Utilisation du symbole $\sum$

Notation : Pour parler de la somme des termes successifs d'une suite, on peut ou bien utiliser les pointillés ou bien utiliser le symbole « sigma » majuscule noté $\sum$
Par exemple, la somme S de tous les inverses des dix premiers entiers non nuls, peut s'écrire
$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10}$ ou bien $S = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k}$.
On dit que k est l'indice de la somme ; et on lit « S est égale à la somme pour k variant de 1 à 10 de $\frac{1}{k}$ ».

En effet, si on prend l'expression $\frac{1}{k}$ et que l'on remplace k par la valeur 1 alors on obtient $\frac{1}{1}$, si on remplace k par la valeur 2 alors on obtient $\frac{1}{2}$, et ainsi de suite... si on remplace k par la valeur 10 alors on obtient $\frac{1}{10}$ qui est le dernier terme de la somme.

L'avantage du symbole $\sum$ est qu'il est plus explicite que les pointillés $+\cdots+$ qui restent parfois flous. C'est aussi une façon plus compacte d'écrire ces sommes. Cette écriture est, on le verra, très commode, voire indispensable dans bien des domaines, notamment les probabilités et les statistiques (domaine où vous avez normalement déjà dû croiser ce joli symbole pendant vos années de lycéen(ne) ?!?).

Autre exemple : $T = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 105 \times 106$ s'écrit plus simplement $T = \sum_{k=1}^{105} k(k+1)$.
On dit que k est l'indice de la somme ; et on lit « T est égale à la somme pour k variant de 1 à 105 de $k(k+1)$ ».

En effet, si on prend l'expression $k(k+1)$ et que l'on remplace k par la valeur 1 alors on obtient 1×2, si on remplace k par la valeur 2 alors on obtient 2×3, et ainsi de suite... si on remplace k par la valeur 105 alors on obtient 105×106, expression qui est le dernier terme de la somme.

Exercice 1 : Traduire à l'aide du symbole $\sum$ les sommes suivantes :
$S_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 13^2 + 14^2$ s'écrit aussi $S_1 = \sum$
$S_2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots + 103^2 + 104^2$ s'écrit aussi $S_2 = \sum$
$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{101}{102} + \frac{102}{103}$ s'écrit aussi $S_3 = \sum$
$S_4 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 13^2 + 15^2$ s'écrit aussi $S_4 = \sum$
$S_5 = 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 6$ s'écrit aussi $S_5 = \sum$
$S_6 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125$ s'écrit aussi $S_6 = \sum$

Exercice 2 : Développer chacune des sommes écrites à l'aide du symbole $\sum$, en faisant disparaître ce symbole :
$T_1 = \sum_{k=3}^{10} \frac{1}{k^2}$
$T_2 = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2k+1}$
$T_3 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)!}{k}$

Rappel : suites arithmétiques.
Une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dont le terme général est de la forme $u_n = an + b$ où a est la raison de la suite.
On sait (se démontre aisément par récurrence) que la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \text{Nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Rappel : suites géométriques.
Une suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dont le terme général est de la forme $v_n = \alpha \times q^n$ où q est la raison de la suite.
On sait (se démontre aisément par récurrence) que la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par la formule

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Voici un exercice d'application :
Exercice 3 : Calculer chacune des sommes suivantes, ou en donner la meilleure expression possible :

SOMME DES TERMES D'UNE SUITE ARITHMÉTIQUE :
$3 + 7 + 11 + \cdots + 43 + 47 = \sum$

$\sum_{k=10}^{92} (3k + 5) =$

$\sum_{k=1}^{n} k =$ $\sum_{k=0}^{n} k =$ $\sum_{k=0}^{i} k =$

$\sum_{k=1}^{n} 2 =$ $\sum_{k=i}^{n} 3 =$ $\sum_{k=0}^{i} 7k =$

SOMME DES TERMES D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE :
$3 + 6 + 12 + \cdots + 768 = \sum$ $\sum_{k=10}^{92} 3^k =$

$\sum_{k=0}^{n} x^k =$ $\sum_{k=1}^{n} x^k =$ $\sum_{k=i}^{n} x^k =$

PROPRIÉTÉS DU SYMBOLE $\sum$: linéarité

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, alors pour tout réel α on a : $\sum_{k=0}^{n}(\alpha u_k) = \alpha \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$
- Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites, alors on a $\sum_{k=0}^{n}(x_k + y_k) = \sum_{k=0}^{n} x_k + \sum_{k=0}^{n} y_k$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

Ces deux propriétés sont équivalentes à cette seule propriété :
●● Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites et si α et β sont deux réels, on a

$$\sum_{k=0}^{n}(\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha \sum_{k=0}^{n} x_k + \beta \sum_{k=0}^{n} y_k \qquad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}$$

EXEMPLE : Linéarité de la somme
Si on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} 5k$, alors $S_n = 5\sum_{k=1}^{n} k = 5 \times \frac{n(n+1)}{2}$.

Si on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} 3k + 2$, alors $T_n = 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2 = 5 \times \frac{n(n+1)}{2} + 2n$.

Si on pose $Z_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$, alors on peut écrire : $Z_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^2 + k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$
mais on connaît (presque) par coeur que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Donc
$Z_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$.

EXEMPLE : Linéarité de la somme
Si on pose S_n la somme des entiers pairs consécutifs de 2 à $2n$ alors $S_n = 2 + 4 + \cdots + 2n = \sum_{k=1}^{n} 2k$.

Et on a par linéarité $S_n = 2\sum_{k=1}^{n} k = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$.

Si on pose T_n la somme des entiers impairs consécutifs de 1 à $2n-1$ alors $T_n = 1+3+\cdots+2n-1 = \sum_{k=1}^{n} 2k-1$.

On remarque que $S_n + T_n = \sum_{k=1}^{2n} k$ c'est à dire la somme de tous les entiers consécutifs de 1 à $2n$. Donc
$S_n + T_n = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$. De telle sorte que $T_n = n(2n+1) - S_n = n(2n+1) - n(n+1) = n^2$.
Autre méthode pour calculer T_n :
$T_n = 1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = \sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n^2$.

Propriétés du symbole $\sum$: ré-indexation d'une somme

Ce que l'on désigne par ce terme barbare de « ré-indexation », c'est effectuer un changement de variable (ou plutôt d'indice) pour simplifier, calculer ou comparer deux sommes. Il n'y a pas de définition formelle à retenir, juste une méthode de calcul assez élémentaire... regardez ces quelques exemples :

Exemple : Si on veut écrire la somme S des entiers impairs consécutifs de 1 à 11 on peut écrire $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} 2k-1$, mais on pourrait aussi écrire $S = \displaystyle\sum_{j=0}^{5} 2j+1$.

Pour passer de la première écriture à la seconde, il suffit de poser $j = k-1$, ce qui équivaut à $k = j+1$ et donc pour k variant de 1 à 6, l'indice j, égal à $k-1$, varie de 0 à 5. Et la formule $2k-1$ est remplacée par $2(j+1)-1 = 2j+1$.

Exemple : Si $T_n = \sum_{k=2}^{n}(k-1)^2$, pour un entier $n \geq 2$, alors on peut poser le changement d'indice : $i = k-1$. On a alors i varie de 1 à $(n-1)$, et $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i^2$, somme que l'on sait calculer : $T_n = \dfrac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6} = \dfrac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$

Exercice 4 : À l'aide d'une ré-indexation, montrer la règle sur les sommes télescopiques :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$$

indication : dans la somme $\sum_{k=0}^{n} u_{k+1}$, poser le changement de variable $i = k+1$.

Exercice 5 :

À l'aide d'une ré-indexation, justifier que : $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}$

De même, compléter :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{n-k} = \sum_{i=\dots}^{\dots} a_i \qquad \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} = \sum_{i=\dots}^{\dots} a_i \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{n+k} = \sum_{i=\dots}^{\dots} a_i$$

Binôme de Newton et symbole $\sum$

Théorème : Pour tous réels x et y, on a :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}$$

cette règle généralise les identités remarquables $(x+y)^2$ et $(x+y)^3$, elle s'appelle le binôme de Newton.

Exercice 6 :

En utilisant le binôme de Newton, déduisez la valeur de $S = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ et celle de $T = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$.

Écrire de deux façons différentes $S+T$. En déduire la valeur d'une somme.

Exemple : Montrer que le binôme de Newton s'écrit : $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}$.

En effet, en posant le changement d'indice : $i = n-k$ dans la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$, on a alors i varie de n à 0 (mais on écrit dans le sens de 0 à n) ; et on a : $S_n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{n-i}x^i y^{n-i}$. Et on conclue en se servant de la propriété des coefficients du binôme : $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$.

Sommes doubles

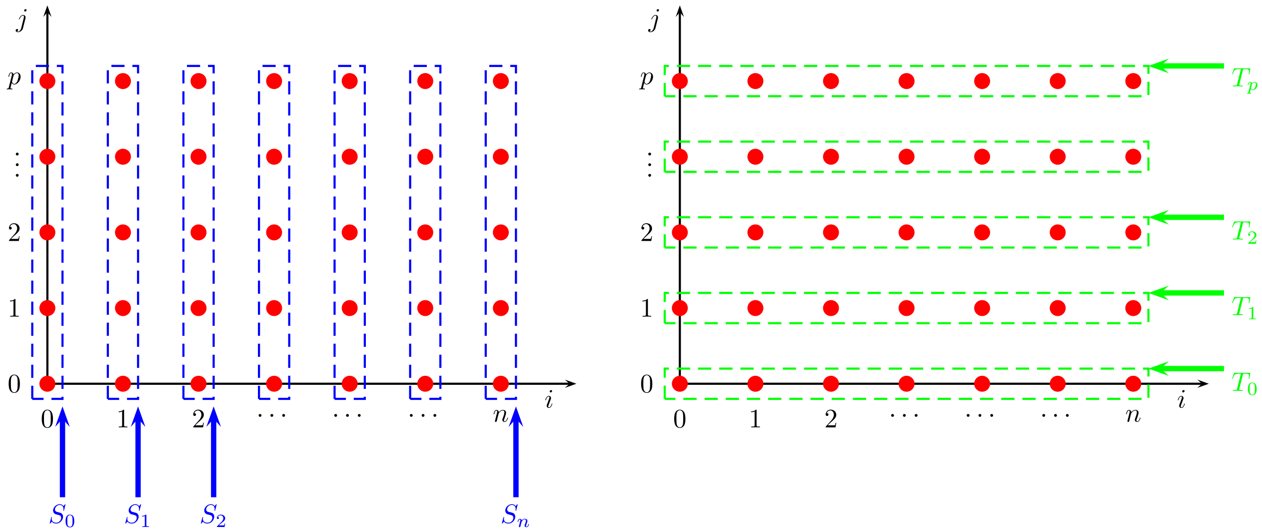
Il arrive qu'on ait à effectuer une somme double, c'est à dire une somme qui porte sur deux indices : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} a_{i,j}$

Le sens qu'il faut donner à cette somme double est que l'on fait pour tout i une somme sur j notée $S_i = \sum_{j=0}^{p} a_{i,j}$, puis la somme de tous les S_i : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n} S_i$

Si l'on fait un dessin (cf ci-dessous), chaque S_i représente la somme par colonnes (les j bougent).

Mais on pourrait considérer que l'on veut faire la somme par lignes, $T_j = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j}$ et on aurait la même somme en calculant $\sum_{j=0}^{p} T_j$; on écrit donc : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{p}\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}$

chaque point représente un terme $a_{i,j}$ de la somme double $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} a_{i,j}$



Exercice 8 : Somme double

Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} i \times j$ Calculer $T_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} i + j$

Calculer $U_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} j$ et $U'_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} i$ Calculer $V_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} j$ et $V'_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} i$

Exercice 9 : Somme double et changement d'ordre de la somme. Dire si chacune des égalités est vraie ou non :

$\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}$ Vrai Faux

$\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i \times b_j = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n} b_j$ Vrai Faux

$\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{i}\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}$ Vrai Faux

$\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{i,j}$ Vrai Faux

$\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}$ Vrai Faux

$\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{i,j}$ Vrai Faux

$\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}$ Vrai Faux

$\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=i}^{n}\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}$ Vrai Faux

Exercice 10 : Développement de polynômes

Si $P(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ et $Q(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} b_j x^j$, donner le développement du produit $P \times Q$ sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ en exprimant c_k en fonction des coefficients a_i et b_j.

Sommes télescopiques

Un des exemples d'application du symbole Σ est le calcul de sommes télescopiques : les termes de la somme s'éliminent deux à deux, sauf un nombre fini d'entre-eux. Par exemple,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$$

Exercice 11 : Simplifications de sommes télescopiques

Simplifier les sommes suivantes : $S = \sum_{k=0}^{n}(k+1) - \sum_{k=0}^{n} k =$ $\qquad T = \sum_{k=0}^{n}(k+2) - \sum_{k=1}^{n} k =$

Exercice 12 : Calcul de sommes télescopiques

1. Simplifier la somme suivante : $S = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 - \sum_{k=0}^{n} k^2$.

   En remarquant que $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, en déduire $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$. En déduire $\sum_{k=0}^{n} k$.

2. Simplifier la somme suivante : $T = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=0}^{n} k^3$.

   En remarquant que $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, en déduire $\sum_{k=0}^{n}(3k^2 + 3k + 1) = (n+1)^2$. En déduire $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

Exercice 13 : Utilisation de sommes télescopiques

Déterminer deux réels a et b tels que pour tout x réel strictement positif, on ait : $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $S_n = \dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n \times (n+1)}$

En utilisant ce qui précède, exprimer S_n en fonction de n. Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$?

Autres méthodes de calcul de sommes

Exercice 14 : Utilisation de la dérivation

En utilisant le développement de $P(x) = (x+1)^n$, calculer $S = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ et $T = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$.

Dériver $P'(x)$. En déduire $U = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Trouver une méthode similaire pour calculer $V = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

Exercice 15 : Le calcul différentiel au secours d'une sommation

Pour $x \in]-1;1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

Écrire $f(x)$ à l'aide du symbole $\sum$. Faire de même pour $f'(x)$.

Donner une expression "simple" de $f(x)$; en déduire que la dérivée f' de f peut aussi s'écrire :

$f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} + \left(\dfrac{nx - (n+1)}{(1-x)^2}\right) x^n$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2^k}$. Remarquer que $S_n = xf'(x)$ pour une valeur de x bien choisie. Donner la valeur de la somme S_n en fonction de n. Quelle est la limite lorsque n tend vers $+\infty$?

solutions des exercices

Exercice 1 : Traduire à l'aide du symbole $\sum$ les sommes suivantes :

SOLUTION :

$S_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 13^2 + 14^2$ s'écrit aussi $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{14} k^2$

$S_2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots + 103^2 + 104^2$ s'écrit aussi $S_2 = \sum\limits_{k=3}^{104} k^2$

$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{101}{102} + \frac{102}{103}$ s'écrit aussi $S_3 = \sum\limits_{k=1}^{102} \frac{k}{k+1}$

$S_4 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 13^2 + 15^2$ s'écrit aussi $S_4 = \sum\limits_{k=0}^{7} (2k+1)^2$; autre possibilité $S_4 = \sum\limits_{j=1}^{8} (2j-1)^2$

$S_5 = 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 6$ s'écrit aussi $S_5 = \sum\limits_{k=1}^{4} k(k+2)$

$S_6 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125$ s'écrit aussi $S_6 = \sum\limits_{k=1}^{5} k^3$

Exercice 2 : Développer chacune des sommes écrites à l'aide du symbole $\sum$, en faisant disparaître ce symbole :

SOLUTION :

$T_1 = \sum\limits_{k=3}^{10} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{10^2} == \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{100}$

$T_2 = \sum\limits_{k=1}^{10} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{21}$

$T_3 = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(k+1)!}{k} = \frac{2!}{1} + \frac{3!}{2} + \cdots + \frac{(n+1)!}{n}$

Exercice 3 : Calculer chacune des sommes suivantes, ou en donner la meilleure expression possible :

SOMME DES TERMES D'UNE SUITE ARITHMÉTIQUE :

SOLUTION :

$3 + 7 + 11 + \cdots + 43 + 47 = \sum\limits_{k=0}^{11} (4k+3) = 12 \times \frac{3+47}{2} = 300$

$\sum\limits_{k=10}^{92} (3k+5) = (92 - 10 + 1) \times \frac{35+281}{2} = 83 \times 208 =$

$\sum\limits_{k=1}^{n} k = n \times \frac{1+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ $\sum\limits_{k=0}^{n} k = (n+1) \times \frac{0+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

$\sum\limits_{k=0}^{i} k = (i+1) \times \frac{0+i}{2} = \frac{i(i+1)}{2}$

$\sum\limits_{k=1}^{n} 2 = 2n$ $\sum\limits_{k=i}^{n} 3 = 3(n-i+1)$ $\sum\limits_{k=0}^{i} 7k = (i+1) \times \frac{0+7i}{2} = \frac{7i(i+1)}{2}$

SOMME DES TERMES D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE :

SOLUTION :

$3 + 6 + 12 + \cdots + 768 = \sum\limits_{k=0}^{8} 3 \times 2^k = 3 \times \frac{1-2^9}{1-2} = 1533$ $\sum\limits_{k=10}^{92} 3^k = 3^{10} \times \frac{1-3^{83}}{1-3}$

$\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $\sum\limits_{k=1}^{n} x^k = x \times \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x-x^{n+1}}{1-x}$

$\sum\limits_{k=i}^{n} x^k = x^i \times \frac{1-x^{n-i+1}}{1-x} = \frac{x^i - x^{n+1}}{1-x}$ $\sum\limits_{k=0}^{i} x^k = \frac{1-x^{i+1}}{1-x}$

Exercice 4 : À l'aide d'une ré-indexation, montrer la règle sur les suites télescopiques :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$$

Solution :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} u_{k+1}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) \quad \text{par linéarité} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n+1} u_i\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) \quad \text{en posant le changement d'indice } i=k+1 \\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right) + u_{n+1}\right) - \left(u_0 + \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)\right) \quad \text{en décomposant les sommes} \\
&= u_{n+1}-u_0 \quad \text{après simplification}
\end{aligned}$$