Faculté des SNV
Département des STU
Module de cristallographie
2LMDSTU
Dr. ZEHANI

Chapitre II La projection stéréographique

II.1 INTRODUCTION

La représentation sphérique n'est pas pratique, on cherche toujours à effectuer les représentations sur un plan, même problème en géographie. Parmi les plusieurs types possibles de représentation plane, en cristallographie:

1. La projection gnomonique (sur un plan tangent à la sphère en l'un de ses pôles principaux (Figure 1).
2. La projection stéréographique (sur un plan diamétral de la sphère, plan équatorial perpendiculaire à la ligne des pôles (Figure 2)).

La plus universellement étant la projection stéréographique, nous envisageons celle-ci en détail, en exposant les avantages géométriques, qu'elle présente. La propriété essentielle de cette projection étant de conserver les angles, on peut aussi l'utiliser pour la représentation des opérateurs de symétrie d'orientation. Elle permet de représenter sur un plan l'effet d'une opération de symétrie isolée ou d'une succession d'opérations. Elle conduit ainsi à des constructions géométriques qu'il est souvent facile d'interpréter.

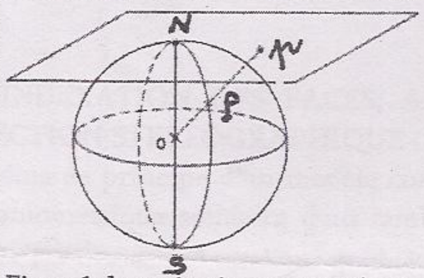


Figure1: la projection gnomonique

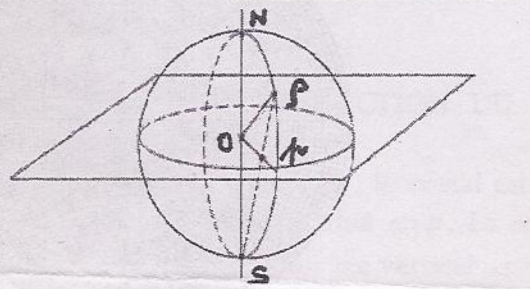


Figure 2 : la projection stéréographique

II. 2 TRANSFORMATION STEREOGRAPHIQUE D'UN POINT ET D'UN POLE D'UNE FACE

Soit une sphère de centre 0, de rayon R et de diamètre NS (N: pôle nord et S: pôle sud). Soit P un point de la sphère et p l'intersection de SP avec le plan normal à NS (équatorial). On appelle transformé stéréographique du point P, le point p et réciproquement. Cette transformation géométrique qui associe une sphère à un plan est une inversion positive du centre S et de puissance SP. $Sp=2R^2$. Cette inversion conserve les angles et transforme tout cercle tracé sur la sphère en un cercle (ou une droite) sur le plan équatorial.

En cristallographie cette projection est utilisée pour représenter les éléments de symétrie et les directions équivalentes des cristaux comme suit (Figure 3) :

* Pour les normales contenues dans l'hémisphère nord, on utilise le point S comme centre d'inversion et on représente ces pôles correspondant par une croix (+).

* Pour les normales contenues dans l'hémisphère sud, on utilise le point N comme centre d'inversion et on représente ces pôles correspondant par un cercle (o).

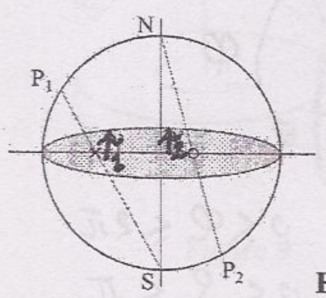


Figure 3

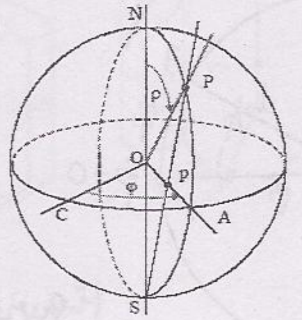


Figure 4

Remarque :
La direction de la normale à la face est caractérisée par deux angles $C0P = \varphi$ appelé **azimut** ou longitude et $N0P = \rho$ appelé **inclinaison ou colatitude** (Figure 4).

II. 3 CANEVAS DE WULFF

II. 3. 1 Description

Le canevas de Wulff est la projection stéréographique d'un réseau de parallèles et de méridiens tracés sur la sphère de projection selon une vision équatoriale. On obtient ainsi un réseau gradué habituellement de 2° en 2°, formé de grands cercles et de petits cercles orthogonaux aux grands cercles. On voit que la projection des méridiens tracés sur la sphère qui sont de grands cercles donne des arcs de cercles à concavité tournée vers le centre. Alors que la projection des parallèles tracés sur la sphère donne des arcs de cercles à concavité tournée vers l'extérieur (Figure 5).

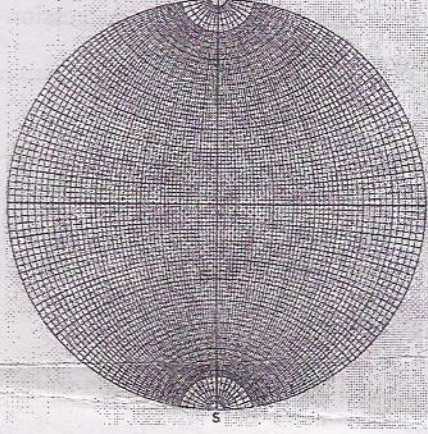


Figure 5

II.3.2 Construction d'un stéréogramme, utilisation du canevas de Wulff

On place sur le canevas un papier calque qui peut tourner au moyen d'une punaise placée au centre. On choisit une origine $\varphi = 0$ (en principe point Est). Soit une face définie par un goniomètre, par φ *et* ρ. Pour placer son pôle, on trace d'abord un repère sur le bord du canevas à la valeur φ (point A), puis, on fait tourner le calque de manière à faire coïncider ce repère avec l'origine $\varphi = 0$. On compte en ensuite la valeur de ρ à partir du centre vers A sur le diamètre. Le point obtenu sera affecté d'une croix ou d'un rond suivant que ρ est inférieur à 90° ou supérieur de 90°, respectivement. Enfin, on rétablit le calque à sa position initiale. On repère ainsi pour chaque face.

Exemple: Face 1 : $\varphi_1 = 32^0$ *et* $\rho_1 = 57^0$ Face 2 : $\varphi_1 = 114^0$ *et* $\rho_1 = 106^0$

On obtient ainsi la représentation stéréographique du cristal grâce à ce dispositif (Figure 6).

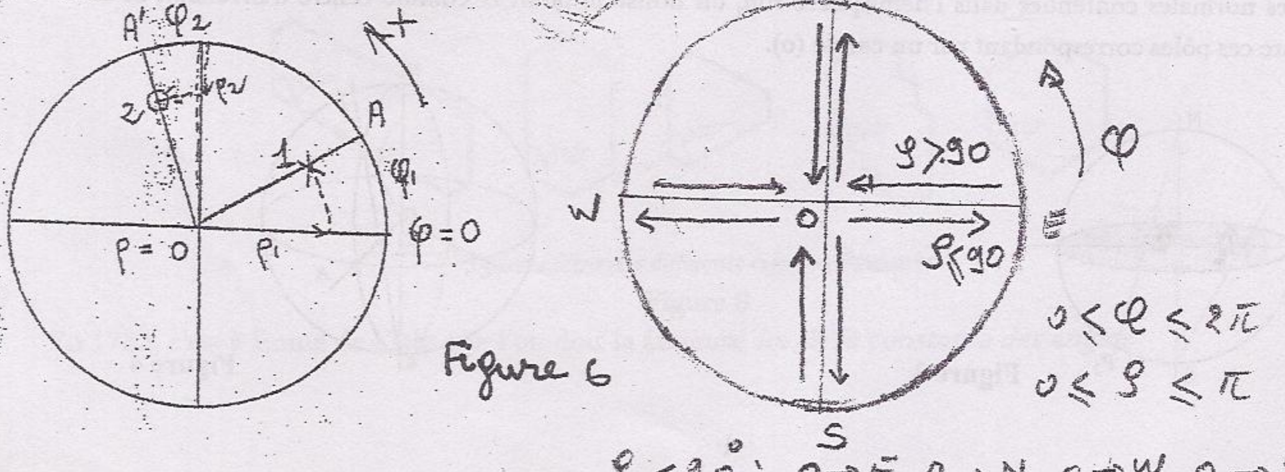


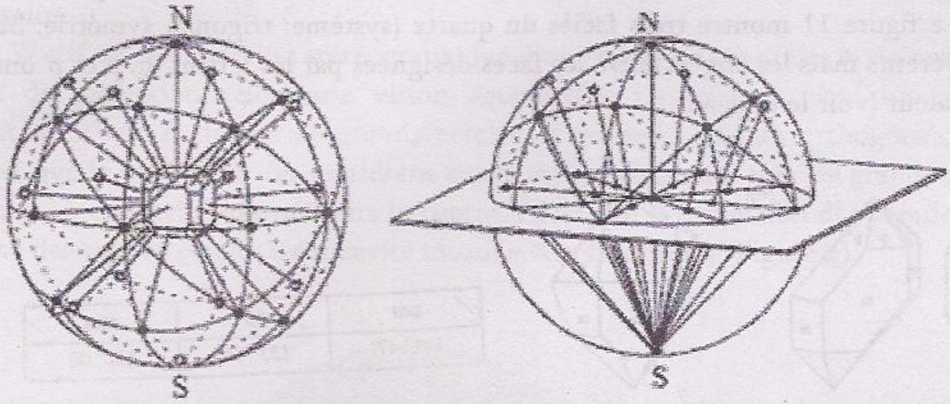
Figure 6

$+ \leftarrow \rho \leq 90° : 0 \to E, 0 \to N, 0 \to W, 0 \to S$

$o \leftarrow \rho > 90° : E \to 0, N \to 0, W \to 0, S \to 0$

II. 4 DETERMINATION DES ELEMENTS DE SYMETRIE D'UN CRISTAL

Du fait de la présence d'élément de symétrie, la construction et l'interprétation des projections stéréographiques des cristaux présentent certains particuliers. Il faut mettre une face en position polaire, elle sera dans ce cas parallèle au plan de projection et son pôle sera confondu avec celui de la sphère.



Exemple : la projection d'un cristal CFC suivant la direction [001] est représentée sur la figure 7.

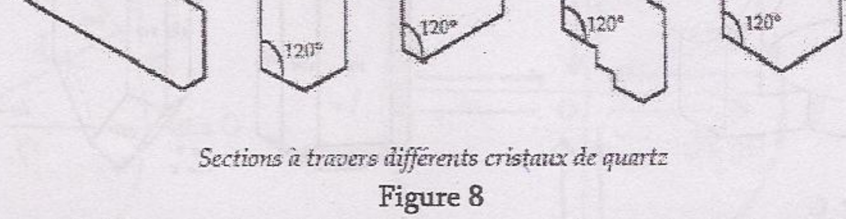
II. 5 ANGLE DIEDRE

Un cristal est défini comme un solide homogène limité par des faces planes (faciès) qui se sont développées naturellement. L'arrangement des ces faces se produit de manière régulière suivant une symétrie bien déterminée, de sorte que les faces extérieures formées par la croissance cristalline, sont en corrélation avec l'arrangement régulière interne. Ces faces présentent en outre une caractéristique remarquable ; **l'angle dièdre** entre deux faces de cristaux d'une même espèce est toujours constant.

Définition : un angle dièdre est la valeur de l'angle de deux faces mesuré perpendiculairement à l'arête d'intersection.

II. 6 PREMIERE LOI DE LA CRISTALLOGRAPHIE

La cristallographie est née en tant que science, en 1669 avec la publication à Florence par **Nicolas Steno**. Ce denier y décrit et illustre ses mesures sur des cristaux de quart (SiO_2). En effet, en coupant divers cristaux de quartz suivant des sections, à angle droit des arêtes verticales (Figure 8). **Steno** montra que les angles correspondants des différentes sections, quelles qu'étaient leur forme et leur taille avaient toujours les mêmes valeurs. Les sections perpendiculaires à d'autres arêtes présentaient également entre elles les mêmes valeurs angulaires, bien que différentes de celles de la première série de sections. Cette étude fut complétée d'abord par **Domenico Gugliemini** de 1688 à 1705, et surtout par le travail de **Romé de l'Isle**.



Sections à travers différents cristaux de quartz

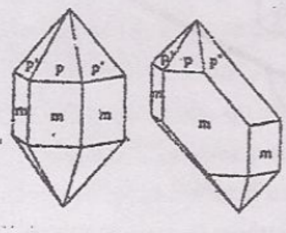
Figure 8

En 1783, c'est à **Romé de l'Isle** que l'on doit la fameuse ***loi de la constante des angles***.

Dans tous les cristaux de la même substance, les angles entre faces ou entre arêtes correspondantes ont une valeur constante

Ainsi :

1. L'angle entre deux faces d'un cristal ne change pas durant la croissance de ce cristal.
2. Les angles entre les faces correspondantes de deux cristaux de la même espèce cristalline sont égaux. La figure 11 montre trois faciès du quartz (système: trigonal, symétrie: 32, réseau: P) sont différents mais les angles entre les faces désignées par les lettres m, p et p' ont toujours la même valeur (voir le tableau).

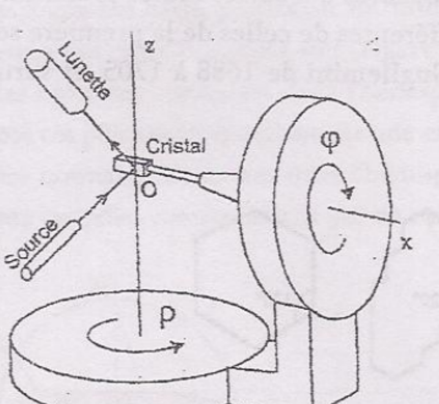


pm	pp'	mm
141° 47'	133° 44'	120° 00

II. 7 INDEXATION DES FACES; APPLICATION A LA CONSTRUCTION DU RESEAU EN PROJECTION STEREOGRAPHIQUE : le goniomètre à deux cercles

Le schéma de principe d'un modèle commercial est le suivant (Figure 9) : le cristal est collé sur une tête goniométrique solidaire d'un tambour d'axe horizontal ox et gradué en φ. La rotation ρ est mesurée sur un second tambour gradué. Ce tambour tourne autour d'un axe vertical oz. Le système de visée comporte une source et une lunette dont les axes optiques, symétriques par rapport au plan horizontal contenant l'axe ox, sont dans un plan vertical contenant l'axe oz. Quand l'image, réfléchie par la face étudiée du cristal, est observée dans la lunette on obtient les valeurs correspondantes des angles φ et ρ.

Exemple :



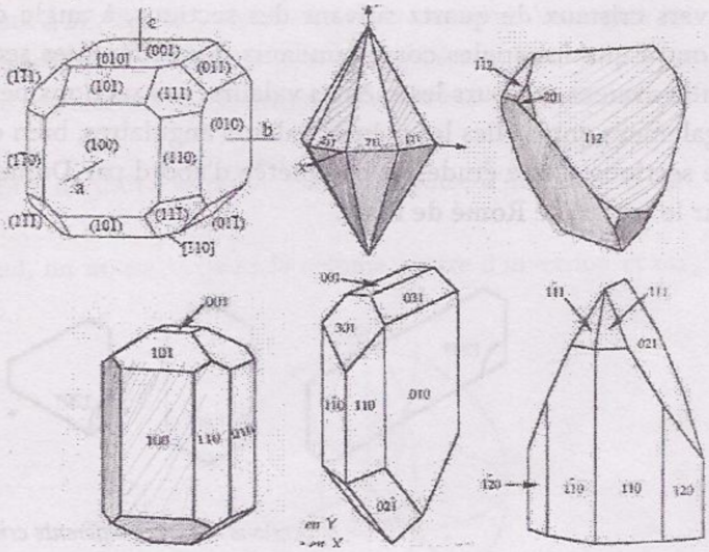


Figure 9