متوافقان بترديد

إذا وفقط إذا كان $(a - b)$ مضاعف لـ n

خواص:

خاصية 1: n عدد طبيعي غير معدوم يختلف

عن 1 ($n \geq 2$)، كل عدد صحيح a يوافق

باقي قسمة بترديد n أي

$a \equiv r[n]$ حيث r هو باقي قسمة a على n

خاصية 2: n عدد طبيعي غير معدوم من

أجل كل عدد صحيح a لدينا: $a \equiv a[n]$

خاصية 3: n عدد طبيعي غير معدوم و a و

عدنان صحيحان إذا كان:

$$b \equiv a[n]$$

خاصية 4: n عدد طبيعي غير معدوم، a و b و

c أعداد صحيحة إذا كان:

$$a \equiv b[n] \text{ و } a \equiv c[n] \text{ فإن } b \equiv c[n]$$

خاصية 5: n عدد طبيعي، a ، b ، c و d أعداد

صحيحة إذا كان:

$$a \equiv b[n] \text{ و } c \equiv d[n] \text{ فإن } ac \equiv bd[n]$$

خاصية 6: n عدد طبيعي غير معدوم، a ، b ، c ،

d أعداد صحيحة إذا كان:

$$a \equiv b[n] \text{ و } c \equiv d[n] \text{ فإن } (a + c) \equiv (b + d)[n]$$

خاصية 7: n عدد طبيعي غير معدوم و a و b

عدنان صحيحان، من أجل كل عدد صحيح k

إذا كان: $a \equiv b[n]$ فإن $ka \equiv kb[n]$

خاصية 8: n و p عدنان طبيعيان غير

معدومين، a و b عدنان صحيحان إذا كان:

$$a \equiv b[n] \text{ فإن } a^p \equiv b^p[n]$$

المحور السادس عشر

الأعداد الأولية Hard_equation

(1) تعريف: القول أن العدد الطبيعي n عدد

أولي معناه أن n يقبل قاسمين بالضبط في \mathbb{N} : 1 و n نفسه

فإن n غير أولي
❖ إذا كان \sqrt{n} غير طبيعي نقسم n على الأعداد الأولية الأصغر من \sqrt{n} على الترتيب - إذا وجدنا أحد البواقي معدوما نتوقف

ملاحظات ونتائج:

❖ 0 غير أولي لأنه يقبل ما لا نهاية من القواسم

ونقرأ أن n غير أولي
- إذا كانت كل البواقي غير معدومة نقرأ أن n أولي

❖ 1 غير أولي لأنه يقبل قاسم واحد هو 1

(2) للبرهان على أن عدد طبيعي n حيث

❖ 2 هو العدد الأولي الزوجي الوحيد

$n \geq 4$ غير أولي يكفي كتابته على الشكل

❖ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 هي

حيث $n = p \times q$ عدنان طبيعيان

الأعداد الأولية الأصغر من 25

أكبر تماما من 1

(2) خواص:

تحليل عدد طبيعي إلى جداء

خاصية 1: كل عدد طبيعي n أكبر تماما

عوامل أولية

من 1 ($n \geq 2$) يقبل على الأقل قاسما أوليا

مبرهنة: كل عدد طبيعي غير أولي n حيث

خاصية 2: كل عدد طبيعي n غير أولي

$n \geq 2$ يمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية

أكبر تماما من 1 ($n \geq 2$) يقبل قاسما أوليا

تحليل n إلى جداء عوامل أولية هو:

حيث $a \leq \sqrt{n}$

خاصية 3: مجموعة الأعداد الأولية غير

حيث $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ أعداد طبيعية وتمثل

منتهاية

تكرارات العامل الأولي p_k

طرائق:

ملاحظة: نقبل أن كل عدد طبيعي n يقبل

(1) لمعرفة إذا كان عدد طبيعي n أكبر تماما

تحليلا وحيدا إلى جداء عوامل أولية

من 1 ($n \geq 2$) أوليا أم لا نحسب \sqrt{n}

❖ إذا كان \sqrt{n} عددا طبيعيا أي n مربع تام

$$PGCD(a,b) \times PPCM(a,b) = a \times b$$

مبرهنة بيزو (Théorème de BEZOUT):

يكون عدنان صحيحان a و b أوليان فيما بينهما إذا فقط إذا وجد عدنان صحيحان μ و ν حيث $a\mu + b\nu = 1$

خواص:

خاصية 1: إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عدنان صحيحان μ و ν حيث $a\mu + b\nu = d$

خاصية 2: إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها

خاصية 3: إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جداءهما bc

مبرهنة غوص (Théorème de GAUSS):
إذا a, b, c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة إذا كان a يقسم الجداء bc وكان a أوليا مع b فإن a يقسم c

خواص:

خاصية 1: a و b عدنان طبيعيان غير معدومين و p عدد أولي، إذا كان p يقسم الجداء ab فإن p يقسم a أو p يقسم b

خاصية 2: a, b, c أعداد طبيعية غير معدومة إذا كان a مضاعف للعددين b و c وكان b و c أوليين فيما بينهما فإن a مضاعف للجداء bc

حساب القاسم المشترك الأكبر

باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:

خاصية: القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة وبأصغر أس.

حساب المضاعف المشترك الأصغر

باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:

خاصية: المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة في تحليلي a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة وبأصغر أس.

العلاقة بين المضاعف المشترك

الأصغر والقاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

خاصية: جداء عددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 مساو لجداء قاسمهما المشترك الأكبر ومضاعفهما المشترك الأصغري

$M_n = \{0, 6, 12, 18, \dots\}$
- المضاعف الوحيد لـ 0 هو 0

تعريف: a و b عدنان طبيعيان غير معدومين M_a مجموعة مضاعفات a ، M_b مجموعة مضاعفات b هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b

يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $(M_a \cap M_b)$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b وترمز له $PPCM(a,b)$

ملاحظات:

$$PPCM(1,a) = a, PPCM(a,a) = a$$

مجموعة المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة المضاعفات للمضاعف المشترك الأصغر لهما أي $M_a \cap M_b = M_{PPCM(a,b)}$

تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين:

تعريف: a و b عدنان صحيحان غير معدومين المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر عدد طبيعي m غير معدوم حيث $m = PPCM(|a|, |b|)$

خاصية للمضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين:

خاصية: a و b عدنان طبيعيان غير معدومين، k عدد صحيح غير معدوم $PPCM(ka, kb) = k PPCM(a, b)$

خاصية: a و b عدنان طبيعيان كلاهما أكبر تماما من 1

يكون العدد b قاسما للعدد a إذا فقط إذا كان كل عامل أولي في تحليل b موجودا في تحليل a وبأسس إما مساو وإما أصغر من أسه في تحليل a

طريقة: لإيجاد عدد قواسم a نحلل a إلى جداء عوامل أولية. إلى كل أس في التحليل نضيف 1 ثم نحسب جداء الأعداد المحصل عليها.

مثال: $9604 = 2^2 \times 7^4$ ومنه عدد قواسم 9604 هي: $15 = (2+1) \times (4+1)$

القواسم	العوامل
1	
2	2
4	2
7, 14, 28	7
49, 98, 196	7
343, 686, 1372	7
2401, 4802, 9604	7
	1

المضاعف المشترك الأصغر لعددين

a عدد طبيعي غير معدوم نرمز بـ: M_a مجموعة مضاعفات العدد a

مثال: مجموعة مضاعفات 6 هي:

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير



و النجاح و المغفرة

Hard_equation