المستوى: ثالثة ثانوي — السنة الدراسية: 2013/2012 — إعداد الأستاذ: حليلات عمار

الشعبـة: علوم تجريبية + رياضيات و تقني رياضي

## المحور: الهندسة في الفضاء

زمرة التمارين رقم (06)

*Géométrie dans l'espace*

## الهندسة في الفضــاء + التدريب على حل تمارين بكالوريات جزائرية و أجنبية

## 1- تذكير و مراجعات الجداء السلمي في المستوي وتطبيقاته و المرجح

### التمرين 01

ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. لتكن النقط :

$A\left(-1;4\right)$ , $B\left(2;1\right)$ ,$C\left(-4;-5\right)$ ,$D\left(-2;1\right)$

1. اثبت إن النقط $A$ ، $C$ و $D$ في استقامية.
2. أثبت أن المثلث $ABC$ قائم ثم احسب مساحته
3. اوجد قيسا للزاوية $\widehat{BAC}$
4. اكتب معادلة للعمــود المتعلق بالضلع $[AC]$
5. عيّن معادلة للدائرة $(C)$ المحيطة بالمثلث $ABC$. ثم عيّن معادلة لمماس الدائرة $(C)$ في $A$.
6. عيّن إحداثيات النقطة $E$ حتى يكون الرباعي $ABCD$ مستطيل
7. عيّن إحداثيات النقطة $I$ مركز ثقل المثلث $ABC$ ثم استنتج مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6$

### التمرين 02

ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ .

نعتبر النقطتين $A\left(-1;-1\right)$ ، $B\left(1;3\right)$ والدائرة **(C)** التي معادلتها :

$$x^2+y^2+4x-2y-8=0$$

1. عيّن التمثيل الوسيطي للمستقيم $(AB)$ ثم معادلة ديكارتية لــه .
2. حدد المركز $\omega$ ونصف قطر للدائرة **(C)**

3. أ)حدد معادلة ديكارتية للمستقيم $(\Delta)$ المار من $E\left(5;3\right)$ و $\vec{n}(1;2)$ شعاع ناظمي له.

ب) بيّن أن تقاطع $(C)$ و $(\Delta)$ مجموعة خالية .

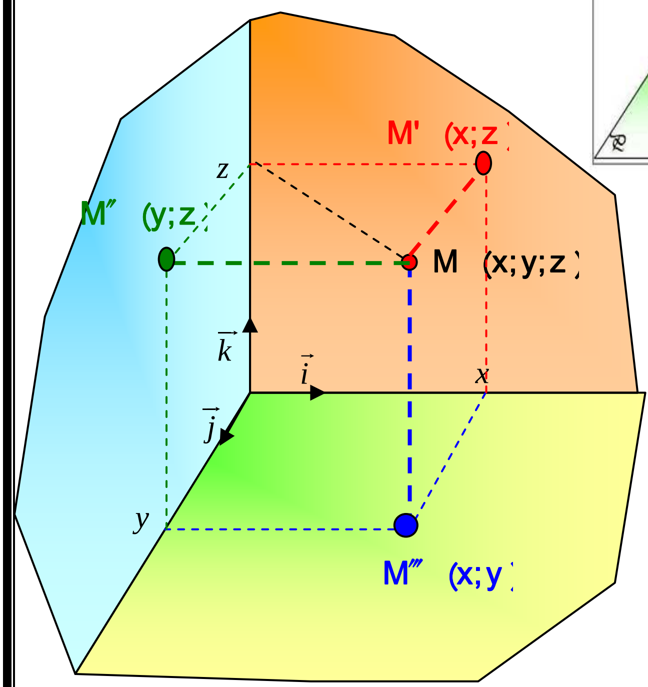
4.تأكد أن $\left(AB\right)$ و$(C)$ يتقاطعان وحدد تقاطعهما.

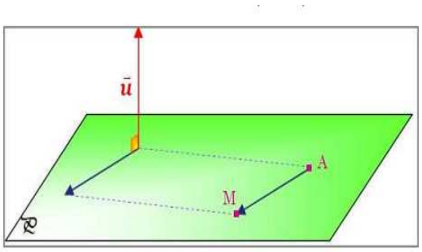
5. نريد حساب المسافة بين مركز الدائرة $(C)$ والمستقيم $\left(AB\right)$ بطريقة ثانية :

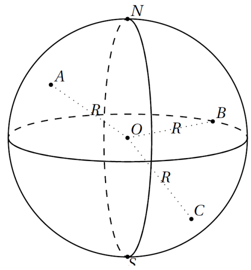
باختيار $M$ نقطة متغيرة من $\left(AB\right)$ وحساب المسافة $\omega M$ بدلالة متغير ثم تعيين قيمتها الحدية .

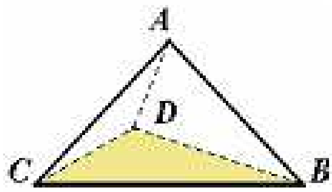
6. عيّن وأنشئ $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تحقق: $MA^2+3MB^2=20$

## 2-الجداء السلمي في الفضاء و توظيفه في : التعامد – تعيين معادلة ديكارتية لمستوي– حساب المسافة بين نقطة و مستوي- تعيين معادلة سطح كرة




### التمرين 03

$ABCDEFGH$ مكعب ضلعه $a$ .

1/ احسب الجداءات السلمية الآتية :

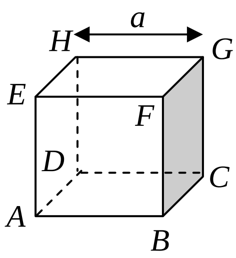
أ) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، ب) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ ، ج) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{FG}$ ، د) $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{HF}$

2/ أثبت ان المستقيم $\left(AG\right)$ عمودي على المستوي $\left(BED\right)$

3/ نعتبر المعلم $\left(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH}\right)$ .

أ) عيّن إحداثيات النقط $A$ ، $G$ ، $B$ ، $E$ و $D$

ب) اثبت مجددا أن المستقيم $\left(AG\right)$ عمودي على المستوي $\left(BED\right)$






إعداد الأستاذ
حليلات عمار

## التمرين 04

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء.

نعتبر النقط : $A(-1;0;2)$ ، $B(-3;2;4)$ و $C(1;-1;-2)$

1/ بيّن أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا

2/ أثبت أن $\vec{n}(3;2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$

3/ استنتج معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.

4/ عيّن معـادلة ديكارتية للمستوي $(P)$ الذي يشمـل النقطة $E(4;-1;-2)$ و الموازي للمستوي $(ABC)$

## التمرين 05

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء.

نعتبر النقط $A(1,0,-1)$ ، $B(2,2,3)$ ، $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$

1. اثبت أن المثلث $ABC$ قائم ثم أحسب مساحته.

2. أ) عين شعاع ناظميا للمستوي $(ABC)$

ب) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.

3. عين بعد النقطة $D$ عن المستوي $(ABC)$ ، ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $DABC$.

## التمرين 06 (بكالوريا شعبة علوم تجريبية دورة 2008 )

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط . عيّن الجواب الصحيح معللا اختيارك .نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط :

$A(1;3;-1)$ ، $B(4;1;0)$ ، $C(-2;0;-2)$ ، $D(3;2;1)$

و المستوي $(P)$ الذي معادلته : $x-3z-4=0$ .

1) المستوي $(P)$ هو : ج1) $(BCD)$ ، ج2) $(ABC)$ ، ج3) $(ABD)$

2) شعاع ناظمي للمستوي $(P)$ هو :

ج1) $\vec{n_1}(1;2;1)$ ، ج2) $\vec{n_2}(-2;0;6)$ ، ج3) $\vec{n_3}(2;0;-1)$

3) المسافة بين النقطة $D$ و المستوي $(P)$ هي: ج1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ، ج2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ، ج3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$



إعداد الأستاذ: حليلات عمار

## التمرين 07 (بكالوريا شعبة علوم تجريبية دورة 2009

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.نعتبر النقط :

$A\left(2;3;-1\right)$ ، $B\left(1;-2;4\right)$ ، $C\left(3;0;-2\right)$ ، $D\left(1;-1;-2\right)$

وليكن $\left(\pi\right)$ المستوي المعرف بمعادلته الديكارتية : $2x-y+2z+1=0$

**المطلوب :أجب بصحيح او خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية :**

1.النقط $A$ ، $B$ و $C$ في استقامية .

2.$\left(ABD\right)$ مستوي معادلة ديكارتية له : $25x-6y-z-33=0$

3.المستقيم $\left(CD\right)$ عمودي على المستوي $\left(\pi\right)$.

4.المسقط العمودي للنقطة $B$ على $\left(\pi\right)$ هو النقطة : $H\left(1;1;-1\right)$

## التمرين 08 (بكالوريا شعبة علوم تجريبية دورة 2009 )

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ .

نعتبر النقط $A\left(1;0;2\right)$ ، $B\left(0;2;1\right)$ ، $C\left(2;1;3\right)$

1) $\left(P\right)$ مستو معادلة له من الشكل $x-z+1=0$

أ) بيّن أن المستوي $\left(P\right)$ هو المستوي $\left(ABC\right)$ .

ب) ما طبيعة المثلث $\left(ABC\right)$

2) أ) تحقق من أن النقطة $D\left(2;3;4\right)$ لا تنتمي إلى $\left(ABC\right)$ .

ب) ما طبيعة $ABCD$

3) أ) احسب المسافة بين $D$ و المستوي $\left(ABC\right)$ .

ب) احسب حجم $ABCD$

## التمرين 09

نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ، النقطتين

$A\left(2;0;1\right)$ و $B\left(-1;0;2\right)$ و $\left(P_1\right)$ مستوي معادلتـه الديكارتية $x-y-2z+2=0$

1) اكتب معادلة ديكارتية للمستـوي $\left(P_2\right)$ الذي يشمل $A$ و $\overrightarrow{0A}$ شعاع ناظمي لـه .

2) أثبت أن المستويين $\left(P_1\right)$ و $\left(P_2\right)$ متعامدان.

3) احسب المسافة بين $B$ و $\left(P_1\right)$ ثم بين $B$ و $\left(P_2\right)$

4)استنتج المسافة بين النقطة $B$ و مستقيم تقاطع المستويين $\left(P_1\right)$ و $\left(P_2\right)$



إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

## التمرين 10

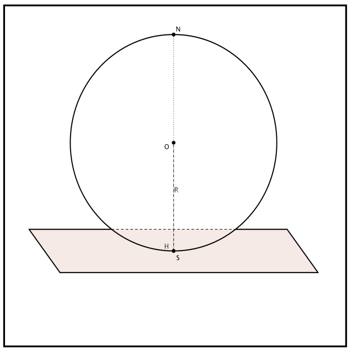
نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط :

$A(1;2;-2)$ ، $B(0;3;-3)$ ، $C(1;1;-2)$ و المستوي $(P)$ الذي معادلته : $x+y-3=0$

1) أ- احسب مسافة النقطة $\Omega(0;1;-1)$ عن المستوي $(P)$ .

ب- استنتج أن معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$ التي مركزها $\Omega(0;1;-1)$

و المماسة للمستوي $(P)$ هي : $x^2+y^2+z^2-2y+2z=0$



2) أ- بيّن أن النقـط **A**، **B** و **C** تعيّن مستويا.

ب- عيّن شعاع ناظمي $\vec{n}$ للمستوي $(ABC)$

جـ- استنتج معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

3) أ-تحقق من أن سطح الكرة $(S)$ مماسة للمستوي $(ABC)$.

ب- احسب المسافة $\Omega C$ واستنتج نقطة تماس $(S)$ و المستوي $(ABC)$ .

## التمرين 11

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط :

$A(0;0;1)$ ، $B(2;4;-1)$ ، $C(4;-4;-3)$ ، $S(4;0;4)$ ، $H\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$

1) اثبت أن المثلث $ABC$ قائم في $A$ .

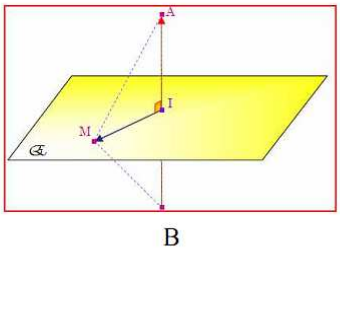
2) أ- بيّن أن الشعاع $\overrightarrow{SH}$ عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

ب- استنتج معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

3) تحقق أن النقطة $H$ هي المسقط العمودي للنقطة $S$ على المستوي $(ABC)$

4) احسب حجم رباعي الوجوه $SABC$

## التمرين 12




في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء.

1) أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة ( **S** )التي قطرها $[AB]$حيث:

**A( 7 ; 2 ; - 2 )** و **B( - 3 ; 0 ; - 4 )**

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$ مماس ( **S** ) في **A** .

3) اوجد معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ محور القطعة $[AB]$



إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

## التمرين 13

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء . تعطى النقط

$A(3;-2;2)$ ، $B(6;1;5)$ ، $C(6;-2;-1)$ ، $D(0;4;-1)$

**بيّن – مع التعليل – صحة أو خطأ الجمل التالية :**

1) المثلث $ABC$ قائم في $A$

2) المستوي $(P)$ ذو المعادلة : $x+y+z-3=0$ عمودي على المستقيم $(AB)$ ويشمل النقطة $A$

3) معادلة المستوي $(P')$ العمودي على $(AC)$ والذي يشمل النقطة $A$ هي : $x+z-5=0$

4) المستقيم $(AD)$ عمودي على المستوي $(ABC)$

5) الشعاع $\vec{u}(1;-2;1)$ شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$ تقاطع $(P)$ و $(P')$.

6) حجم رباعي الوجوه $ABCD$ هو 81 وحدة حجوم . 7) قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{3\pi}{4}$ راديان

8) مساحة المثلث $BDC$ هي 21 وحدة مساحة . 9) بعد $A$ عن المستوي $(BDC)$ يساوي 3

## التمرين 14

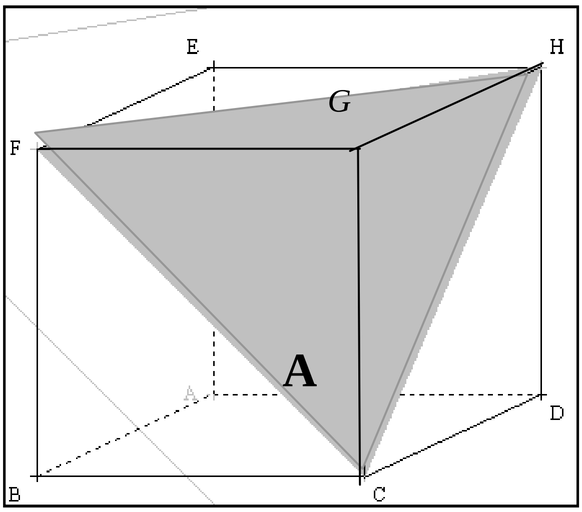
نعتبر المكعب **ABCDEFGH** .

1. بين أن المستقيم ( **AG** ) عمودي على المستوي ( **CFH** ).( الشكل 1)

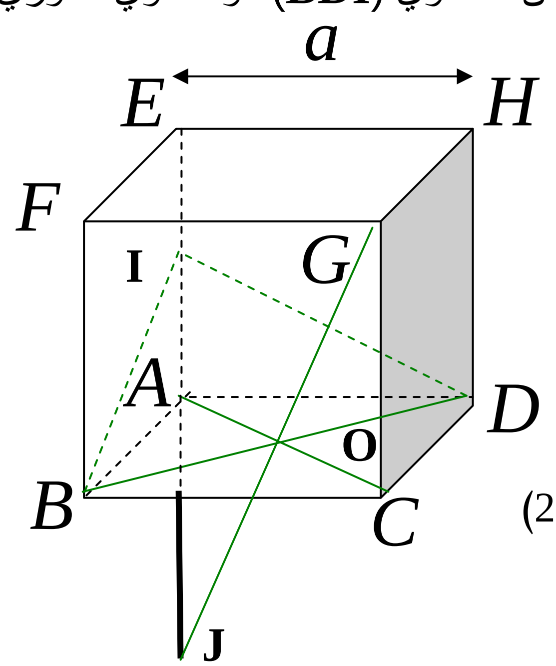
2. أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{HC}$ .( الشكل 2)

3. نعتبر النقطة **I** منتصف الحرف **[AE]** والنقطة **J** بحيث تكون النقطة **A** منتصف القطعة **[EJ]**

- أثبت أن المستوي **(BDI)** هو مستوي محوري للقطعة **[GJ]** . ( الشكل 2)



( الشكل 1)



( الشكل 2)



إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

## التمرين 15

نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، النقطتين $A(0;-1;1)$ و $B(1;-1;0)$ وسطح الكرة $(S)$ التي معادلتــها :

$$x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$$

1) عيّن $\omega$ مركز سطح الكرة $(S)$ و نصف قطرها

2) تحقق من أن $A$ تنتمي إلى $(S)$

3) تحقق أن $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ غير مرتبطين خطيا ثم عيّن المعادلة الديكارتية للمستوي $(OAB)$

4) بيّن أن المستوي $(OAB)$ مماس لسطح الكرة $(S)$ في النقطة $A$.

## التمرين 16

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط :

$A(1;-2;4)$ ، $B(-2;-6;5)$ ، $C(5;1;2)$ ، $D(1;-5;-8)$ ، $E(-4;0;-3)$

1.أ) بيّن أن الشعاع $\vec{n}(a,b,c)$ يكون ناظميا للمستوي $(ABC)$ إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{cases} 3a+4b-c=0 \\ 4a+3b-2c=0 \end{cases}$$

ب) استنتج شعاعا ناظميا للمستوي $(ABC)$ بمركبات صحيحة .

ج) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

2.هل المستقيم $(AE)$ عمودي على المستوي $(ABC)$ ؟

3.هل المستويان $(ABC)$ و $(ADE)$ متعامدان ؟

## التمرين 17

رباعي وجوه $ABCD$ بحيث : $AC=BD$ و $AD=BC$

ونعتبر النقطة $I$ منتصف القطعة $[AB]$ و النقطة $J$ منتصف القطعة $[CD]$ .

1.برهن أن $AC^2+AD^2=2AJ^2+\frac{1}{2}CD^2$ و $BC^2+BD^2=2BJ^2+\frac{1}{2}CD^2$

2. استنتج أن المستقيمين $(IJ)$ و $(AB)$ متعامدان.



إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

# 3-التمثيل الوسيطي لمستقيم ومستوي + المرجح + دراسة مجموعات نقط

## التمرين 18

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء. تعطى النقط

$A(2;-3;0)$ ، $B(-1;2;4)$ ، $C(-3;3;0)$

/1 اوجد تمثيل وسيطي لـ: أ) المستقيم $(AB)$ . ب) نصف المستقيم $[BC)$. ج) القطعة $[BC]$

/2 -هل النقطتان $E(-4;7;8)$ ، $F(2;2;4)$ تنتميان إلى $(AB)$؟

/3 نعتبر المستقيم $(D)$ الذي تمثيله الوسيطي : $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=-t \\ z=-3-2t \end{cases}$

- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(D')$ الذي يوازي $(D)$ ويشمل النقطة $C$

## التمرين 19 (بكالوريا شعبة رياضيات الجزائر دورة 1991 )

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء محاوره $(OX)$ ، $(OY)$ ، $(OZ)$

نعتبر النقطة $A(1;-2;4)$ والمستوي $(P)$ الذي معادلته : $2x-3y+z+2=0$

1. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $A$ و يعامد المستوي $(P)$ .
2. عيّن إحداثيات النقطة $B$ تقاطع $(\Delta)$ و $(P)$ .
3. اكتب معادلة لسطح الكرة $(S)$ التي مركزها $A$ والتي تمس المستوي $(P)$.
4. عيّن إحداثيات $C$ ، $D$ نقطتي تقاطع سطح الكرة $(S)$ والمستقيم $(OZ)$
5. ما هي إحداثيات مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$

## التمرين 20

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء. نعتبر المستويين المعرفين بالمعادلتين التاليتين :

$(P): x+2y-z+1=0$ و $(P'): -x+y+z=0$ و النقطة **A( 0; 1 ; 1 )**

1. بيّن أن المستويين متعامدان
2. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(D)$ تقاطع المستويين $(P)$ و $(P')$
3. عيّن بعد النقطة **A** عن المستوي $(P)$ و عن $(P')$



إعداد الأستاذ
حليلات عمار

4.استنتج بعد النقطة **A** عن المستقيم $(D)$

5.باستعمال التمثيل الوسيطي للمستقيم $(D)$ ومفهوم القيم الحدية استنتج من بعد النقطة **A** عن $(D)$

**(BAC LIBAN 2006)**

## التمرين 21

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء .تعطى النقط :

C( 3; 2 ; 4 ) ، B(-3; -1 ; 7) ، A( 2; 1 ; 3 )

1.أثبت أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة.

2. ليكن (d) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي : $(t \in R)$ $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$

أ) بيّن أن المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC ) .

ب) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC )

3. لتكن H النقطة المشتركة للمستقيم (d) والمستوي (ABC ).

أ) بيّن أن النقطة H مرجح الجملة $\{( A;-2),(B;-1),(C;2)\}$

ب)عيّن طبيعة المجموعة $(\Gamma_1)$ للنقط M من الفضاء والتي تحقق :

$\left(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$ وحدد العناصر المميزة

جـ) عيّن طبيعة المجموعة $(\Gamma_2)$ للنقط M من الفضاء والتي تحقق :

$\left\|-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \sqrt{29}$ وحدد العناصر المميزة

د) عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة $(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$ .

هـ) هل النقطة **S( -8; 1 ; 3 )** تنتمي للمجموعة $(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$.

*(d'après Bac 2001 polynésien française septembre)*

## التمرين 22

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ . تعطى النقط :

$S\left(0;3;\frac{1}{2}\right)$ ، $D(4;1;1)$ ، $B(0;3;-4)$ ، $A(2;-1;0)$

1/ عين إحداثيات النقطة $C$ حتى يكون $ABCD$ متوازي أضلاع.

2/ احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ . استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$

3/ أ) اوجد تمثيلا وسيطيا للمستوي $(ABD)$ . ب)استنتج معادلة ديكارتيه له.

4/ أ) اوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$الذي يشمل $S$ ويعامد المستوي $(ABD)$

ب) اوجد إحداثيات النقطة $I$ تقاطع المستقيم $(\Delta)$ و المستوي $(ABD)$

ج) برهن أن $I$ نقطة من القطعة $[BD]$ وحدد موقعها بالنسبة للنقطتين $B$ و $D$

5 / احسب حجم الهرم $ABCDS$

## التمرين 23

( **P** ) مجموعة النقط المعرفة بالتمثيل الوسيطي

$$(P):\begin{cases} x = 1+t+2m \\ y = -2+3t \quad t,m\in\mathbb{R} \\ z = 1-m \end{cases}$$

نعتبر النقطة **( 1 ; -2 ; 1 )A** و الشعاعين $\vec{u}(1;3;0)$ و $\vec{v}(2;0;-1)$

1) بين أن ( **P** ) هو مستوي المعلم $(A;\vec{u};\vec{v})$

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي ( **P** )

## التمرين 24

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء .تعطى النقط :

$A(1;-2;5)$ ، $B(-2;0;3)$ ، $C(3;-1;4)$

**/1** بيّن أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا

/2 عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي $(ABC)$ ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

/3 تحقق أن النقطة $D(-3;3;0)$ تنتمي إلى المستوي $(ABC)$ .

/4 عّلل وجود ثلاثة أعداد حقيقية $\alpha$ ، $\beta$ و $\gamma$ حتى يكون $D$ مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$ عين الثلاثية $(\alpha,\beta,\gamma)$

/5 هل النقطة $D$ تنتمي إلى داخل المثلث $(ABC)$ ؟ علل

## التمرين 25

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء.

**/1**فسر الجملة التالية هندسيا $\begin{cases} x-2y-z-3=0 \\ 2x-3y+2z=4 \end{cases}$

/2هل جملة المعادلتين $\begin{cases} x-2y-z-3=0 \\ 2x-3y+2z=4 \end{cases}$ و التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x=-1+9t \\ y=-2-4t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$

يعرفان نفس المستقيم ؟

## التمرين 26

$D(0;4;-1), C(6;-2;-1), B(6;1;5)$ , $A(3;-2;2)$ أربع نقط من الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1. بين أن المثلث $ABC$ قائم .
2. جد معادلة ديكارتية للمستوي $(DBC)$.
3. أثبت أن المستقيم $(AD)$ عمودي على المستوي $(ABC)$.
4. استنتج حجم رباعي الوجوه $ABCD$.
5. أثبت أن قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{\pi}{4}$ راديان.
6. أحسب بعد النقطة $A$ عن $(BDC)$.
7. نعتبر المستويين $(P_2),(P_1)$ حيث : $(P_1): x+y+z-3=0$ و $(P_2): x-z-1=0$
   - أثبت أن $(P_2),(P_1)$ يتقاطعان في مستقيم $(\Delta)$ .
   - أثبت أن النقطة $A$ تنتمي إلى $(\Delta)$.
   - أثبت أن الشعاع $\vec{u}(1;-2;1)$ شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$.
   - استنتج تمثيلا وسيطيا لـ $(\Delta)$.

## التمرين 27

الفضــاء منسـوب إلى المعلم المتعـامد و المتـجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

$x-y+z-11=0$ معادلة ديكارتية للمسـتوي $(P)$ الذي يمس سطح الكرة $(S)$ ذات المركز $w(1;-1;3)$.

1/ جد نصف قطر سطح الكرة $(S)$، ثم أستنتج معادلة ديكارتية لـ : $(S)$.

2/ جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(D)$ الذي يشمل النقطة **w** والعمودي على $(P)$ .

3/لتكن النقطة $H$ نفطه تماس $(S)$ والمستوي $(P)$ ، عين إحداثيات النقطة $H$ .

4/ عين إحداثيات النقط المشتركة بين $(S)$ و حامل محور الفواصل .

5/ المستويان $(P_1)$ و $(P_2)$ معادلتيهما على الترتيب: $x-y-2z-3=0$ و $2x+y-z-2=0$.

- جد معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل النقطة $B(3,-6,2)$ والعمودي على كل من المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$

## التمرين 28

$C, B, A$ ثلاث نقط من الفضاء

1.أنشئ $G$ مرجح الجملة $\{(B;-1),(C;2)\}$ و $F$ مرجح الجملة $\{(A;-2),(B;2),(C;-4)\}$

2.بين أن $F$ مرجح جملة نقطتين مرفقتين بمعاملين يطلب تحديدهما

3.عين $(\Gamma_1)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MG}\right\| = 2\left\|2\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\right\|$$

4.عين $(\Gamma_2)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق : $MA^2+MG^2=1$

5.عين $(\Gamma_3)$ مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق : $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MG})\cdot(\overrightarrow{MF}-\overrightarrow{MG})=0$

# 4-الأوضاع النسبية في الفضاء لمستقيمين ، لمستويين ، لمستقيم ومستوي ، لمستوي وسطح كرة ، تقاطع ثلاث مستويات ،

## التمرين 29

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ .

**I -** نعتبر المستقيمات $d_1$ ، $d_2$ ، $d_3$ ممثلة وسيطيا على الترتيب

$d_1: \begin{cases} x=-2+5t \\ y=-1-t \\ z=3+4t \end{cases} (t\in R)$ ، $d_2: \begin{cases} x=1-t' \\ y=4+3t' \\ z=5-t' \end{cases} (t'\in R)$ ، $d_3: \begin{cases} x=-7+7t'' \\ y=-3t'' \\ z=2t'' \end{cases} (t\in R)$

1- أدرس تقاطع $d_1$ و $d_2$ وعين تمثيلا وسيطيا للمستوي $(P)$ الذي يشمل $d_1$ و $d_2$.

2- استنتج معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$

3-أدرس تقاطع $d_1$ و $d_3$

**II- $(P_1)$ ، $(P_2)$ ، $(P_3)$ ثلاث مستويات التي معادلات ديكارتية لها على الترتيب**

$2x-y-2z-1=0$ ، $-x+4y+z-3=0$ ، $4x-2y-4z-5=0$

- **أدرس الوضعية النسبية لـ** a) $(P_1)$ ، $(P_2)$

b) $(P_1)$ ، $(P_3)$



إعداد الأستاذ
حليلات عمار

## التمرين 30

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ .

نعتبر المستويين المعرفين بمعادلتين ديكارتيين كما يلي :

$$(P):x+y=-1 \quad ، \quad (R):2x+y+2z=0$$

1) تحقق أن المستويين يتقاطعان وفق مستقيم ( D ) يشمل النقطة **A( 1 ; -2 ; 0 )** و موجه بالشعاع $\vec{u}(-2;2;1)$

2) استنتج تمثيلا وسيطيا للمستقيم ( **D** ).

3) بين أن المستقيم ( **D** ) و المستوي ( **P'** ) الذي معادلته **4 x + 4 y + z + 3 = 0** يتقاطعان

4) استنتج حل الجملة

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+y+2z=0 \\ 4x+4y+z+3=0 \end{cases}$$

## التمرين 31

*(BAC Antilles -Guyane 2008)*

**(أسئلة متعددة الاختيارات)**

كل سؤال يتضمن أربع اختيارات من بينها اختيار واحد صحيح ، عيّنه مبررا إجابتك . الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ بحيث : $\begin{cases} 2x-6y+2z-7=0 \\ -x+3y-z+5=0 \end{cases}$ هي :

ج1:مجموعة خالية ، ج2) مستقيم ، ج3) مستوي ، ج4) نقطة

2) المستقيمان الممثلان وسيطيا كما يلي : $\begin{cases} x=1-t \\ y=-1+t \\ z=2-3t \end{cases} \; (t\in\mathbb{R})$ و $\begin{cases} x=2+t \\ y=-2-t \\ z=4+2t \end{cases} \; (t\in\mathbb{R})$

ج1: متوازيان تماما ، ج2: متطابقان ، ج3: متقاطعان ، ج4) :ليسا من مستوي واحد

3) المسافة بين النقطة $A(1;-2;1)$ والمستوي الذي معادلته : $-x+3y-z+5=0$ هي :

ج1: $\frac{3}{11}$ ، ج2) : $\frac{3}{\sqrt{11}}$ ، ج3: $\frac{1}{2}$ ، ج4: $\frac{8}{\sqrt{11}}$

4) إحداثيات $H$ المسقط العمودي للنقطة $B(1;6;0)$ على المستوي الذي معـــادلته: $-x+3y-z+5=0$ هي :

ج1: $(3;1;5)$ ، ج2: $(2;3;1)$ ، ج3: $(3;0;2)$ ، ج4: $(-2;3;-6)$

## التمرين 32

نعتبر في الفضاء $(E)$ المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط :

$A(0;-1;2)$ ، $B(1;1;2)$ ، $C(2;-1;0)$ و المستوي : $(P):-2x+y+2z+2=0$

و سطح الكرة : $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$

1) أوجد المعادلة الديكارتية للمستوي $(ABC)$ .

2) حدد النقطة $\Omega$ مركز سطح الكرة $(S)$ و نصف قطرها $R$

3) برهن أن المستوي $(ABC)$ مماس لسطح الكرة $(S)$ في نقطة $E$ ينبغي تحديد إحداثياتها.

4) بيّن أن المستوي $(P)$ يقطع سطح الكرة $(S)$ وفق دائرة $(C)$ محددا إحداثيات مركزها $H$ ونصف قطرها $r$

## التمرين 33

**BAC Antilles -Guyane 2005**

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء.

عيّن، في كل حالة مما يلي، النتيجة أو النتائج الصحيحة مع التبرير.

1/ المستقيم الذي يشمل $A(1;2;-4)$ و $B(-3;4;1)$ والمستقيم الذي تمثيله الوسيطي معرف بـ:

$$\begin{cases} x=-11-4t \\ y=8+2t \\ z=11+5t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

□ متقاطعان  □ متوازيان تماما  □ متطابقان  □ ليسا من مستوي واحد

2/ ليكن المستوي $(P)$ المعرف بالمعادلة : $2x+3y-z+4=0$ والمستقيم $(d)$ المعرف بـ:

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=8+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

□ $(P)$ و $(d)$ متقاطعان  □ $(P)$ و $(d)$ متوازيان تماما

□ $(d)$ محتواه في $(P)$  □ لآ احد من هذه الإمكانيات صحيحة

3/ المسافة بين النقطة $A(1;2;-4)$ والمستوي المعرف بالمعادلة : $2x+3y-z+4=0$

□ $\frac{8\sqrt{14}}{7}$  □ $16$  □ $8\sqrt{14}$  □ $\frac{8}{7}$

4/ لتكن النقطة $B(-3;4;1)$ وسطح الكرة $(S)$ المعرف بالمعادلة : $x^2+y^2+z^2=16$

□ $B$ داخل $(S)$  □ $B$ خارج $(S)$  □ $B$ نقطة من $(S)$  □ لا نعرف

## التمرين 34

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.نعتبر النقطتين :

$A\left(2;1;-2\right)$ ، $B\left(3;-1;0\right)$ و الشعاع $\vec{u}\left(1;2;-1\right)$ و المستوي $\left(P\right)$ الذي معادلته :

$x-y+2z-3=0$

ملاحظة :**الأسئلة مستقلة عن بعضها.**

1) عيّن العناصر المميزة لمجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق : $\left\|4\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right\|=3$

2)عيّن إحداثيات النقطة $H$ المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستوي $\left(P\right)$

3)نعتبر المستقيم $\left(D\right)$ الذي يمر بالنقطة $A$ و يوازي الشعاع $\vec{u}$ و المستقيم $\left(D'\right)$ الذي تمثيله الوسيطي $\left(t\in\mathbb{R}\right)$ $\begin{cases}x=3+2t\\ y=1+2t\\ z=t\end{cases}$ . بيّن أن المستقيمين $\left(D\right)$ و $\left(D'\right)$ من نفس المستوي .

4)عيّن معادلة المجموعة $\left(\Gamma\right)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء المتساوية المسافة عن كل من $A$ و $B$

5) عيّن وضعية سطح الكرة الذي مركزه $B$ و نصف قطره $\frac{1}{2}$ بالنسبة للمستوي $\left(P\right)$.

6) عيّن بعد النقطة $A$ عن المستقيم $\left(D'\right)$ بطريقتين مختلفتين

## التمرين 35

الفضاء منسوب الى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

نعتبر مجموعة النقط من الفضاء و التي نرمز لها بالرمز ( $p_m$ ) و احداثياتها ( **x ; y ; z** ) تحقق $(3-m)x+4y-(1+2m)z-5=0$ مع **m** عدد حقيقي .

1) بين أنه من أجل كل قيم **m** الحقيقية فإن ( $p_m$ ) مستو

2) عين نقطة و شعاع توجيه للمستقيم ( **D**) تقاطع ( $p_0$ ) و ( $p_1$ )

3) بين أن ( **D** ) محتواة في كل المستويات ( $p_m$ )



إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

## التدريب 01

(بكالوريا الجزائر شعبة علوم تجريبية دورة 2012 )

الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ . نعتبر المستوي $(P)$ ذا المعادلة : $14x+16y+13z-47=0$ ، و النقط $A\left(1;-2;5\right)$ ، $B\left(2;2;-1\right)$ ، $C\left(-1;3;1\right)$

1) أ- تحقق أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية .

ب- بيّن أن المستوي $\left(ABC\right)$ هو $(P)$.

2)جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(AB\right)$.

3) أ- اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري $(Q)$ للقطعة $\left[AB\right]$.

ب- تحقق أن النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي $(Q)$.

جـ -احسب المسافة بين النقطة $D$ و المستقيم $\left(AB\right)$ .

## التدريب 02

(بكالوريا الجزائر شعبة علوم تجريبية دورة 2012 )

في الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط

$A\left(-1;0;1\right)$ ، $B\left(2;1;0\right)$ و $C\left(1;-1;0\right)$

1) بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا .

2) بيّن أن $2x-y+5z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $\left(ABC\right)$.

3) $D$ و $H$ نقطتان من الفضاء حيث : $D\left(2;-1;3\right)$ و $H\left(\frac{13}{15};-\frac{13}{30};\frac{1}{6}\right)$

أ- تحقّق أنّ النقطة $D$ لا تنتمي إلى المستوي $\left(ABC\right)$.

ب-بيّن أنّ النقطة $H$ هي المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $\left(ABC\right)$ .

جـ- استنتج أنّ المستويين $\left(ADH\right)$ و $\left(ABC\right)$ متعامدان ، ثم جد تمثيلا وسيطيا لتقاطعهما .

## التدريب 03

(بكالوريا الجزائر شعبة رياضيات دورة 2012 )

نعتبر في الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ، النقط

$A\left(3;0;0\right)$ ، $B\left(0;4;0\right)$ و $C\left(2;2;2\right)$

1) بيّن أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية و أن الشعاع $\vec{n}\left(4;3;-1\right)$ عمودي على كل من الشعاعين: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ .

2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$ الذي يشمل النقط $A$ ، $B$ و $C$.

3) أ- بيّن أنّ : $6x-8y+7=0$ معادلة ديكارتية للمستوي $\left(P'\right)$ مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء حيث : $AM=BM$

ب- بيّن أن : $2x-4y-4z+3=0$ معادلة ديكارتية للمستوي $\left(P''\right)$ مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء حيث : $AM=CM$ .

جـ- بيّن أنّ $\left(P'\right)$ و $\left(P''\right)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين تمثيل وسيطي له .

4) احسب إحداثيات النقطة $\omega$ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$ .

## التدريب 04

(بكالوريا الجزائر شعبة رياضيات دورة 2012 )

نعتبر في الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ، النقط

$A\left(1;1;1\right)$ ، $B\left(1;-1;0\right)$ و $C\left(2;0;1\right)$

1) بيّن أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعين مستويا $\left(P_1\right)$ يطلب تعيين تمثيل وسيطي له .

2) $\left(P_2\right)$ المستوي الذي : $x-2y-2z+6=0$ معادلة ديكارتية له ..

- بيّن أنّ $\left(P_1\right)$ و $\left(P_2\right)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين تمثيلا وسيطي له .

3) بيّن أن النقطة $O$ هي مرجح الجملة : $\left\{\left(A;1\right),\left(B;1\right),\left(C;-1\right)\right\}$

4) أ- عيّن $(S)$ مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{3}$$

ب -احسب إحداثيات $D$ و $E$ نقطتي تقاطع $(S)$ و $(\Delta)$ .

جـ - ماهي طبيعة المثلث $ODE$؟ ثم استنتج المسافة بين $O$ و $(\Delta)$



إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

## التدريب 05

(بكالوريا الجزائر شعبة تقني رياضي دورة 2012 )

الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

$(P)$ المستوي الذي يشمل النقطة $A\left(2;-5;2\right)$ و $\vec{n}\left(-2;1;5\right)$ شعاع ناظمي له .

$\left(Q\right)$ المستوي الذي : $x+2y-2=0$ معادلة له .

1- عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$.

2- بيّن أن المستويين $(P)$ و $\left(Q\right)$ متعامدان .

3- عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(\Delta\right)$ تقاطع المستويين $(P)$ و $\left(Q\right)$.

4- أ) احسب $d_1$ المسافة بين النقطة $K\left(3;3;3\right)$ و المستوي $(P)$ و $d_2$ المسافة بين النقطة $K$ و المستوي $\left(Q\right)$ .

ب) استنتج المسافة $d$ بين النقطة $K$ و المستقيم $\left(\Delta\right)$

5- احسب المسافة $d$ بطريقة ثانية .

## التدريب 06

(بكالوريا الجزائر شعبة تقني رياضي دورة 2012 )

الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ .

$\left(P\right)$ المستوي الذي : $-4x-3y+1=0$ معادلة ديكارتية له و $\left(D\right)$

المستقيم الذي : $k\in\mathbb{R}$, $\begin{cases} x=k \\ y=\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{3}k \\ z=\dfrac{-3}{4}+\dfrac{3}{4}k \end{cases}$ تمثيـــل وسيطي لــه .

1- تحقق أن المستقيم $\left(D\right)$ محتوى في المستوي $\left(P\right)$

2- أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(\Delta\right)$ الذي يشمل النقطة $A\left(1;1;0\right)$ و $\vec{u}\left(4;1;3\right)$ شعاع توجيه له

ب) عيّن إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين $\left(D\right)$ و $\left(\Delta\right)$.

3 - بيّن أنّ : $3x-4z-3=0$ هي معادلـــة ديكارتية للمستوي $\left(Q\right)$ الذي يحوي المستقيمـــين $\left(D\right)$ و $\left(\Delta\right)$.

4- $M\left(x;y;z\right)$ نقطة من الفضاء . أ) احسب المسافة بين النقطة $M$ و كل من $\left(P\right)$ و $\left(Q\right)$

ب) أثبت أنّ مجموعة النقط $M$ من الفضاء المتساوية المسافة عن كل من $(P)$ و $(Q)$هي اتحاد مستويين متعامدين $(P_1)$ و $(P_2)$ يطلب تعيين معادلة ديكارتية لكل منهما .

5- عيّن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي إحداثياتها حلول للجملة الآتية:

$$\begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ 3x-4z-3=0 \\ x+3y+4z+2=0 \end{cases}$$

## التدريب 07

**( بكالوريا شعبة علوم تجريبية دورة جوان 2011)**

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$،

المستوي $(\mathscr{P})$ الذي يشمل النقطة $A(1;-2;1)$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له ؛ وليكن $(\mathscr{Q})$ المستوي ذا المعادلة : $x+2y-7=0$

1.اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathscr{P})$ .

**2.** أ- تحقّق أن النقطة $B(-1;4;-1)$ مشتركة بين المستويين $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{Q})$

ب-بيّن أنّ المستويين $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{Q})$ متقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين تمثيل وسيطيّ له .

**3 .**لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$

أ- احسب المسافة بين النقطة $C$ و المستوي $(\mathscr{P})$ ثمّ المسافة بين النقطة $C$ و المستوي $(\mathscr{Q})$.

**ب**- أثبت أنّ المستويين $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{Q})$متعامدان .

**جـ**- استنتج المسافة بين النقطة $C$ و المستقيم $(\Delta)$

## التدريب 08

**( بكالوريا شعبة علوم تجريبية دورة جوان 2011)**

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط $A(0;1;5)$ ، $B(2;1;7)$ و $C(3;-3;6)$ .

**1.** أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $B$ و $\vec{u}(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له

ب-تحقق أن النقطة $C$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$ .

جـ - بيّن أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان .

د- استنتج المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $(\Delta)$.

**2.**نعتبر النقطة $M(2+t;1-4t;7-t)$ حيث $t$ عدد حقيقي ؛ و لتكن الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(t)=AM$.

أ- اكتب عبارة $h(t)$ بدلالة $t$ .



إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

ب-بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $t$ ؛ $h'(t)=\frac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$ .

حـ - استنتج قيمة العدد الحقيقي $t$ التي تكون من أجلها المسافة $AM$ أصغر ما يمكن .

- قارن بين القيمة الصغرى للدالة $h$ ، و المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $(\Delta)$

## التدريب 09

**( بكالوريا شعبة رياضيات لجزائر دورة جوان 2011)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ .

1/ نعتبر النقط $A(1;0;2)$ و $B(1;1;4)$ و $C(-1;1;1)$

أ/ أثبت أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا .

ب/ بيّن أن الشعاع $\vec{n}(3;4;-2)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

2/ نعتبر المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ حيث :

$(P_1):3x+4y-2z+1=0$ و $(P_2):2x-2y-z-1=0$ .

أ/ بيّن أن المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ متعامدان .

ب/ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ تقاطع المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$.

جـ/ تحقّق أن النقطة $O(0;0;0)$ لا تنتمي إلى $(\Delta)$ .

د/ احسب المسافتين $d(O;(P_1))$ و $d(O;(P_2))$ و استنتج المسافة $d(O;(\Delta))$ .

## التدريب 10

**( بكالوريا شعبة تقني رياضي الجزائر دورة جوان 2011)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ .

نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$

حيث : $\overrightarrow{AD}(1;5;2)$ ، $\overrightarrow{BD}(0;7;3)$ ، $\overrightarrow{CD}(1;-3;7)$ و $C(2;8;-4)$

1/ بيّن أن النقط $A$ ، $B$ ، $D$ تعيّن مستويا .

2/ بيّن أن المستقيم $(CD)$ يعامد المستوي $(ABD)$

3/ $I$ المسقط العمودي للنقطة $C$ على المستقيم $(AB)$

أ) بيّن أن المستقيم $(AB)$ يعامد المستوي $(CDI)$

ب) عيّن معادلة للمستوي $(CDI)$ و اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(AB)$

جـ) استنتج إحداثيات النقطة $I$

4/ احسب الأطوال $DI$ ، $CD$ ، $AB$ واستنتج حجم رباعي الوجوه $ABCD$

( حجم رباعي الوجوه = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة $\times$ الإرتفاع )



إعداد الأستاذ
حليلات عمار

## التدريب 11

**( بكالوريا شعبة رياضيات الجزائر دورة جوان 2011)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ .

نعتبر النقط $A\left(1;0;0\right)$ ، $B\left(0;2;0\right)$ ، $C\left(0;0;3\right)$ و $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)$

$\left(D\right)$ المستقيم الذي يشمل النقطة $A$ و شعاع توجيهه $\vec{u}\left(-1;1;\frac{3}{2}\right)$ و $\left(\Delta\right)$ المستقيم الذي يشمل النقطة $C$ و شعاع توجيهه $\vec{v}\left(\frac{1}{2};1;-3\right)$

1- اكتب تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين $\left(D\right)$ و $\left(\Delta\right)$ ثم ادرس الوضع النسبي لهما

2- بين أن : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة $G$ ؟

3- عيّن شعاعا ناظميا $\vec{n}$ للمستوي $\left(ABC\right)$ ثم اكتب معادلة له .

4- احسب المسافة بين النقطة $O$ و المستوي $\left(ABC\right)$ .

5- $H$ المسقط العمودي للنقطة $B$ على المستقيم $\left(D\right)$ .

أ) جد احداثيات النقطة $H$ .

ب) استنتج المسافة بين النقطة $B$ و المستقيم $\left(D\right)$

## التدريب 12

**( بكالوريا شعبة علوم تجريبية الجزائر دورة 2010)**

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

نعتبر المستوي $\left(\mathcal{P}\right)$ الذي معادلته : $x-2y+z+3=0$

1 ) نذكر أن حامل محور الفواصل $\left(O;\vec{i}\right)$ يعرف بالجملة $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

- عيّن إحداثيات $A$ نقطة تقاطع حامل محور الفواصل $\left(O;\vec{i}\right)$ مع المستوي $\left(\mathcal{P}\right)$ .

2) $B$ و $C$ النقطتان من الفضاء حيث : $B\left(0;0;-3\right)$ و $C\left(-1;-4;2\right)$

أ- تحقق أن النقطة $B$ تنتمي إلى المستوي $\left(\mathcal{P}\right)$ . ب- أحسب الطول $AB$.

جـ - احسب المسافة بين النقطة $C$ و المستوي $\left(\mathcal{P}\right)$ .

3) أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(\Delta\right)$ المارّ بالنقطة $C$ و و العمودي على المستوي $\left(\mathcal{P}\right)$ .

ب- تحقق أنّ النقطة $A$ تنتمي إلى المستقيم $\left(\Delta\right)$

جـ - احسب مساحة المثلث $ABC$



إعداد الأستاذ: حليلات عمار

## التدريب 13

( بكالوريا شعبة علوم تجريبية الجزائر دورة 2010)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

النقط $A\left(1;1;0\right)$ ، $B\left(2;1;1\right)$ و $C\left(-1;2;-1\right)$ .

1) أ) بين أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية .

ب) بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي $(ABC)$ هي : $x+y-z-2=0$.

2) نعتبر المستويين $(P)$ و $(Q)$ اللذين معادلتيهما على الترتيب :

$(P): x+2y-3z+1=0$ و $(Q): 2x+y-z-1=0$

و المستقيم $(D)$ الذي يشمل النقطة $F\left(0;4;3\right)$ و $\vec{u}\left(-1;5;3\right)$ شعاع توجيه له .

أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(D)$ .

ب) تحقق أن تقاطع المستويين $(P)$ و $(Q)$ هو المستقيم $(D)$ .

3) عين تقاطع المستويات الثلاث $(ABC)$ ، $(P)$ و $(Q)$ .

## التدريب 14

( بكالوريا رياضيات الجزائر دورة 2010)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط $A\left(2;0;0\right)$ و $B\left(0;1;0\right)$ و $C\left(0;0;2\right)$ .

1) بيّن أن النقط $A$ و $B$ و $C$ ليست في إستقامية .

2) جد معادلة للمستوي $(ABC)$ .

3) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(BC)$ .

**4)** $(P)$ المستوي الذي معادلته : $2x+2y+z-2=0$

أ) بيّن أن : $(P)$ و $(ABC)$ متقاطعان .

ب) بيّن أن : $(P)$ يشمل $B$ و $C$ ، ماذا تستنتج ؟

5) عيّن $(E)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

## التدريب 15

( بكالوريا رياضيات الجزائر دورة 2010)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ .

نعتبر النقط $A\left(-1;2;1\right)$ و $B\left(2;1;3\right)$ و $C\left(0;-1;2\right)$ ، ولتكن $(P)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء بحيث : $AM=BM$

1- بيّن أنّ $(P)$ هو المستوي الذي معادلته : $3x-y+2z-4=0$

2- عيّن معادلة للمستوي $(Q)$ الذي يشمل $A$ و يوازي $(P)$.



إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

3- أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(D)$ الذي يشمل $C$ و يعامد $(P)$

ب- عيّن إحداثيات $E$ نقطة تقاطع $(Q)$ و $(D)$ .

ج- احسب المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $(D)$

4- عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي $(\pi)$ الذي يحوي المستقيم $(AC)$ و يعامد المستوي $(P)$ ثم استنتج معادلة له .

## التدريب 16

**( بكالوريا تقني رياضي الجزائر دورة 2010)**

الفضاء مزوّد بالمعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ .

نعتبر النّقطتين $A\left(3;-1;2\right)$ و $B\left(1;2;1\right)$ و المستوي $(P)$ الذي معادلته $x-2y+3z-7=0$

1/ عيّن إحداثيات النقطة $G$ مرجح النّقطتين $A$ و $B$ المرفقتين بالمعاملين 3 و 1 على الترتيب .

2/ عيّن طبيعة و عناصر $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق : $\left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=4$ .

3/ أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $G$ و يعامد المستوي $(P)$ .

ب- عيّن إحداثيات $H$ نقطة تقاطع $(P)$ و $(\Delta)$ .

جـ - احسب المسافة بين $G$ و المستوي $(P)$ .

4/ نعرّف المستوي $(P')$ بتمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x=1+t \\ y=t+2\lambda \\ z=2-t+2\lambda \end{cases}$ حيث $t$ و $\lambda$ عددان حقيقيان

- أثبت أن $(P)$ و $(P')$ متقاطعان و اكتب تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما

## التدريب 17

**( بكالوريا تقني رياضي الجزائر دورة 2010)**

ا الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ .

نعتبر النقطتين : $A\left(3;-2;2\right)$ و $B\left(0;4;-1\right)$ .

1) اكتب معادلة للمستوي $(p_1)$ الذي يشمل النقطة $A$ و $\vec{u}\left(1;0;-1\right)$ شعاع ناظمي له .

2) $(p_2)$ المستوي الذي يحوي المستقيم $(AB)$ و يعامد المستوي $(p_1)$.

أ- بيّن أن $\vec{v}\left(1;1;1\right)$ شعاع ناظمي لـ $(p_2)$ .

ب-اكتب معادلـة لـ $(p_2)$ .

3) نعتبر النقطتين $C$ و $D$ حيث $C\left(6;1;5\right)$ و $D$ معرفة بـ : $\overrightarrow{CD}\left(0;-3;-6\right)$ .

أ- بيّن أن المثلث $ACD$ قائم في $A$ و احسب مساحته .

ب- بيّن أن المستقيم $(AB)$ عمودي على المستوي $(ACD)$.

جـ - احسب حجم رباعي الوجوه $ACDB$.



إعداد الأستاذ
حليلات عمار

## التدريب 18

( بكالوريا رياضيات الجزائر دورة 2009)

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ .

نعتبر النقطتين $A\left(2;1;2\right)$ و $B\left(0;2;-1\right)$ و المستقيم $\left(D\right)$ ذو التمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{حيث } t \in \mathbb{R}$$

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(AB\right)$ .

اثبت أن $\left(D\right)$ و $\left(AB\right)$ لا ينتميان إلى نفس المستوي .

2) نعتبر المستوي $\left(P\right)$ الذي يشمل المستقيم $\left(AB\right)$ و يوازي المستقيم $\left(D\right)$ .

أ- بيّن أن الشعاع $\vec{n}\left(1;5;1\right)$ عمودي على المستوي $\left(P\right)$

ب-اكتب معادلة للمستوي $\left(P\right)$

ج- بيّن أن المسافة بين نقطة $M$ من $\left(D\right)$ و المستوي $\left(P\right)$ مستقلة عن موضع $M$ .

د- عيّن تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطع المستوي $\left(P\right)$ مع المستوي $\left(yoz\right)$.

## التدريب 19

( بكالوريا رياضيات الجزائر دورة 2009)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ،

المستويين $\left(P_1\right)$ و $\left(P_2\right)$ حيث : $x+2y-z-2=0$ معادلـة للمستوي $\left(P_1\right)$

و $\begin{cases} x = 1+2\alpha+\beta \\ y = 1+\alpha \\ z = 5+\alpha+\beta \end{cases} \; ; \left(\alpha,\beta\right)\in\mathbb{R}^2$ تمثيل وسيطي للمستوي $\left(P_2\right)$ .

1) اكتب معادلة للمستوي $\left(P_2\right)$

2) عيّن شعاعا ناظميا $\overrightarrow{n_1}$ للمستوي $\left(P_1\right)$ و شعاعا ناظميا $\overrightarrow{n_2}$ للمستوي $\left(P_2\right)$ .

3) بيّن أن المستويين $\left(P_1\right)$ و $\left(P_2\right)$ متعامدان .

4) أ- $A\left(3;1;1\right)$ نقطة من الفضاء ، عيّن المسافة $d_1$ بين النقطة $A$ و المستوي $\left(P_1\right)$ ثمّ المسافة $d_2$ بين $A$ و المستوي $\left(P_1\right)$ .

ت-استنتج المسافة $d_3$ بين النقطة $A$ و المستقيم $\left(\Delta\right)$ تقاطع المستويين $\left(P_1\right)$ و $\left(P_2\right)$ .

5) أ- عيّن تمثيلا وسيطيا بدلالة $\lambda$ للمستقيم $\left(\Delta\right)$ حيث $\lambda$ عدد حقيقي .

ب- $M$ نقطة كيفية من $\left(\Delta\right)$، احسب $MA^2$ بدلالة $\lambda$ مستنتجا ثانية المسافة بين $A$ و $\left(\Delta\right)$ .

## التدريب 20

( بكالوريا تقني رياضي الجزائر دورة 2009)

**1**. نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

النقط : $A\left(1;1;2\right)$ ، $B\left(-1;0;-2\right)$ ، $C\left(-1;0;-6\right)$



إعداد الأستاذ
حليلات عمار

بيّن أن مجموعة النقط $M\left(x,y,z\right)$ التي تحقق $MA^2-MB^2=1$ هي مستو عمودي على المستقيم $\left(AB\right)$ نرمز له بالرمز $P$ يطلب تعيين معادلة له .

**2** . لتكن $S$ مجموعة النقط $M\left(x,y,z\right)$ التي تحقق : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$

برهن أن $S$ هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها $\Omega$ ونصف قطرها $R$

3. $G$ نقطة من الفضاء معرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

أ) عيّن إحداثيات $G$ ثم تأكد أنها تنتمي إلى $S$

ب) اكتب معادلة المستوي $Q$ الذي يمس سطح الكرة $S$ في النقطة $G$

## التدريب 21

**( بكالوريا تقني رياضي الجزائر دورة 2009)**

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ .

$\left(\Delta\right)$ مستقيم من الفضاء تمثيله الوسيطي معطى بالجملة التالية : $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=-t+2 \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=t+1 \end{cases}$

$P$ مستو معرف بالمعادلة $x+3y+z+1=0$

عيّن في كل حالة من الحالات التالية الاقتراح أو الاقتراحات الصحيحة مع التعليل

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $A_1$ : النقطة $A\left(1;1;2\right)$ تنتمــي إلى $\left(\Delta\right)$ | $B_1$ : النقطة $B\left(-1;0;2\right)$ تنتمــي إلى $\left(\Delta\right)$ | $C_1$ : النقطة $C\left(0;\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ تنتمـي إلى $\left(\Delta\right)$ |
| 2 | $A_2$ : $\vec{u}\left(-1;\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\right)$ شعاع توجيه $\left(\Delta\right)$ | $B_2$ : $\overrightarrow{u'}\left(1;3;1\right)$ شعاع توجيه $\left(\Delta\right)$ | $C_2$ : $\overrightarrow{u''}\left(3;1;0\right)$ شعاع توجيه $\left(\Delta\right)$ |
| 3 | $A_3$ : $\left(\Delta\right)$ محتوى في $P$ | $B_3$ : $\left(\Delta\right)$ يقطع $P$ | $C_3$ : $\left(\Delta\right)$ يوازي $P$ |
| 4 | $A_4$ :المستوي $Q_1$ ذو المعادلة $x+3y+z-3=0$ يعامد $P$ | $B_4$ :المستوي $Q_2$ ذو المعادلة $2x-y+\frac{1}{2}z=0$ يعامد $P$ | $C_4$ :المستوي $Q_3$ ذو المعـادلة : $x-y+2z+5=0$ يعامد $P$ |
| 5 | $A_5$ :المسافة بين النقطة $D\left(1;1;1\right)$ و المستوي $P$ هي $\frac{6}{\sqrt{11}}$ | $B_5$ :المسافة بين النقطة $O\left(0;0;0\right)$ و المستوي $P$ هي : $\frac{\sqrt{11}}{11}$ | $C_5$ :المسافة بين النقطة $E\left(1;3;0\right)$ و المستوي $P$ هي : $\sqrt{11}$ |

## التدريب 22

( بكالوريا علوم تجريبية الجزائر دورة 2008)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر المستوي $(P)$ الذي معادلته : $x+2y-z+7=0$ و النقط $A(2;0;1)$ ، $B(3;2;0)$ و $C(-1;-2;2)$

1- تحقق أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست على استقامية ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي هي : $y+2z-2=0$

2- أ- تحقق ان المستويين $(P)$ و $(ABC)$ متعامدان ، ثم عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ مستقيم تقاطع $(P)$ و $(ABC)$

ب- احسب المسافة بين النقطة $A$ والمستقيم $(\Delta)$

3- لتكن $G$ مرجح الجملة $\{(A;1),(B;\alpha),(C;\beta)\}$ حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان يحققان $1+\alpha+\beta\neq 0$ ، عيّن $\alpha$ حتى تنتمي النقطة $G$ إلى المستقيم $(\Delta)$

## التدريب 23

( بكالوريا رياضيات الجزائر دورة 2008)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المستقيمين $(\Delta)$ و $(\Delta')$ المعرفيين بالتمثليين الوسيطيين الآتيين :

$$\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=2+\frac{1}{2}\lambda \\ z=-2-2\lambda \end{cases} ;\lambda\in\mathbb{R} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=6+\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=5+\alpha \end{cases} ;\alpha\in\mathbb{R}$$

على الترتيب

1- بيّن أن المستقيمين $(\Delta)$ و $(\Delta')$ ليسا من نفس المستوي.

2- $M$ نقطة كيفية من $(\Delta)$ و $N$ نقطة كيفية من $(\Delta')$

أ) عيّن إحداثيات النقطتين $M$ و $N$ بحيث يكون المستقيم $(MN)$ عموديا على كل من $(\Delta)$ و $(\Delta')$ . ب) احسب الطول $MN$ .

3-عيّن معادلة للمستوي $(P)$ الذي يشمل المستقيم $(\Delta)$ و يوازي المستقيم $(\Delta')$ .

4-احسب المسافة بين نقطة كيفية من $(\Delta')$ و المستوي $(P)$ . ماذا تلاحظ ؟

## التدريب 24

( بكالوريا رياضيات الجزائر دورة 2008)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ .

لتكن النقط $A(0;2;1)$ ، $B(-1;1;-3)$ ، $C(1;0;-1)$

1.اكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة $S$ التي مركزها $C$ وتشمل النقطة $A$

2.ليكن المستقيم $(D)$ المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-3+2\lambda \end{cases}$ حيث $\lambda$ عدد حقيقي .



إعداد الأستاذ
حليلات عمار

أ) اكتب معادلة للمستوي $(P)$ الذي يشمل النقطة $C$ و يعامد المستقيم $(D)$

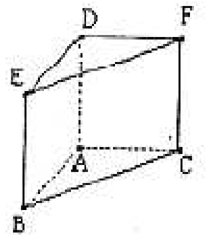
ب) احسب المسافة بين النقطة $C$ و المستقيم $(D)$

ج) ماذا تستنتج فيما يتعلق بالوضع النسبي لكل من المستقيم $(D)$ وسطح الكرة $S$

## التدريب 25

( بكالوريا تقني رياضي الجزائر دورة 2008)

$ABCDEF$ موشور قائم قاعدته المثلث $ABC$ القائم في $A$ و المتساوي الساقين وجهاه $ABED$ و $ACFD$ مربعان متقايسان طول ضلع كل منهما $r$ حيث $\left(r\in\mathbb{R}_+^*\right)$ . ( انظر الشكل )




1) يرمز $I$ إلى منتصف $[AD]$ و $J$ إلى مركز ثقل الرباعي $BCFE$ .

بيّن أن $G$ مرجح الجملة $\{(A;2),(B;1),(C;1),(D;2),(E;1),(F;1)\}$ هو منتصف $[IJ]$ .

2) ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ .

- عيّن إحداثيات النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ ، $E$ ، $F$

- عيّن مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق :

$$2MA^2+MB^2+MC^2+2MD^2+ME^2+MF^2=10r^2$$

## التدريب 26

( بكالوريا تقني رياضي الجزائر دورة 2008)

نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

$A(1;2;2)$ ، $B(3;2;1)$ ، $C(1;3;3)$ نقط من هذا الفضاء.

1/ برهن أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعين مستو يطلب تعيين معادلته الديكارتية .

2/ نعتبر المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ المعرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين :

$(P_1):x-2y+2z-1=0$ و $(P_2):x-3y+2z+2=0$

بيّن أن $(P_1)$ و $(P_2)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ .

3/ بيّن أن النقطة $C$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$ .

4/ بيّن أن الشعاع $\vec{u}(2;0;-1)$ هو احد أشعة توجيه المستقيم $(\Delta)$.

5/ استنتج أن التمثيل الوسيطي للمستقيم $(\Delta)$ هو الجملة : $(k\in\mathbb{R})$ ; $\begin{cases} x=2k+1 \\ y=3 \\ z=-k+3 \end{cases}$

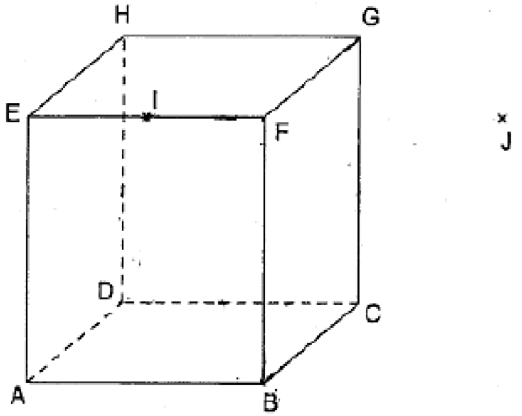
6/ لتكن $M$ نقطة من المستقيم $(\Delta)$

أ- اوجد قيمة $k$ حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}(2;0;-1)$ متعامدان

ب-استنتج المسافة بين النقطة $A(1;2;2)$ و المستقيم $(\Delta)$

## التدريب 27 — bac Liban 2009

نعتبر المكعب ABCDEFGH ضلعه 1 ونعبّر بـ I منتصف [EF] وبـ J نظيرة E بالنسبة إلى F.
في كامل التمرين الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس
$\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.




1. أ / أوجد إحداثيات النقطتين I و J.

ب / تحقق من أن الشعاع $\overrightarrow{DJ}$ عمودي على المستوي (BGI).

ج / استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (BGI).

د / احسب المسافة بين النقطة F و المستوي (BGI).

2. نرمز بـ $(\Delta)$ للمستقيم الذي يشمل النقطة F والعمودي على المستوي(BGI).

أ / اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$.

ب / أثبت أن المستقيم $(\Delta)$ يمرّ من النقطة K مركز الوجه ADHE .

ج / أثبت أن المستقيم$(\Delta)$ والمستوي (BGI) يتقاطعان في النقطة L ذات الإحداثيات $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$.

د / بيّن أن L هو ملتقى الارتفاعات في المثلث BGI.

## التدريب 28 — (Bac Centres etrangers 2008)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

النقط: $A(2;1;-1)$ , $B(-1;2;4)$ ,$C(0;-2;3)$,$D(1;1;-2)$

و المستوي $(P)$ الذي معادلته: $x-2y+z+1=0$

**- في كل اقتراح مما يلي أذكر إن كانت الجملة صحيحة ام خاطئة مبررا ذلك .**

1) النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعين مستوي ، 2) المستقيم $(AC)$ محتوى في المستوي $(P)$

3) معادلة ديكارتية للمستوي $(ABD)$ هي : $x+8y-z-11=0$

4) المستقيم $(AC)$ له تمثيل وسيطي الجملة التالية : $(k\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=2k \\ y=2+3k \\ z=3-4k \end{cases}$

5) المستقيمان $(AB)$ و $(CD)$ متعامدان ، 6) بعد النقطة $C$ عن المستوي $(P)$ يساوي $4\sqrt{6}$

7) سطح الكرة التي مركزها $D$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{6}}{3}$ مماسة للمستوي $(P)$

8) النقطة $E\left(-\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$ المسقط العمودي للنقطة $C$ على المستوي $(P)$

## التدريب 29

### (BAC Antilles -Guyane 2007)

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء .تعطى النقطتين
A( 3; 0 ; 6 ) و I( 0; 0 ; 6 ) وليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطتين
A وI نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بالمعادلتين التاليتين :

$$(P): 2y+z-6=0 \quad \text{و} \quad (Q): y-2z+12=0$$

1.بيّن أن المستويين (P) و (Q) متعامدان

2.بيّن أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D)

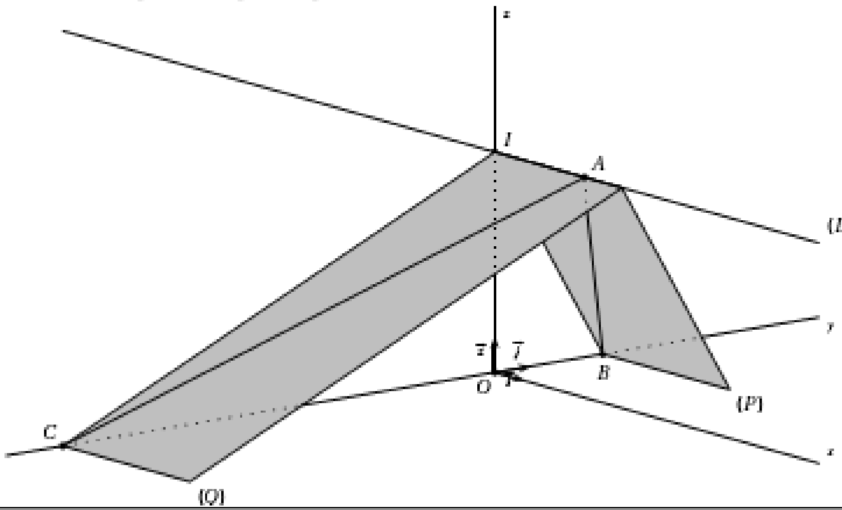
3.بيّن أن المستويين (P) و (Q) يقطعان ، على الترتيب ،المحور $(O;\vec{j})$ في النقطتين B وC

4. اثبت أن معادلة للمستوي (T) يشمل النقطة B والشعاع $\overrightarrow{AC}$ ناظمي له هي :

$$x+4y+2z-12=0$$

5. أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (OA) .برهن أن المستقيم (OA) والمستوي (T) يتقاطعان في نقطة H يطلب تعيين إحداثياتها.

6.ماذا تمثل النقطة H بالنسبة للمثلث ABC ؟ علل جوابك.




## التدريب 30

### (d'après Bac FRANCE 2008)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبرالنقط
$A(1;1;0)$ ، $B(1;2;1)$ و $C(3;-1;2)$

1- تحقق أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست على استقامية ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي $(ABC)$ هي : $2x+y-z-3=0$

2- نعتبر المستويين $(P)$ و $(Q)$ المعرفيين على الترتيب بالمعادلتين :

$$x+2y-z-4=0 \quad \text{و} \quad 2x+3y-2z-5=0$$

- بيّن أن المستويين $(P)$ و $(Q)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\mathfrak{D})$ تمثيله الوسيطي هو:

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}):$$



إعداد الأستاذ: حليلات عمار

3- درس تقاطع المستويات $(P)$ ، $(Q)$ و $(ABC)$

4- عيّن بعد النقطة $A$ عن المستقيم $(\mathfrak{D})$ .

## التدريب 31

**(Bac FRANCE 2006)**

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء . تعطى النقط :

$$A(2;4;1)\ B(0;4;-3)\ ،\ C(3;1;-3)\ ،\ D(1;0;-2)\ ،\ E(3;2;-1)\ ،\ I\left(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5}\right)$$

**بيّن – مع التعليل – صحة أو خطأ الجمل التالية :** 1) المستقيمان $(AB)$ و $(CD)$ متعامدان

2) معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$ هي : $2x+2y-z-11=0$

3) النقطة $E$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$

4)المستقيم $(CD)$ ممثل وسيطيا بالجملة : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{cases}$

5) النقطة $I$ تنتمي للمستقيم $(AB)$ .

## التدريب 32

**(Bac FRANCE 2005)**

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ .

نعتبر المستوي $(P)$ الذي يشمل النقطة ( B( 1; -2 ; 1 و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له والمستوي **(R)** المعرف بالمعادلة الديكارتية : $x+2y-7=0$

أ- بيّن أن المستويين $(P)$ **و(R)** متعامدان.

ب- برهن أن تقاطع المستويين **(P) و(R)** هو المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة( C( -1; 4 ; -1 وشعاع توجيه له $\vec{u}(2;-1;1)$

جـ) لتكن النقطة ( A( 5; -2 ; -1 . احسب بعد النقطة **A** عن المستوي **(P)** ثم بعد النقطة **A** عن المستوي **(R)** .

د) عيّن بعد النقطة **A** عن المستقيم (Δ).

2. أ) من أجل كل عدد حقيقي $t$ ، نعتبر النقطة $M_t(1+2t;3-t;t)$ .

- عيّن بدلالة $t$ الطول $AM_t$ .ونرمز لهذا الطول بـ $\varphi(t)$ .ونعرف الدالة $\varphi$ من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ .

ب) ادرس إتجاه تغير الدالة $\varphi$ واستنتج القيمة الحدية الصغرى لها .

جـ) فسّر هندسيا هذه القيمة الحدية الصغرى.

## التدريب 33

**( بكالوريا المغرب علوم تجريبية الدورة الاستدراكية 2006)**

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء. تعطى النقط :

( A( 1; 2 ;-2 ، ( B( 1; -1 ; 1 ، ( C( 2; 1 ; -2

**1**. بيّن أن النقط A، B وC تعيّن مستويا ثم اكتب معادلة ديكارتية للمستوي **(ABC)** .



إعداد الأستاذ
حليلات عمار

2.لتكن (S) سطح الكرة التي مركزها $\Omega(1,1,1)$ ونصف قطرها $R=\frac{2}{\sqrt{3}}$ .

أ- بيّن أن المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S) ثم حدد إحداثيات H نقطة تماس (ABC) و(S)

ب- لتكن $M(a,b,c)$ نقطة من المستوي (ABC). بيّن أن : $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$

## التدريب 34

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط

$A(1;4;-5)$ ، $B(3;2;-4)$ ، $C(5;4;-3)$ و $D(-2;8;4)$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix}$ شعاع من الفضاء

1- بيّن أن : $x-2z-11=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$ .

2- حدّد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(T)$ الذي يشمل النقطة $D$ و $\vec{u}$ شعاع توجيه له .

3- $(P)$ مستوي معادلته الديكارتية : $x-y-z=7$

أ)بيّن أن المستويين $(ABC)$ و $(P)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له .

ب) أثبت أن المستقيمين $(T)$ و $(\Delta)$ ليسا من نفس المستوي .

4- $E(3;0;-4)$ ، $F(-3;3;5)$ .

أ) تحقق من أن $E$ ، $F$ من المستقيمين $(\Delta)$ ، $(T)$.

ب) بيّن أن المستقيم $(EF)$ عمودي على كل من $(\Delta)$ و $(T)$

5- $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء بحيث $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ حيث $\alpha$ عدد حقيقي

أ) أوجد بدلالة $\alpha$ معادلة ديكارتية لـ $(\Gamma)$ ، ثم استنتج أن $(\Gamma)$ مستو $\overrightarrow{FE}$ شعاع ناظمي له .

ب) عيّن قيمة $\alpha$ حتى يكون $(\Gamma)$ المستوي المحوري للقطعة $[FE]$.

## التدريب 35

**(d'après Bac polynésien 2008)**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط:

$A(1;2;3)$ ، $B(0;1;4)$ ، $C(-1;-3;2)$ ، $D(4;-2;5)$ و الشعاع $\vec{n}(2;a;b)$ .

1. أ) أثبت أن النقط A ، B وC ليست على استقامة واحدة.

ب) اوجد العددين $a$ و $b$ حتى يكون $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$ .

ج) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

2. $(\Delta)$ مستقيم معرف بالتمثيل الوسيطي : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=2-2t\\ y=-1+t\\ z=4-t\end{cases}$

- برهن أن النقطة $D$ تنتمي للمستقيم $(\Delta)$ و أن هذا المستقيم عمودي على المستوي $(ABC)$.

3 . لتكن النقطة $E$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$

4 -برهن أن النقطة $E$ مركز ثقل المثلث $ABC$ .

## التدريب 36

**(Bac Amérique duSud 2009)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

**الجزء الأول** :نعتبر المستوي $P$ حيث $ax+by+cz+d=0$ ، $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ معادلة ديكارتية له

**A.** نقطة إحداثياتها $(x_A;y_A;z_A)$ .

- برهن أن البعد بين $A$ و $P$ هو العدد الحقيقي الموجب $d(A;P)=\dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

**الجزء الثاني:** نعتبر النقط $A(3;-2;2)$ ، $B(6;-2;-1)$ ، $C(6;1;5)$ ، $D(4;0;-1)$

1- بيّن أن المثلث $ABC$ قائم ثم احسب مساحته

2- بيّن أن الشعاع $\vec{n}1(3;-2;1)$ ناظم للمستوي $(ABC)$ .

- عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

3- احسب المسافة بين النقطة $D$ و المستوي $(ABC)$

- احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

**الجزء الثالث:** $(Q)$ مستوي معادلته الديكارتية: $x-2y+z-5=0$

1.عيّن الوضعية النسبية للمستويين $(Q)$ و $(ABC)$

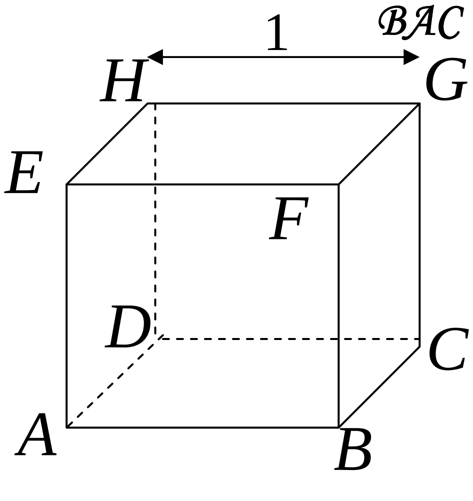
2. $(Q)$ يقطع المستقيمات $(DA)$ ، $(DB)$ و $(DC)$ على التوالي في النقط $E$ ، $F$ و $G$

- عيّن إحداثيات النقطة $E$ و برهن أنها تنتمي للقطعة $[DA]$ .

3.عيّن حجم رباعي الوجوه $EFGD$ .

## التدريب 37

**BAC POLYNÉSIE 10 JUIN 2011**




نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ ضلعه 1 الممثل كما يلي :

في كل التمرين ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH}\right)$

و نسمي $K$ مرجح النقطتين المثقلتين $(D,1)$ و $(F,2)$ .

**الجزء الأول: 1**-بيّن أن إحداثيات النقطة $K$ هي : $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$

2- بيّن أن المستقيمين $(EK)$ و $(DF)$ متعامدان

3- احسب المسافة $EK$

**الجزء الثاني** : $M$ نقطة من القطعة $[HG]$ .نضع $m=HM$ ( إذا $m$ عدد حقيقي من المجال $[0;1]$ )



إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

1- برهن أن من أجل كل عدد حقيقي $m$ من المجال $[0;1]$ ؛ حجم رباعي الوجوه $EMFD$ يساوي $\frac{1}{6}$ وحدة حجوم .

2 - بيّن أن معادلة ديكارتية للمستوي $(MFD)$ هي : $(-1+m)x+y-mz=0$

3- نسمي $d_m$ المسافة بين النقطة $E$ و المستوي $(MFD)$

أ ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $m$ من المجال $[0;1]$ ، $d_m=\frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$

ب) عيّن موضع النقطة $M$ على القطعة $[HG]$ بحيث تكون المسافة $d_m$ أعظمية .

ج) استنتج أنه عندما تكون المسافة $d_m$ أعظمية فإن النقطة $K$ المسقط العمودي للنقطة $E$ على المستوي $(MFD)$ .

## التدريب 38

**(Bac Amérique du nord 2009)**

نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ ضلعه1.

لتكن $I$ مركز ثقل المربع $ADHE$ و $J$ مركز ثقل المربع $ABCD$ ، $K$ منتصف $[IJ]$

نعتبر المعلم $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

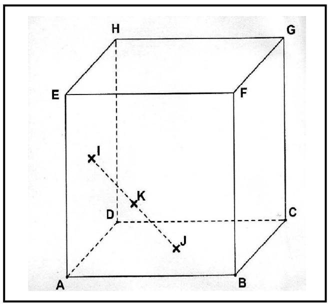
1 – عين إحداثيات النقاط $I$ ، $J$ ، $K$ في المعلم $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ .

2 – بين أن النقط $A$ ، $K$ و $G$ ليست في إستقامية .

3 - أ - بين أن المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ هو المستوي $(AKG)$ .

ب - أعط معادلة ديكارتية للمستوي $(AKG)$ .

جـ - تحقق أن النقطة $D$ تنتمي للمستوي $(AKG)$ .




4-نسمي $L$ مركز المربع $DCGH$

أ) بيّن أن $K$ منتصف القطعة $[AL]$ .

ب) برهن أن $K$ مرجحا للنقط $A$ ، $D$ و $G$ بمعاملات يطلب تعيينها .

## التدريب 39

**(Bac Pondichéry 2007)**

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء.نعتبر المستوي **(P)** ذو المعادلة : $2x+y-2z+4=0$ و النقط: A( 3; 2 ; 6 ) ، B(1; 2 ; 4) ، C( 4; -2 ; 5 )

**1. أ)** بيّن أن النقـط **A**، **B** و**C** تعيّن مستويا . **.ب-** بيّن أن هذا المستوي هو المستوي **(P)** .



إعداد الأستاذ
حليلات عمار

2. أ) بيّن أن المثلث ABC قائم

ب) $\Delta$ مستقيم يشمل **O** ويعامد المستوي **(P)** ، أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\Delta$

جـ ) **K** المسقط العمودي للنقطة **O** على **(P)** . احسب **OK**

**د)** احسب حجم الرباعي OABC

3. نعتبر الجملة المثقلة : $S=\{(O;3),(A;1),(B;1),(C;1)\}$

أ) بيّن أن هذه الجملة تقبل مرجحا نرمزله بـ $G$

ب) نرمز بـ **I** إلى مركز ثقل المثلث ABC . بيّن أن **G** تنتمي إلى المستقيم **(**OI**)** .

جـ) عيّن المسافة بين **G** والمستوي **(**P**)**

4. أ) عيّن **(E)** مجموعة **M** من الفضاء التي تحقق : $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$

ب) ما هي مجموعة النقط المشتركة بين **(P)** و**(E)** .

## التدريب 40

**(Bac Amérique du nord 2008)**

**<u>الجزء(أ)</u>** نعتبر النقطتان $A$ و $D$ من الفضاء . ولتكن $I$ منتصف القطعة $[AD]$

1) برهن أنه من أجل كل نقطة $M$ من الفضاء فإن : $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=MI^2-IA^2$

**2)** استنتج المجموعة $(E)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق : $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=0$

**<u>الجزء(ب)</u>** الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط :

$A(3;0;0)$ ، $B(0;6;0)$ ، $C(0;0;4)$ ، $D(-5;0;1)$

1/ تحقق أن $\vec{n}(4;2;3)$ شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$ .ثم اوجد معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

**/**2 اوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم $(\Delta)$ العمودي على المستوي $(ABC)$ ويشمل النقطة $D$

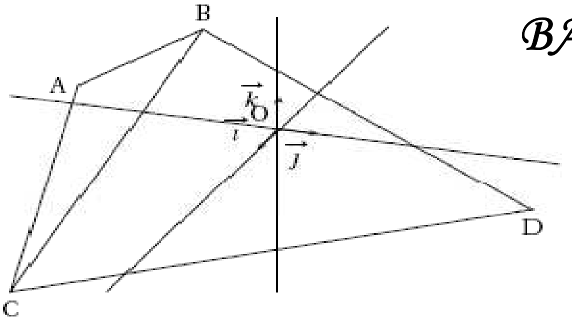
**/**3 لتكن $H$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$ .استنتج إحداثيات النقطة $H$

4/ احسب بعد النقطة $D$ على المستوي $(ABC)$ .

**/**5 برهن أن النقطة $H$ تنتمي إلى المجموعة$(E)$ المعرفة في الجزء (أ)

## التدريب 41

*BAC ASIE 2003*




الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.نعتبر النقط A( 3 ; -2 ; 2 ) ، B( 6 ; 1 ; 5 **)** ، C( 6 ; -2 ; - 1 )

**I)** 1) بين أن المثلث ABC قائم .

2) ليكن **(** P **)** المستوي الذي معادلته : $x+y+z-3=0$ . بين أن **(** P **)** عمودي على المستقيم ( AB ) و يمر من النقطة **A** .



اعداد الأستاذ:
حليلات عمار

3) ليكن ( P' ) المستوي العمودي على المستقيم ( $AC$ ) و الذي يشمل **A** .
- أكتب معادلة ديكارتية لـ ( P' )
4) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم ( d ) مستقيم تقاطع ( P ) و ( P' ) .

**II)** 1) لتكن D النقطة ذات الاحداثيات $(0;4;-1)$، بين أن المستقيم **(** AD **)** عمودي على المستوي **(** ABC **)**
2) أحسب حجم رباعي الوجوه ABDC
3) بين أن قيس الزاوية $B\widehat{D}C$ هو $\frac{\pi}{4}$ راديان
4) أ) أحسب مساحة المثلث BDC . ب) استنتج بعد النقطة **A** عن المستوي ( BDC )

## التدريب 42

**( بكالوريا علوم تجريبية المغرب دورة 2006 )**

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ .

النقطة A( 1; -1 ; 3 ) والمستوي **(**P**)** الذي معادلته : x-y+3z=0

1.أ) تحقق من أن : $(t \in R)$ $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3t \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم **(OA)** .

ب) حدد معادلة ديكارتية للمستوي **(Q)** العمودي على المستقيم في النقطة **A**

ج) تحقق من أن **(**P**)** يوازي المستوي **(Q)** .

2. نعتبر سطح الكرة (S ) المماسة للمستوي (Q) في **A** والتي يقطعها المستوي **(**P**)** وفق الدائرة Γ التي مركزها **O** ونصف قطرها $\sqrt{33}$ .

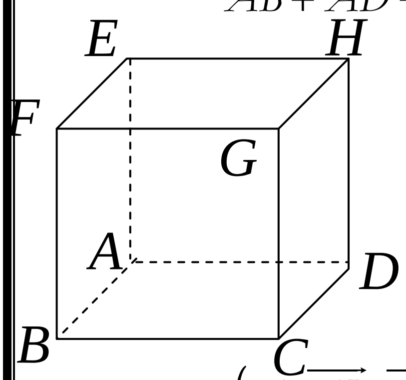
أ) بيّن أن Ω(a;b;c) مركز سطح الكرة **(S** ) ينتمي إلى **(OA)** ثم استنتج أن : c=3a وb=-a

ب) بيّن أن : $\Omega A^2 - \Omega O^2 = 33$ ثم استنتج أن : a-b+3c=-11

ج) استنتج إحداثيات Ω **مركز** سطح الكرة **(S** ) وبيّن أن نصف قطرها يساوي

## التدريب 43

نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ ضلعه 1 الممثل كما يلي :




**1)** أ- أكتب على أبسط شكل ممكن الشعاع : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

ب- استنتج أن : $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}=0$

ج) بطريقة مماثلة بيّن أن : $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE}=0$ .

د) استنتج أن المستقيم $(AG)$ عمودي على المستوي $(BDE)$

**2)** لتكن النقطة $I$ مركز ثقل المثلث $BDE$

باستعمال السؤال أ-بين أن : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$

**3)** في كل ما يلي ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد و المتجانس : $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

أ- اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(BDE)$ .


إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

ب- أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $H$ و عمودي على المستوي $(BDE)$
ج – عيّن إحداثيات $J$ نقطة تقاطع المستقيم $(\Delta)$ مع المستوي $(BDE)$
د- استنتج بعد النقطة $H$ عن المستوي $(BDE)$ .

## التدريب 44

**(d'après Bac polynésien 2009)**

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.نعتبر النقط :

$E(4;-6;2)$ ، $D(2;1;3)$ ، $C(6;-7;-1)$ ، $B(0;3;1)$ ، $A(1;-1;3)$

1. أ) بيّن أن : $E$ مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-1),(C;1)\}$

ب) عيّن طبيعة و عناصر $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{21}$$

2 . أ) بيّن أن النقـط $A$ ، $B$ و $D$تعيّن مستويا.

ب) بيّن أن المستقيم $(EC)$ عمودي على المستوي $(ABD)$.

ج) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $(ABD)$ .

3. أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(EC)$.

ب) عيّن إحداثيات $F$ نقطة تقاطع المستقيم $(EC)$ والمستوي $(ABD)$ .

4. أ) بيّن أن المستوي $(ABD)$ و المجموعة $(\Gamma)$ يتقاطعان

ب)عيّن العناصر المميزة لمجموعة تقاطعهما .

## التدريب 45

نعتبر رباعي الوجوه OABC حيث **O**AB ،OAC و OBC مثلثات قائمة في O وOC=OB=OA=1 ، [CI] إرتفاع في المثلث ABC ،**[OH]** إرتفاع في المثلث **OIC** .

1- ما طبيعة المثلث ABC؟ أحسب الطول AB.

2- أثبت أن المستقيمان **(**OH**)**و**(**AB**)** متعامدان و أن H ملتقى الارتفعات في المثلث ABC .

3- أرسم المثلث OCI بعد حساب الأطوال OIو CI (الوحدة هي طول **OC**) ، عين **.**H

4. أ). عين الطول OH في المثلث OCI**.**

ب). أحسب **V** حجم رباعي الوجوه OABC **ثم** S **مساحة** ABC .

ج) أوجد علاقة بين **V**،**S**وOH ثم تحقق من النتيجة 4-أ).

5.نعتبر النقطة D المعرفة بالعلاقة $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{HO}$ ثم ننسب الفضاء إلى المعلم $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$

أ). بين أن إحداثيات النقطة H هي $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. ب). بين أن رباعي الوجوه ABCD منتظم.

ج). لتكن $\Omega$ مركز سطح الكرة الداخلية للرباعي ABCD

بين أن $\Omega$ نقطة من المستقيم **(**OH**)** وأحسب إحداثياتها.


إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

## التدريب 46

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.نعتبر النقطتين :

$A\left(2;1;2\right)$ ، $B\left(0;2;-1\right)$ و المستقيم $\left(\Delta\right)$ المعرف بتمثيله الوسيطي

$$\begin{cases} x = 6t-2 \\ y = -2t+1 \\ z = 4t \end{cases}$$ حيث $t$ وسيط حقيقي

1.أكتب تمثيلا وسيطيا بدلالة الوسيط $k$ للمستقيم $\left(AB\right)$.

2.بيّن أنّ $\left(AB\right)$ و $\left(\Delta\right)$ لا ينتميان لنفس المستوي .

3.$\left(P\right)$ هو المستوي الذي يشمل المستقيم $\left(AB\right)$ و يوازي $\left(\Delta\right)$ .

أ- تحقق أن الشعاع $\vec{n}\left(1;5;1\right)$ ناظمي للمستوي $\left(P\right)$ و استنتج معادلة ديكارتية له .

ب- احسب المسافة بين $\left(P\right)$ و$\left(\Delta\right)$.

4. عين احداثيي النقطة $I$ منتصف القطعة $\left[AB\right]$ثم جد معادلة ديكارتية للمستوي المحوري للقطعة $\left[AB\right]$.

5.لتكن $\left(\Gamma\right)$مجموعة النقط $M$ من الفضاء بحيث : $MA^2 - MB^2 = 2$

- تحقق أن النقطة $H\left(1;1;0\right)$ تنتمي إلى $\left(\Gamma\right)$ ثم استنتج طبيعة المجموعة $\left(\Gamma\right)$.

## التدريب 47

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.نعتبر النقط :

$A\left(-1;1;2\right)$ ، $B\left(1;3;0\right)$ ، $C\left(2;2;-5\right)$ ، $D\left(-4;5;5\right)$

والمستوي $\left(P\right)$الذي معادلته $x+y-z+1=0$

1- أ) بيّن أن النقــط $A$ ، $B$ و $C$تعيّن مستويا.ثم عيّن شعاع ناظم له واستنتج معادلة ديكارتية له .

ب- بيّن أن المستويين $\left(P\right)$ و$\left(ABC\right)$ متعامدان .

2-بيّن أن تقاطع المستويين $\left(P\right)$ و$\left(ABC\right)$ هو المستقيم $\left(\Delta\right)$ المعرف بتمثيله الوسيطي

$$\begin{cases} x = t-1 \\ y = 4t \\ z = 5t \end{cases}$$ حيث $t$ وسيط حقيقي

3-احسب المسافة بين $D$ و المستوي $\left(P\right)$ و المسافة بين $D$ و المستوي $\left(ABC\right)$ثم استنتج المسافة بين $D$و المستقيم $\left(\Delta\right)$

4- أ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(P_1)$ الذي يشمل النقطة $D$ و العمودي على كل من المستويين $(P)$ و $(ABC)$.

ب ) بيّن أن المستويات الثلاثة $(P_1)$، $(P)$ و $(ABC)$ تتقاطع في نقطة $H$ يطلب تعيين إحداثييها.

ج) استنتج مرة أخرى المسافة بين النقطة $D$ و المستقيم $(\Delta)$.

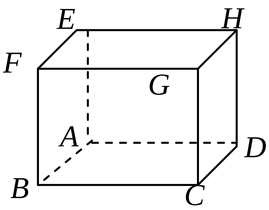
د) اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$ التي مركزها $D$ و تمس المستقيم $(\Delta)$.

**BAC S Centres étrangers 2012**

## التدريب 48

نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ ضلعه $1$ الممثل كما يلي :

في كل ما يلي ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد و المتجانس :




$(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ نعتبر النقط $I\left(1;\frac{1}{3};0\right)$ و $J\left(0;\frac{2}{3};1\right)$ و $K\left(\frac{3}{4};0;1\right)$

و $L(a;1;0)$ حيث $a$ عدد حقيقي من المجال $[0;1]$.

**الجزء الأول**:1- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(IJ)$.

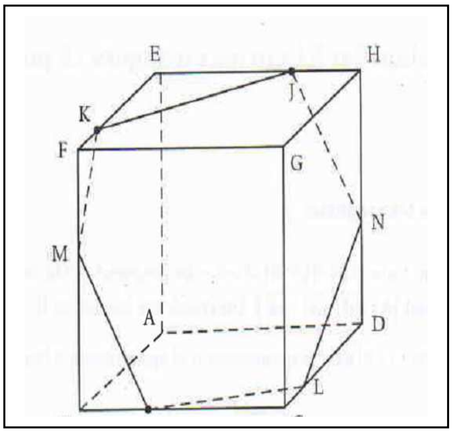
2-بيّن أن المستقيم $(KL)$ له تمثيل وسيطي كما يلي :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \qquad t' \in \mathbb{R} \\ z = 1 - t' \end{cases}$$

3-برهن أن المستقيمين $(IJ)$ و $(KL)$ متقاطعين إذا وفقط إذا كان $a = \frac{3}{4}$.

**الجزء الثاني:في كل مايلي نفرض** $a = \frac{1}{4}$ ومنه $L\left(\frac{1}{4};1;0\right)$ 1- برهن أن الرباعي $IKJL$ متوازي أضلاع.

الشكل الأتي يبرز تقاطع المستوي $(IJK)$ مع أوجه المكعب و تحصلنا عليه ببرمجية هندسة ديناميكية




نسمي النقطة $M$ نقطة تقاطع المستوي $(IJK)$ والمستقيم $(BF)$

و النقطة $N$ تقاطع المستوي $(IJK)$ و المستقيم $(DH)$

أ- برهن أن الشعاع $\vec{n}(8;9;5)$ ناظم للمستوي $(IJK)$

ب-استنتج أن المستوي $(IJK)$ له معادلة ديكارتية:

$$8x + 9y + 5z - 11 = 0$$

جـ - استنتج إحداثيات النقطتين $M$ و $N$

## التدريب 49

( بكالوريا تونس دورة 2009)

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ .

نعتبر المستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $A(-3;-1;-3)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(2;-2;-1)$

و المستقيم $(D)$ ذو التمثيل الوسيطي $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=3+t \\ y=2+2t \\ z=3-2t \end{cases}$

1- أ) بيّن أن المستقيمين $(\Delta)$ و $(D)$ متعامدان ولا ينتميان لنفس المستوي .

ب) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي الذي يحوي $(\Delta)$ و يوازي $(D)$ .

2- لتكن $(S)$ مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق :

$$x^2+y^2+z^2+2x+2z-34=0$$

و المستوي $(P)$ الذي معادلته: $2x+y+2z+13=0$

أ) برهن أن $S$ هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها $C$ ونصف قطرها $R$

ب) بيّن أن $(S)$ و $(P)$ يتقاطعان وفق دائرة مركزها $A$ يطلب تعيين نصف قطرها.

ج) بيّن أن المستقيم $(D)$ مماس لسطح الكرة $(S)$ في نقطة $B$ يطلب تعيينها.

3- أ) احسب $AB$ و استنتج أن النقطة $C$ تنتمي للقطعة $[AB]$

ب) عين مستقيما عموديا على كل من المستقيمين $(\Delta)$ و $(D)$

## الهدية

اكتب مقالا فلسفيا تحلل فيه مضمون المقولة :

إننا ، إذا ستعرضنا الرياضيات استعراضا صحيحا ، لما وجدنا فيها الحقيقة وحسب ، بل وجدنا جمالا ساميا أيضا ، جمال البرودة والقسوة والصرامة . إنه جمال فيه الصفاء و السناء و المقدرة على بلوغ الكمال الذي لا يتاح إلا لأعظم الفنون . **برتراند رسل**

**قال شاعر النيل في لغة القرآن الكريم وهي تصف نفسها :**

**وسعت كتاب الله لفظاً و غاية** ... وما ضقت عن آي به و عظات

أنا البحر في أحشائه الدر كامن ... فهل سألوا الغواص عن صدفاتي

**فكيف أضيق اليوم عن وصف آلة** ... **وتنسيق أسماء لمخترعات**

أيطربكم من جانب الغرب ناعب ... **ينادي بوأدي في ربيع حياتي**

**يقول الإمام الشافعي رحمه الله : أخي لن تنال العلم إلا بستة** ... **سأآتيك عنها مخبرا ببيان**

**ذكاء وحرص واصطبار وبلغة** ... **وصحبة أستاذ وطول زمان**



إعداد الأستاذ
حليلات عمار