

## I- الاشتقاق

### 1) تعريف

(a) تكون  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  إذا كانت

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R} \text{ ونكتب } f'(x_0) = l$$

(b) تكون  $f$  قابلة للاشتقاق على يمين  $x_0$  إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R} \text{ ونكتب } f'_d(x_0) = l$$

(c) تكون  $f$  قابلة للاشتقاق على يسار  $x_0$  إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R} \text{ ونكتب } f'_g(x_0) = l$$

(d) تكون  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  إذا وفقط إذا كانت  $f$  قابلة

للاشتقاق على يمين ويسار  $x_0$  و  $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

### 2) التاويل الهندسي:

(a) إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  فإن المنحنى  $C_f$  يقبل مماسا (T) في النقطة  $M(x_0, f(x_0))$  معاملة الموجه  $f'(x_0)$  معادلته

$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

(b) إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق على يمين  $x_0$  فإن  $C_f$  يقبل نصف مماس (T<sub>d</sub>) على يمين  $M(x_0, f(x_0))$  معاملة الموجه  $f'_d(x_0)$  معادلته

$$(T_d): y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

(c) لدينا نتيجة مماثلة بالنسبة للاشتقاق على اليسار.

(d) إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$  فإن  $f$  غير قابلة للاشتقاق على

يمين  $x_0$  و  $C_f$  يقبل نصف مماس موازي لمحور الأرتايب وموجه نحو الأعلى على يمين  $M(x_0, f(x_0))$

(e) إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$  فإن  $f$  غير قابلة للاشتقاق على

يمين  $x_0$  و  $C_f$  يقبل نصف مماس موازي لمحور الأرتايب وموجه نحو الأسفل على يمين  $M(x_0, f(x_0))$

(f) إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$  فإن  $f$  غير قابلة للاشتقاق على

يسار  $x_0$  و  $C_f$  يقبل نصف مماس موازي لمحور الأرتايب وموجه نحو الأسفل على يسار  $M(x_0, f(x_0))$

(g) إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$  فإن  $f$  غير قابلة للاشتقاق على

يسار  $x_0$  و  $C_f$  يقبل نصف مماس موازي لمحور الأرتايب وموجه نحو الأعلى على يسار  $M(x_0, f(x_0))$

### ملاحظة:

(\*) إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  فإن المنحنى  $C_f$  يمر بشكل عادي من النقطة  $M(x_0, f(x_0))$  (لا ينكسر).

(\*) وإذا كانت  $f$  غير قابلة للاشتقاق في  $x_0$  فإن المنحنى  $C_f$  (ينكسر) في النقطة  $M(x_0, f(x_0))$  ويكون زاوية.

### 3) اشتقاق مركب دالتين

إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و  $g$  قابلة للاشتقاق على  $f(I)$  فإن  $g \circ f$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و

$$(\forall x \in I) \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

### 4) اشتقاق الدالة العكسية

إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق ورتيبة قطعاً على مجال  $I$  و  $(\forall x \in I): f'(x) \neq 0$  فإن  $f^{-1}$  قابلة للاشتقاق على  $J = f(I)$  و

$$(\forall x \in J): (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

### 5) الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية.

(1) $(a)' = 0$ $(a \in \mathbb{R})$	(12) $(f + g)' = f' + g'$
(2) $(x)' = 1$	(13) $(af)' = af'$
(3) $(ax)' = a$	(14) $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
(4) $(x^r)' = rx^{r-1}$ $r \in \mathbb{Q}$	(15) $(f^r)' = rf' \cdot f^{r-1}$
(5) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	(16) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{fg' - gf'}{g^2}$
(6) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	(17) $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$
(7) $(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	(18) $(\sin x)' = \cos x$
(8) $(\sqrt[3]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{3(\sqrt[3]{u(x)})^2}$	(19) $(\cos x)' = -\sin x$
(9) $(\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u(x)})^{n-1}}$	(20) $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
(10) $(\text{Arc tan } x)' = \frac{1}{1+x^2}$	(21) $(\sin(u(x)))' = u'(x) \cos(u(x))$
(11) $(\text{Arc tan}(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$	(22) $(\cos u(x))' = -u'(x) \sin(u(x))$
(23) $(\tan(u(x)))' = u'(x)(1 + \tan^2(u(x)))$	

### ملاحظة:

(a) لتكن  $u$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$ .

الدالة  $f(x) = \sqrt[n]{u(x)}$  قابلة للاشتقاق على  $D_f - \{x/u(x)=0\}$

(b) إذا كانت  $f$  دالة تغير الصيغة في  $x_0$  أو إذا كان الحد الموجود تحت الجذر ينعدم في  $x_0$ . يجب دراسة اشتقاق  $f$  في  $x_0$  باستعمال معدل التغير.

## 6) رتابة دالة:

لتكن  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$ .

(a) تكون  $f$  تزايدية على  $I$  إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall x \in I) f'(x) \geq 0$$

(b) تكون  $f$  تناقصية على  $I$  إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall x \in I) f'(x) \leq 0$$

(c) تكون  $f$  ثابتة على  $I$  إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall x \in I) f'(x) = 0$$

## 7) مطارف دالة:

لتكن  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$ . يكون للدالة  $f$  مطرافا في  $x_0$  إذا وفقط إذا كانت  $f'$  تتعدم وتغير الإشارة في  $x_0$ .

## 8) التفرع:

لتكن  $f$  دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال  $I$ .

(a) يكون  $C_f$  محدبا "  $\cup$  " إذا وفقط إذا كان  $(\forall x \in I): f''(x) \geq 0$

(b) يكون  $C_f$  مقعرا "  $\cap$  " إذا وفقط إذا كان  $(\forall x \in I): f''(x) \leq 0$

## 9) نقطة انعطاف:

لتكن  $f$  دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال  $I$  وليكن  $x_0 \in I$ . تكون النقطة  $M(x_0, f(x_0))$  نقطة انعطاف إذا وفقط إذا كانت  $f'$  تتعدم وتغير الإشارة في  $x_0$ .

## ملاحظة:

(a) إذا كانت  $f$  تتعدم ولا تغير الإشارة في  $x_0$  فإن النقطة  $M(x_0, f(x_0))$  نقطة انعطاف ويكون المماس في هذه النقطة موازيا لمحور الأفاصيل

(b) إذا أردنا تحديد جميع نقط انعطاف أو دراسة التفرع نحسب  $f''(x)$  ونذكر إشارتها.

## II - التمثيل المبياني لدالة

### 1) محور تماثل - مركز تماثل:

(a) يكون المستقيم  $\Delta: x=a$  محور تماثل المنحنى  $C_f$  إذا وفقط إذا كان:

$$2a - x \in D_f \quad \text{لكل } x \text{ من } D_f$$

$$(\forall x \in D_f): f(2a - x) = f(x) \quad (*)$$

(b) تكون النقطة  $\Omega(a, b)$  مركز تماثل المنحنى  $C_f$  إذا وفقط إذا كان:

$$2a - x \in D_f \quad \text{لكل } x \text{ من } D_f$$

$$(\forall x \in D_f): f(2a - x) = 2b - f(x) \quad (*)$$

## 2) الفروع اللانهائية:

### (a) تعريف

نقول إن  $C_f$  يقبل فرعاً لا نهائياً إذا كان  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

### (b) تصنيف الفروع اللانهائية

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

فإن المستقيم  $\Delta: x=a$  مقارب لـ  $C_f$  بجوار  $a$ .

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

فإن المستقيم  $\Delta: y=b$  مقارب لـ  $C_f$  بجوار  $\infty$ .

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \text{نقوم بحساب} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

فإن  $C_f$  يقبل فرعاً شلجياً اتجاهه محور الأرتيب بجوار  $\infty$ .

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

فإن  $C_f$  يقبل فرعاً شلجياً اتجاهه محور الأفاصيل بجوار  $\infty$ .

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0 \quad \text{نقوم بحساب} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$$

فإن المستقيم  $\Delta: y = ax + b$  مقارب لـ  $C_f$  بجوار  $\infty$ .

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \infty$$

فإن  $C_f$  يقبل فرعاً شلجياً اتجاهه  $y = ax$  بجوار  $\infty$ .

## ملاحظة:

يكون المستقيم  $\Delta: y = ax + b$  مقارباً لـ  $C_f$  بجوار  $\infty$  إذا وفقط إذا

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

ونستعمل هذه الخاصية إذا كان السؤال هو بين أن  $\Delta: y = ax + b$

مقارب أو إذا كانت  $f(x)$  تكتب على شكل  $f(x) = ax + b + h(x)$

$$\text{مع} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$$

### 3) بعض الملاحظات:

(a) حلول المعادلة  $f(x) = m$  هي أفاصيل نقط تقاطع  $C_f$  مع

$$\text{المستقيم } \Delta: y = m$$

(b) حلول المعادلة  $f(x) = 0$  هي أفاصيل نقط تقاطع  $C_f$  مع محور

الأفصيل.

(c) حلول المعادلة  $f(x) = g(x)$  هي أفاصيل نقط تقاطع  $C_f$  و  $C_g$ .

(d) حلول المتراجحة  $f(x) \leq g(x)$  هي المجالات التي يكون

فيها  $C_f$  تحت  $C_g$ .

(e) من أجل دراسة وضع  $C_f$  بالنسبة للمستقيم  $\Delta: y = ax + b$  نقوم

بدراسة إشارة  $f(x) - y$

(\*) إذا كان  $f(x) - y \geq 0$  فإن  $C_f$  يوجد فوق  $\Delta$ .

(\*) إذا كان  $f(x) - y \leq 0$  فإن  $C_f$  يوجد تحت  $\Delta$ .

تم نشر هذا الملف بواسطة قرص **تجربتي** مع الباكالوريا

[tajribatybac@gmail.com](mailto:tajribatybac@gmail.com)

[facebook.com/tajribaty](https://facebook.com/tajribaty)

[jjel.tk/bac](http://jjel.tk/bac)