I) النهايات :

1.I) نهايات الدوال المرجعية :

✷ تذكير :

الدالة	مجموعة التعريف	النهاية عند 0	النهاية عند $+\infty$	النهاية عند $-\infty$
x	$]-\infty ; +\infty[$	0	$+\infty$	$-\infty$
x^2	$]-\infty ; +\infty[$	0	$+\infty$	$+\infty$
x^3	$]-\infty ; +\infty[$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$	0	0
$\sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	0	$+\infty$	لايمكن
$\frac{\sin x}{x}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	1	0	0
$\frac{1-\cos x}{x^2}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	1/2	0	0

2.I) العمليات على النهايات :

✷ نهاية مجموع :

Lim f	Lim g	Lim f + g
l	l'	$l + l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

✷ نهاية جداء :

Lim f	Lim g	Lim f × g
l	l'	$l \times l'$
$l > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	∞	شكل غير محدد

✷ نهاية خارج :

Limf	Lim g	Lim f / g
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$-\infty$ أو $+\infty$	0
$+\infty$	$l' > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$l' < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l' > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l' < 0$	$+\infty$
$-\infty$ أو $+\infty$	$-\infty$ أو $+\infty$	ش.غ
$l > 0$ أو $+\infty$	0^+	$+\infty$
$l > 0$ أو $+\infty$	0^-	$-\infty$
$l < 0$ أو $-\infty$	0^+	$-\infty$
$l < 0$ أو $-\infty$	0^-	$+\infty$
∞	0	∞
0	0	ش.غ

ملحوظة :

- توجد دوال لاتقبل نهاية عند x_0 كالدالة $\frac{1}{x}$ ليس لها نهاية عند 0 .
- توجد دوال لا تقبل أ ية نهاية بجوار ∞ كدالة sin .

✷ **نهاية مركب دالتين :**

خاصية 1 :

لتكن f و g دالتين , a , L , L' ثلاث أ عداد حقيقية (قد تكون $+\infty$ أو $-\infty$)

إ ذا كانت : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \\ \lim\limits_{t\to L} g(t) = L' \end{cases}$ فإ ن : $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = L'$

خاصية 2:

لتكن f و g و h ثلاث دوال . نفترض أ نه من أ جل قيم جد كبرى ل x لدينا $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
إ ذا كانت : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L$ فإ ن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L$.

ملحوظة :

الخاصية تبقى صحيحة بجوار $-\infty$ أو x_0 شريطة تحقق المتفاوتة بالجوار.

II) الإ تصال :

تعريف :

f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 . f متصلة في x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

II.1) التمديد بالإتصال :

تعريف :

f دالة غير معرفة في x_0 و تقبل نهاية L عند x_0 ($\lim_{x\to x_0} f(x) = L$) . الدالة g المعرفة ب:

$$\begin{cases} g(x) = f(x)\,, x \neq x_0 \,/\, x \in D_f \\ g(x) = L \end{cases}$$

تسمى تمديد بالإ تصال للدالة f في x_0 .

II.2) الإ تصال على مجال :

تعريف :

تكون الدالة f متصلة على]a,b[إ ذاوفقط إ ذا كانت متصلة في كل نقطة من]a,b[.

تكون f متصلة على[a,b] إ ذا وفقط إ ذاكانت متصلة على]a,b[و متصلة على يمين a و يسار b .

ملحوظة:

- الدالة متصلة على يمين a $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
- الدالة متصلة على يسار b $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

II.3) إ تصال مركب دالتين :

خاصية 1:

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I) \subset J$ ليكن x_0 عنصر من I .

إ ذا كانت f متصلة في x_0 و كانت g متصلة في $f(x_0)$ فإ ن gof متصلة في x_0 .

خاصية 2 :

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I) \subset J$.

إ ذا كانت f متصلة على I و g متصلة على J فإن gof تكون متصلة على I .

II.4) مركب دالة متصلة ودالة تقبل نهاية :

خاصية :

f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I) \subset J$.

إ ذا كانت f تقبل النهاية L في x_0 وكانت g متصلة في L فإ ن الدالة gof تقبل النهاية g(L) فيx_0 .

ملحوظة:

الخاصية تبقى صالحة عند $+\infty$ أ و$-\infty$ أ و عند x_0 على اليمين أو اليسار مع تعويض المجال I بمجال مناسب .

II.5) صورة مجال بدالة متصلة :

خاصية1:

صورة مجال من IR بدالة متصلة هو مجال من IR .

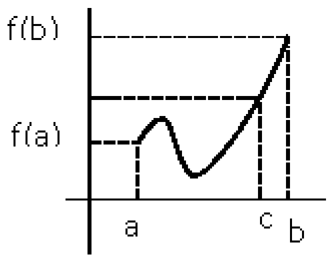
حالات مختلفة :

◆ f دالة متصلة على المجال I .

المجال I	الدالة f تزايدية قطعا على I	الدالة f تناقصية قطعا على I
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),f(b)\right]$	$\left[f(b),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a,b[$	$]f(a),f(b)[$	$]f(b),f(a)[$

مبرهنة القيم الوسيطة:

f متصلة على $[a,b]$ لكل عنصر α بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر c من $[a,b]$ بحيث $f(c)=\alpha$.



خاصية 2 :

f متصلة على $[a,b]$ بحيث $f(a)\langle 0$ و $f(b)\rangle 0$ يوجد على الأقل c من $]a,b[$ بحيث $f(c)=0$

خاصية 3 :

f متصلة و رتيبة قطعا على $[a,b]$ بحيث $f(a)\langle 0$ و $f(b)\rangle 0$ يوجد عنصر وحيد c من $]a,b[$ بحيث $f(c)=0$

III) الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال:

1.III) التقابل :

تعريف1 :

- f تقابل من I نحو J $\Leftrightarrow$ f شمولية و تباينية .
- f شمولية من I نحو J $\Leftrightarrow$ $\forall y\in J:\exists x\in I/f(x)=y$
- f تباينية $\Leftrightarrow$ $(f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y)$

خاصية :

كل دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فهي تقابل من I نحو $f(I)$

تعريف 2:

f تقابل من I نحو J $\Leftrightarrow$ $\forall y\in J:\exists! x\in I/f(x)=y$

2.III) الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال من IR :

تعريف :

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على مجال I فإنها تقابل من I نحو f (I) و تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من f (I) نحو I بحيث : $\forall x \in I, \forall y \in f(I) \;:\; f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

خاصية :

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على مجال I فإن دالتها العكسية f^{-1} متصلة على f(I) ولها نفس منحى تغيرات f

ملحوظة :

- المنحنيان ζ_f و $\zeta_{f^{-1}}$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول للمعلم أي بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y = x$.
- نقبل أن f^{-1} متصلة على f (I) .
- لكل x من I : $f^{-1}of(x) = x$ و لكل y من f(I) : $fof^{-1}(y) = y$

3. III) أمثلة لبعض الدوال العكسية :

1.3. III) دالة الجذر من الرتبة n:

خاصية و تعريف :

الدالة x^n تقابل من IR+ إلى IR+ و تقابلها العكسي يسمى دالة الجدر من الرتبة n و يرمز لها بالرمز $\sqrt[n]{x}$

ملحوظة :

- $\sqrt[n]{x}$ يقرأ جدر x من الرتبة n .

نتائج :

$\forall x \in IR+ \;,\; \forall y \in IR+$

- $x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$ ◆ $(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$ ◆ $x = y \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y}$
- $x \langle y \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} \langle \sqrt[n]{y}$ ◆ الدالة $\sqrt[n]{x}$ متصلة على IR+ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n.p]{x^p}$ ◆ $\sqrt[p]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n.p]{x}$ ◆ $\sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x.y}$ ◆ $(\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$ ◆ $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$

1.3.III) إتصال و نهاية مركب دالة f و دالة الجدر من الرتبة n:

خاصيات :

لنكن f دالة موجبة على مجال I و x عنصر من I .

❶ إذا كانت f متصلة على I فإن $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I .

❷ إذا كانت $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \quad \geq 0$ فإن $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\quad}$.

❸ إذا كانت $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.

الخاصيات تبقى صحيحة $x_0^- \;;\; x_0^+ \;; -\infty \;; +\infty$

متطابقات :

- $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$, ◆ $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \dfrac{a - b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}}$

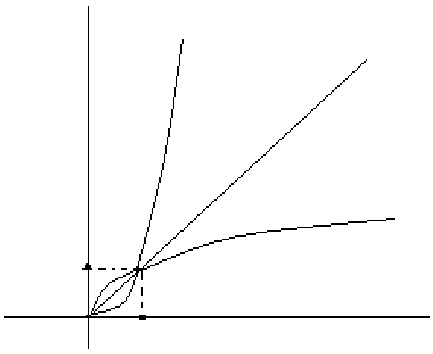
1.3.III). التمثيل المبياني لدالة الجدر من الرتبة n :

◆ $f : IR^+ \to IR^+$
$x \to x^n$

◆ $f^{-1} : IR^+ \to IR^+$
$x \to \sqrt[n]{x}$

x	0	$+\infty$
f(x)	0 ↗	$+\infty$

x	0	$+\infty$
$f^{-1}(x)$	0 ↗	$+\infty$



◆ المنحنيان ζ_f و $\zeta_{f^{-1}}$ متماثلا ن بالنسبة للمنصف الأ ول للمعلم .

4. III) دالة قوس الظل :

خاصية و تعريف :

الدالة $\tan(x)$ تقابل من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ نحو IR . تقابلها العكسي يسمى دالة قوس الظل و يرمز لها بالرمز $\text{Artan}(x)$

نتائج :

◆ $\text{Artan}(x) = y \Leftrightarrow \tan(y) = x \quad \left(\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) \quad (\forall x \in IR)$.

◆ $\tan(\text{Arctan}(x)) = x \quad (\forall x \in IR)$ ◆ $\text{Arctan}(\tan(x)) = x \quad \left(\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)$.

◆ $(\forall x_1 \in IR)(\forall x_2 \in IR) \begin{cases} \text{Arctan}(x_1) = \text{Arctan}(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \\ \text{Arctan}(x_1) \langle \text{Arctan}(x_2) \Leftrightarrow x_1 \langle x_2 \end{cases}$

◆ الدالة قوس الظل متصلة على IR و لدينا : $\lim_{x\to-\infty} \text{Arc}\tan(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to+\infty} \text{Arc}\tan(x) = \frac{\pi}{2}$.

1.4. III) التمثيل المبياني لد الة قوس الظل :

◆ $f : \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to IR$
$x \to \tan(x)$

◆ $f^{-1} : IR \to \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$
$x \to \text{Arctan}(x)$

X	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

X	$-\infty$	$+\infty$
f^{-1}	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	$\frac{\pi}{2}$

- المنحنيان ζ_f و $\zeta_{f^{-1}}$ متماثلا ن بالنسبة للمنصف الأ ول للمعلم .