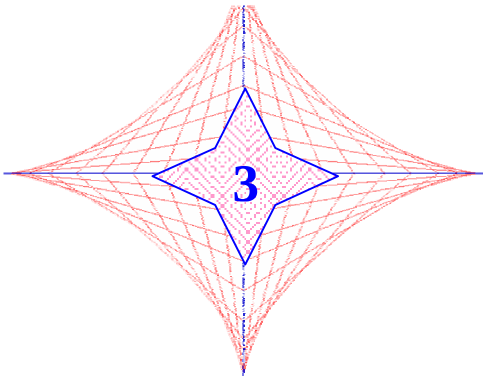
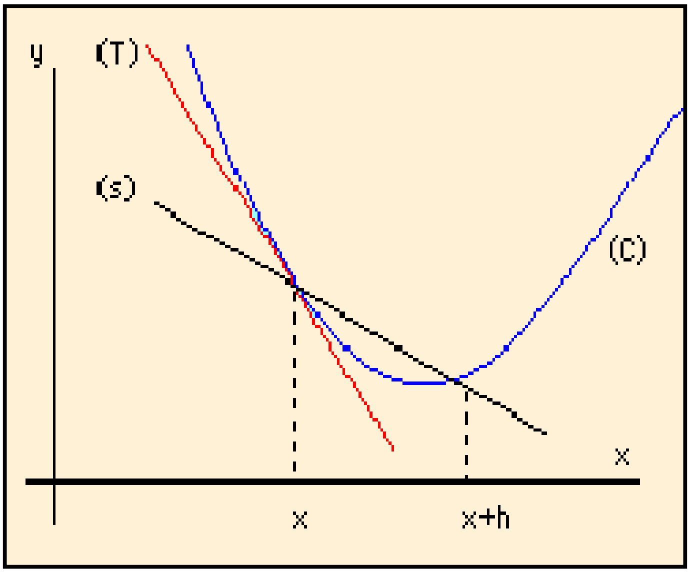


الاشتقاقية

الكفاءات المستهدفة

- حساب العدد المشتق لدالة عند عدد حقيقي
- تعيين معادلة مماس منحن في نقطة منه.
- حساب مشتقات الدوال المرجعية
- حساب مشتقات الدوال $f+g$، $f \times g$، $\frac{1}{g}$، $\frac{f}{g}$، $x \mapsto f(ax+b)$



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

"ليونارد أولر" من أكبر العلماء الذين عرفهم التاريخ ، استقرَ في البداية بـِـ سان بيترسبورق ثم في برلين سنة 1741 حيث ترأس أكاديمية العلوم إلى غاية 1766 تخصص في علم الفلك (دراسة مسار المجرَات) ، علم الفيزياء (الحقل المغناطيسي ، البصريات ، ...) الرياضيات (الحساب، الهندسة التفاضلية ، مرورا بالتحليل الرقمي و الوظيفي ، حساب ، تغيرات البيانات ، المساحات الجبرية...) ، معادلة أولر (حساب التغيرات)

هو من أحد مؤسسي التحليل الو ظيفي و المعادلات التفاضلية

EULER Leonhard
Suisse, 1707-1783

الانشطة

نشاط 1:

الهدف : إدراج مفهوم العدد المشتق بالسرعة .

1) $v_m = \frac{5(2+h)^2-5(2)^2}{h} = 5h+20$.

2)

h	-0.2	-0.1	-0.05	-0.001
v_m	19	19.5	19.75	19.995
h	0.00001	0.0001	0.005	0.01
v_m	20.00005	20.0005	20.025	20.05

3) $v(2)\approx 20ms^{-1}$.

نشاط 2:

الهدف : تفسير العدد المشتق هندسيا وكتابة معادلة المماس .

1) $a=\frac{\frac{3}{4}-4}{2+\frac{9}{2}}=-\frac{1}{2}$ 2) $g(2)=-\frac{1}{2}$ ومنه $g(2)=a$

3) (EL) : $y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}$.

نشاط 3: **الهدف :** تفسير السرعة اللحظية هندسيا .

1) الرسم . 2) $\frac{5(5+h)^2-5(5)^2}{h}=5h+50$

$v_m=\lim_{h\to0}5h+50=50ms^{-1}$

3) • ترتيب النقطة M هو $5t^2$.

• معامل توجيه (AM) هو : $\frac{5t^2-20}{t-2}=5(t+2)$

ونسبة تزايد d عند $t_0=2$: $\frac{d(t)-d(2)}{t-2}=5(t+2)$

• للحصول بيانيا على السرعة اللحظية عند $t_0=2$ نقرب النقطة M نحو النقطة A .

• السرعة اللحظية هي $\lim_{t\to2}5(t+2)=20ms^{-1}$ و هذا يتناسب مع التفسير الهندسي .

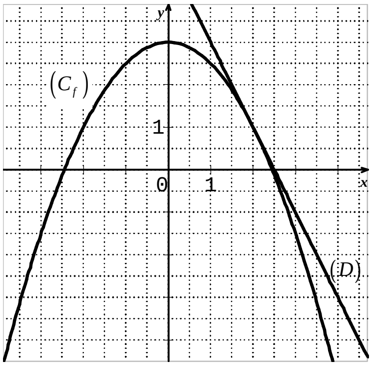
نشاط 4:

الهدف : إدراج مفهوم المماس

1)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	3	↘

1)
2)



3) $-\frac{1}{2}x^2+3=-2x+5$ تعني $(x-2)^2$

ومنه (C_f) يقطع (D) في نقطة وحيدة $A(2;1)$.

4) (D) يمس (C_f) .

الأعمال موجهة

كيفية إنشاء مماس لقطع مكافئ و لقطع زائد.

مسألة1: مماس لقطع مكافئ.

• $y=\frac{2a}{k}x-\frac{a^2}{k}$

• تقاطع (T) مع محور الفواصل : $\left(\frac{a}{2};0\right)$

• (T) يمر بالنقطتين $A\left(a;\frac{a^2}{k}\right)$ و $A'\left(\frac{a}{2};0\right)$

تطبيق: $f:x\mapsto -3x^2$ ، $k=-\frac{1}{3}$.

• المماس (T) للمنحنى ، عند النقطة $A(1;-3)$ يشمل النقطة $A'\left(\frac{1}{2};0\right)$

• المماس (T) للمنحنى ، عند النقطة $B(-2;12)$ يشمل النقطة $B'(-1;0)$.

• المماس (T) للمنحنى ، عند النقطة $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};-1\right)$ يشمل النقطة $C'\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};0\right)$.

مسألة2: مماس لقطع زائد.

• $D_f=\mathbb{R}^*$.

• معادلة للمماس (T) لـ H عند $M\left(a;\frac{1}{a}\right)$ هي :

$y=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}$. • $A\left(0;\frac{2}{a}\right)$ و $B(2a;0)$.

• $\left(a;\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{0+2a}{2};\frac{0+\frac{2}{a}}{2}\right)$.

• المماس (T) هو المستقيم (AB) • إنشاء H .

• (T_1) هو $(R'R'')$ حيث $R'(0;-2)$ و $R''(-2;0)$.

• (T_2) هو $(N'N'')$ ؛ $N'\left(0;-\frac{2}{3}\right)$ و $N''(-6;0)$.

• (T_3) هو $(P'P'')$ حيث $P'(0;-4)$ و $P''(-1;0)$.

تقريبات تآلفية مألوفة عند0:

1) التقريب التآلفي عند 0 هو :

$f(x)\approx f(0)+f'(0)\times x$

$f(x)=$	$(1+x)^2$	$(1+x)^3$	$\sqrt{1+x}$	$\frac{1}{1+x}$
$f(x)\approx$	$1+2x$	$1+3x$	$1+\frac{1}{2}x$	$1-x$

$f(x)=$	$\frac{1}{(1+x)^2}$	$\cos x$	$\sin x$
$f(x)\approx$	$1-2x$	1	x

2) $f(0,003)=\frac{1}{1+0,003}\approx 1-0,003=0,997$

$f(-0,02)=\frac{1}{1-0,02}\approx 1+0,02=1,02$

$f(0,003)=(1+0,003)^3\approx 1+0,009$

$f(-0,02)=(1+(-0.02))^3\approx 1-0,06$

$f(0,002)=(1+0,002)^2\approx 1,004$

$f(-0,01)=(1-0,01)^2\approx 0,98$

$f(0,004)=\sqrt{1+0,004}\approx 1+0,002$

$f(0,01)=\sqrt{1-0,01}\approx 1-0,005$

$f(0,01)=\frac{1}{(1+0,01)^2}\approx 1-0,04=0,96$

$f(-0,01)=\frac{1}{(1-0,01)^2}\approx 1+0,02=1,002$.

تطبيق:

- $(\Delta): y=-x+1$.
- $[-4,6 10^{-7};4,6 10^{-7}]$.
- $\frac{1}{x+1}-(1-x)=\frac{x^2}{x+1}$ و من أجل $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

ولدينا $\frac{1}{2}\le x+1\le\frac{3}{2}$ ومنه $\frac{2}{3}\le\frac{1}{x+1}\le 2$ ويعني أن

$\frac{2x^2}{3}\le\frac{x^2}{x+1}\le 2x^2$ وبالتالي $0\le\frac{x^2}{x+1}\le 2x^2$

- بوضع $2x^2=10^{-2}$ نجد $x=\sqrt{\frac{10^{-2}}{2}}\approx 0,071$

أو $x\approx -0,071$ إذن المجال هو $[-0,071;0,071]$.

تمارين

1 صحيح **2** خاطئ . **3** صحيح

4 صحيح **5** خاطئ **6** صحيح

7 خاطئ **8** خاطئ **9** صحيح

10 خاطئ **11** صحيح **12** صحيح

13 $f'(1)=2$

14 $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=h+2$.

15 الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1.

16 العدد $f'(2)$ هو -1 .

17 $f'(0)$ غير معرف

18 معادلة مماس المنحني للدالة f عند النقطة $A(0;-1)$ هي $y=3x+1$.

19 العدد $f'(1)$ هو 2 .

20 الدالة المشتقة f' للدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f'(x)=2x+1$.

21 $f'(-1)=0$.

22 1) $f'(0)=0$ ، 2) $f'(3)=-3$ 3) $f'(-2)=-12$

23 1) $f'(-1)=1$ ، 2) $f'(1)=-3$ 3) $f'(-3)=-\frac{1}{18}$ ، 4) $f'(4)=\frac{1}{\sqrt{8}}$ 5) $f'(-1)=-\frac{3}{2\sqrt{3}}$ ، 6) $f'\left(\frac{1}{4}\right)=-1$

24 1) $\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=4$

2) لدينا $\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=4$ ، نستنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق من أجل -1 و $f'(-1)=4$

3) نعم الدالة f تقبل الاشتقاق من أجل 0 .

25 1) ننشر $(2+h)^3$

2) $\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+6h+12)=12$ نستنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 2 و $f'(2)=12$

26 1) $f(2+h)-f(2)=h^3-8h$

2) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=-8$ ، إذن $f'(2)=-8$.

27 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=-2$ ، إذن $f'(2)=-2$.

28 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=5$ ، إذن $f'(-1)=5$

29 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=1$ ، إذن $f'(3)=1$

30 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=1$ ، إذن $f'(-2)=1$

31 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=-\dfrac{1}{9}$ ،

إذن $f'(2)=-\dfrac{1}{9}$

32 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=-\dfrac{1}{9}$ ،

إذن $f'(2)=-\dfrac{1}{9}$

33 1) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=-2$ ،

إذن $f'(3)=-2$

2) $f'(5)=-\dfrac{2}{9}$ ، 3) $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{8}{25}$

4) $f'\left(\sqrt{3}\right)=-\dfrac{2}{7-4\sqrt{3}}$ ، 5) $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$

34 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=2$ ، إذن $f'(3)=2$

35 1) $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{\sqrt{h+4}-2}{h}$

2) من أجل $h>-4$ و $h\neq0$:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{h+4}-2}{h}=\frac{\left(\sqrt{h+4}-2\right)\left(\sqrt{h+4}+2\right)}{h\left(\sqrt{h+4}+2\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{h+4}+2}$$

3) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{1}{4}$

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 و لدينا $f'(1)=\dfrac{1}{4}$

36 نحسب $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(7+h)-f(7)}{h}$

و نجد $f'(7)=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$

37 نحسب $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$

و نجد $f'(-3)=-\dfrac{1}{4}$

38 تصويب: الترقيم يبدأ من 1)

1) $f(x)=2x-7$ و $a=3$

نحسب $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$ و نجد $f'(3)=2$

بنفس الطريقة نحسب $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

و نجد $f'(a)$ في باقي الحالات الأخرى.

39 نفس الطريقة المتبعة في حل التمرين رقم 38 .

40 نفس الطريقة المتبعة في حل التمرين رقم 38 .

41 1) $f:x\mapsto x^2+2$ ، $a=6$

$f(a+h)=f(6+h)=(6+h)^2+1$

$$f'(6)=\lim_{h\to0}\frac{f(6+h)-f(6)}{h}=\lim_{h\to0}(h+12)=12$$

إذن العدد المشتق للدالة f من اجل $a=6$ هو $f'(6)=12$

و بنفس الطريقة نحسب $f'(a)$ في الحالات الأخرى المتبقية.

42 1) $f:x\mapsto x^2$

$$f'(3)=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to0}(h+6)=6$$

2) أحسن تقريب تآلفي للعدد $f(3+h)$ من اجل القيم الصغيرة للعدد $|h|$ هو $f(3)+h\,f'(3)$ أي $9+6h$

43 1) $f:x\mapsto x^2+2$

$$f'(-1)=\lim_{h\to0}\frac{f(h-1)-f(-1)}{h}=-2$$

2) أحسن تقريب تآلفي للعدد $f(h-1)$ من اجل القيم الصغيرة للعدد $|h|$ هو $f(-1)+h\,f'(-1)$ أي $3-2h$.

44 1) نعتبر الدالة $f:x\mapsto x^2$

الدالة f تقبل الاشتقاق من اجل القيمة 2 و لدينا :

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(2+h)^2-4}{h}=4$$

أحسن تقريب تآلفي للعدد $(2+h)^2$ عندما ينتهي h إلى 0 هو $f(2)+h\,f'(2)$ أي $4+4h$.

2) $2,04=2+0,04$

إذن $(2,04)^2 \cong 4+4(0,04)$ أي $(2,04)^2 \cong 4,16$

$1,98=2-0,02$

إذن $(1,98)^2 \cong 4+4(-0,02)$ أي $(1,98)^2 \cong 3,92$

$2,001=2+0,001$

إذن $(2,001)^2 \cong 4+4(0,001)$ أي

$(2,001)^2 \cong 4,004$

45 1) نعتبر الدالة $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

الدالة f تقبل الاشتقاق من اجل القيمة 3 و لدينا :

$$f'(3)=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left(\frac{1}{3+h}\right)^2-\frac{1}{3}}{h}=-\frac{1}{9}$$

أحسن تقريب تآلفي للعدد $\frac{1}{3+h}$ عندما ينتهي h إلى 0

هو $-\frac{1}{9}h+\frac{1}{3}$.

2) $3,02=3+0,02$ إذن $\frac{1}{3,02}\cong -\frac{1}{9}(0,02)+\frac{1}{3}$

أي $\frac{1}{3,02}\cong 0,331111111$

و بنفس الطريقة نجد قيمة تقريبية لـ $\frac{1}{2,99}$ و $\frac{1}{3,1}$

46 1) نعتبر الدالة $f : x \mapsto x^3$

الدالة f تقبل الاشتقاق من اجل القيمة 1و لدينا :

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^3-1}{h}=3$$

أحسن تقريب تآلفي للعدد $(1+h)^3$ عندما يقترب h من 0

هو $f(1)+h\,f'(1)$ أي $1+3h$.

2) $1,04=1+0,04$

إذن $(1,04)^3\cong 1+3(0,04)$ أي $(1,04)^3\cong 1,12$

$(0,96)^3\cong 0,88$

47 1) نعتبر الدالة $f : x \mapsto \sqrt{x}$

الدالة f تقبل الاشتقاق من اجل القيمة 5 و لدينا :

$$f'(5)=\lim_{h\to0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{5+h}-\sqrt{5}}{h}=\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

أحسن تقريب تآلفي للعدد $\sqrt{5+h}$ عندما ينتهي h إلى 0

هو $f(5)+h\,f'(5)$ أي $\sqrt{5}+\frac{h}{2\sqrt{5}}$.

2) $5,01=5+0,01$

إذن $\sqrt{5,01}\cong\sqrt{5}+\frac{0,01}{2\sqrt{5}}$

أي $\sqrt{5,01}\cong 2,238304045$

بنفس الطريقة نجد قيمة مقربة لـ $\sqrt{4,97}$ و $\sqrt{4,83}$

(بملاحظة أن $4,97=5-0,03$ و $4,83=5-0,17$)

48 1) $f(2,1)=f(2+0,1)$

أي $f(2,1)\cong 0,1\times f'(2)+f(2)$

$f(2,1)\cong 3,4$

2) $f(2,1)=f(2+0,1)$

$f(2,2)\cong 0,1\times f'(2,1)+f(2,1)$

أي $f(2,2)\cong(0,1\times 2)+3,4$ أي $f(2,2)\cong 3,6$

49 1) معادلة مماس المنحني (C) عند النقطة $A(2;0)$ و الذي معامل توجيهه $a=1$

هي: $y=a(x-x_0)+f(x_0)$ حيث x_0 هي فاصلة A

أي $y=1(x-2)+f(2)$

أي معادلة المماس هي $y=x-2$

- و بنفس الطريقة نعين المماس في الحالات الأخرى.

50 معادلة (C) هي $y=\frac{2x^2}{5}$ و $x_0=3$

معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=3$

هو: $f'(3)=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{12}{5}$ ،

(بوضع $f(x)=\frac{2x^2}{5}$)

معادلة المماس هي : $y=f'(3)(x-3)+f(3)$ و نجد

$y=\frac{12}{5}x-\frac{18}{5}$ ، ($f(3)=\frac{18}{5}$)

و بنفس الطريقة يتم تعيين معادلة المماس للمنحني (C) في الحالات الأخرى المتبقية .

51 بوضع: $f(x)=x^2-2x$. معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة -1 هو:

$$f'(-1)=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=-4$$

معادلة المماس هي : $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ و نجد $y=-4x-1$ ، ($f(-1)=3$)

52 بوضع: $f(x)=-\frac{4}{x}$ معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة 2 هو:

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=1$$

معادلة المماس هي : $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ و نجد

$y=x-4$ ، ($f(2)=-2$)

53 بوضع: $f(x)=2-\frac{1}{2}x^2$ ، معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 هو:

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=-1$$

معادلة المماس هي : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و نجد

$y=-x+\frac{5}{2}$ ، $\left(f(1)=\frac{3}{2}\right)$

من الواضح أن المماس يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $\frac{5}{2}$.

54 1) نحل المعادلة ذات المجهول x : $x^2=-4x-4$ و نجد $x=-2$ ، إذن (C) و (D) يتقاطعان في النقطة $A(-2;4)$.

2) نستنتج أن (D) هو المماس لـ (C) في النقطة $A(-2;4)$.

55 <u>تصحيح</u> : معادلة (D) : $y=-2x-2$ وفي السؤال1) ونجد $3x^3+2x^2-5x-4=(x+1)(ax^2+bx+c)$

$$3x^3+2x^2-5x-4=(x+1)(3x^2-x-4)$$

2) نحل المعادلة $3x^3+2x^2-7x-6=-2x-2$

ونستعمل السؤال السابق ونجد $x=-1$ أو $x=\frac{4}{3}$

إذن النقطة المشتركة ذات الترتيب معدوم هي $A(-1;0)$

3) $x=-1$ هو حل مضاعف للمعادلة : $3x^3+2x^2-7x-6=-2x-2$ إذن (D) مماس لِـ (C) في النقطة $A(-1;0)$.

56 معادلة مماس المنحني (C) عند النقطة $A(2;4)$ هي: $y=f'(2)(x-2)+f(2)$

بما أن المماس يوازي (Δ) فإن $f'(2)=3$

إذن معادلة مماس هي $y=3x-2$

57 بما أن شعاع توجيه المماس $\vec{i}$ فإنه يوازي حامل محور الفواصل و بالتالي معادلته $y=-3$

(ترتيب النقطة A هو -3)

58 1) من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=3$ ، إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند a و $f'(a)=3$.

2) $f':x\mapsto m$

59 1) من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=3a^2$ ، إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل x من $\mathbb{R}$ و $f'(x)=3x^2$.

2) معادلة مماس منحني الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي: $y=3x-2$

60 1) الدالة g هي مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=-x+2$

2) أ)

$$\frac{j(a+h)-j(a)}{h}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

$$\frac{j(a+h)-j(a)}{h}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{1}{2}h+a-2$$

ب) j تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$

جـ) $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=2-a$

و $\frac{j(a+h)-j(a)}{h}=\frac{1}{2}h$

و منه $\lim\limits_{h\to0}\frac{j(a+h)-j(a)}{h}=0$ ، إذن الدالة j ثابتة

61 1) من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=2a-5$ ، إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل x من $\mathbb{R}$ و $f'(x)=2x-5$.

2) معادلة مماس المنحني (P) عند النقطة $E(0;4)$ هي: $y=-5x+4$

3) نعم توجد نقطة M من (P) يكون مماسه عندها موازيا للمستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x$ حيث فاصلة M هي $\frac{11}{4}$.

(لإيجاد هذه الفاصلة نحل المعادلة $f'(x)=\frac{1}{2}$)

4) معادلة مماس المنحني (P) عند النقطة ذات الفاصلة a هي: $y=(2a-5)x-a^2+4$

5) المنحني (P) يشمل مماسين كل منهما يشمل المبدأ إذا كان $-a^2+4=0$ أي $(a=-2)$ أو $(a=2)$.

62 1) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=6x^2+10x-1$

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=2x\cos\frac{\pi}{3}-1$

3) الدالة f تقبل الاشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

4) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{2x^4+6x^2+10x}{(x+1)^2}$

63 الدالة $x\mapsto x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و الدالة $x\mapsto\sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و بالتالي الدالة $x\mapsto x\sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ومن أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

64 1) $f':x\mapsto 6x-4$ ، 2) $f':x\mapsto x-\frac{1}{2}$ 3) $f':x\mapsto x+2$

(4 $f': x \mapsto 4\sqrt{3}x^3 - 3\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{6}x + 3$

65 (1 $f': x \mapsto \frac{2}{x^2}$ ، (2 $f': x \mapsto -\frac{3}{(x+2)^2}$

(3 $f': x \mapsto 2 + \frac{4}{(x-3)^2}$ (4 $f': x \mapsto \frac{-3x^2-10x-9}{(x^2-3)^2}$

66 (1 $f': x \mapsto 3x^2$

- $g(x) = f(x-3)$

و منه $g'(x) = f'(x-3) = 3(x-3)^2$

- $g(x) = f(2x+5)$

و منه $g'(x) = 2f'(2x+5) = 2\times 3(2x+5)^2$

- $g(x) = f(-3x+2)$ و منه

$g'(x) = -3f'(-3x+2) = -3\times 3(-3x+2)^2$

67 (1 $f(x) = \sqrt{x}$ و

$g(x) = f(x-1) = \sqrt{x-1}$

الدالة f معرفة على $[0;+\infty[$ و الدالة g معرفة على $[1;+\infty[$.

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ و الدالة g تقبل الاشتقاق على $]1;+\infty[$.

(3 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

و $g'(x) = f'(x-1) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

- نتبع نفس الطريقة في الحالتين المتبقيتين.

68 (1 $f'(x) = 6(3x-2)$ ،

(2 $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$

(3 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$ ، (4 $f'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}$

(5 $f'(x) = \frac{6x-3}{2\sqrt{x}}$ ،

(6 $f'(x) = \frac{-5x^2+6x+15}{2\sqrt{-x+3}}$

69 (1 $f'(x) = -3\sin(3x-2)$

(2 $f'(x) = 3\cos(3x-2)$

(3 $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

(4 $f'(x) = \cos(x-2\pi)\cos(x+\pi) - \sin(x+\pi)\sin(x-2\pi)$

(5 $f'(x) = -2\cos 3x \sin 3x$

70 أكبر مجموعة بحيث تكون الدالة f قابلة للاشتقاق هي $]0;+\infty[$ ، ومن أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$

لدينا: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{(x+1)^2}$

$f(0,96) \cong 1,49$ ، $f(1,02) \cong 1,505$

71 (1 $y = 3x+4$ ، (2 $y = 11x+5$ ،

(3 $y = -7x+11$

72 (1 معادلة المماس (T_1) لـ (C_1) عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$ هي $y = -2x_0x + x_0^2 + 3$

و معادلة المماس (T_2) لـ (C_2) عند النقطة $A(x_0, g(x_0))$ هي $y = -\frac{2x}{x_0^2} + \frac{4}{x_0}$

$-2x_0 = \frac{-2}{x_0^2}$ و $\frac{4}{x_0} = x_0^2 + 3$ فيكون $x_0 = 1$

إذن يوجد مستقيم (Δ) يمس المنحنيين (C_1) و (C_2) في النقطة $A(1;2)$.

2) معادلة (Δ) هي : $y = -2x+4$

3) (Δ) أعلى (C_1) ، (Δ) أعلى (C_2) في $]-\infty;0[$ و (Δ) أسفل (C_2) في $]0;+\infty[$.

73 (1 $f'(x) = \frac{-ax^2 + (6-2b)x + a}{(x^2+1)^2}$

(2 $a = 4$ و $b = 3$

74 $a = -1$ و $b = 2$

75 نناقش حسب قيم m عدد حلول المعادلة $f'(x) = 0$

إذا كان $m = 0$ فإنه يوجد مماس واحد.

و إذ كان $m \neq 0$ فإنه يوجد مماسان.

76 (1 $DG = m - 2x$ ، $DE = x\tan 60° = x\sqrt{3}$

ومنه مساحة المستطيل هي : $R(x) = -2\sqrt{3}x^2 + m\sqrt{3}x$

$R'(x) = -4\sqrt{3}x + m\sqrt{3}$ ؛ $R'(x) = 0$ معناه $x = \frac{m}{4}$

بما أن $R(x)$ من الدرجة الثانية و $-2\sqrt{3} < 0$ فإن $R\left(\frac{m}{4}\right)$ هي القيمة الحدية الكبرى ومنه $x = \frac{m}{4}$ ولدينا $R\left(\frac{m}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}m^2$.

2) مساحة المثلث هي

$T(m) = \frac{1}{2}m \times \frac{m}{2}\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}m^2$

ومنه $R\left(\frac{m}{4}\right) = \frac{T(m)}{2}$

$T(4,002) \approx T(4) + 0,002T'(4)$

ومنه $T(4,002) \approx 4,004\times\sqrt{3}$

و $R(2,001) \approx 2,002\times\sqrt{3}$

77 1) $A\left(0;\frac{-8}{m}\right)$ و $B(2m;0)$

2) معادلة (AB) هي $y=\frac{4}{m^2}x-\frac{8}{m}$

المعادلة $\frac{4}{m^2}x-\frac{8}{m}=\frac{-4}{x}$ تقبل حلا مضاعفا $x=m$

و بالتالي المستقيم (AB) مماس للمنحني (H) في النقطة M.

78 1) أ) $T(h)=\frac{-12-4h}{\sqrt{16-12h-4h^2}+4}$

ب) $\lim_{h\to0}T(h)=-\frac{3}{2}$ و منه الدالة f تقبل الاشتقاق من أجل القيمة $\frac{3}{2}$ و $f'\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}$

2) $v=\frac{x}{t}$ و منه $2=\frac{x}{t}$ أي $x=2t$

$OB^2=AB^2-OA^2$ و منه $OB^2=25-(2t)^2$

أي $OB=\sqrt{25-4t^2}$

إذا كان $x=3$ فإن $t=\frac{3}{2}$ ، $f(t)=\sqrt{25-t^2}$

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{3}{2}+h\right)-f\left(\frac{3}{2}\right)}{h}=-\frac{3}{2}$$

79 1) ننشر $(R+x)^2$ فيكون

$$g=g_0\times\frac{R^2}{R^2\left(1+\frac{2x}{R}+\left(\frac{x}{R}\right)^2\right)}$$

و منه $g=g_0\times\frac{1}{1+\frac{2x}{R}+\left(\frac{x}{R}\right)^2}$

2) $1+\frac{2x}{R}\cong1-\frac{2x}{R}$ و $\left(\frac{x}{R}\right)^2 ; 0$

$g ; g_0\times\left(1-\frac{2x}{R}\right)$

3) $g ; 9,785$

80 1) ننشر $(x-a)(x^2+ax-2a^2)$

2) معادلة المماس (T_a) للمنحني (c_f) عند النقطة ذات الفاصلة a هي: $y=3a^2x-2a^3$

لدينا $(x^2+ax-2a^2)=(x-a)(x+2a)$

- لدراسة الوضع النسبي لـ (c_f) و (T_a) ندرس إشارة العدد

$(x-a)^2(x+2a)$

إذا كان $x>-2a$ فإن (c_f) أعلى (T_a)

إذا كان $x<-2a$ فإن (c_f) أسفل (T_a)

إذا كان $x=-2a$ فإن (c_f) يقطع (T_a)

82 1) في المثلث القائم OIT ؛ $\frac{IT}{OT}=\sin x$

و $\frac{OI}{OT}=\cos x$ ، بما أن $OI=1$ نحصل على $IT=\frac{\sin x}{\cos x}$ (لاندرج tan لكونها غير موجودة في البرنامج).

2) $A_1=\frac{1}{2}\sin x$ و $A_2=\frac{1}{2}IT\times OI=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$.

A مساحة الجزء من القرص المرفق للزاوية x ، ومساحة القرص هي $p R^2=p$ وهي مرفقة للزاوية $2p$ إذن :

$A=\frac{p x}{2p}=\frac{1}{2}x$

3) بما أن : $A_1\le A\le A_2$ فإن :

$\frac{1}{2}\sin x\le\frac{1}{2}x\le\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$ أي : $\sin x\le x\le\frac{\sin x}{\cos x}$

إذن $x\le\frac{\sin x}{\cos x}$ وبما أن في المجال $\left]0;\frac{p}{2}\right[$: $\cos x>0$

فإن: $x\cos x\le\sin x$ خلاصة $x\cos x\le\sin x\le x$

• نستنتج من هذا أن $\cos x\le\frac{\sin x}{x}\le1$ لأن $x\in\left]0;\frac{p}{2}\right[$

4) من الرسم نخمن النتيجة $\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}h(x)=1$

5) $f'(x)=\cos x$ ومنه $f'(0)=\cos0=1$

ومنه : $\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h-0}=f'(0)=1$

$\lim_{h\to0}\frac{\sinh}{h}=1$ أي $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ ومنه : $\lim_{x\to0}h(x)=1$

83 **الطريقة الأولى :**

1) $d(t)=-5(t^2-12t)$ ؛ $d(t)=-5(t-6)^2+180$

ومنه القيمة الحدية العظمى للارتفاع هي $d(6)=180$.

2) السرعة في اللحظة 6 تكون معدومة .

الطريقة الثانية :

1) $d'(t)=-10t+60$

t	0		6		$+\infty$
$d'(t)$		+	0	-	
$d(t)$	0	↗	180	↘	

ومنه $d(6)=180$ هي القيمة الحدية العظمى .

2) $d'(6)=0$

84 1) لدينا $DC=f(x_0+h)-f(x_0-h)$

و $BD=2h$ ومنه $S=h\left[f(x_0+h)-f(x_0-h)\right]$

$$S=h\left[f\left(x_0\right)+hf'\left(x_0\right)-f\left(x_0\right)+hf'\left(x_0\right)\right]$$

أي : $S=2h^2f'\left(x_0\right)$

2) $S=2\times(0,03)^2\times 9=0,0162$.

85 1) أحسن تقريب تآلفي للدالة f من أجل كل عدد حقيقي x هو $f(x+h)=f(x)+hf'(x)$ ومن أجل $(-x)$ لدينا $f(-x-h)=f(-x)-hf'(-x)$

بما أن f زوجية نحصل على $f'(x)=-f'(-x)$.

2) $g'(x)=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$ ومنه $g'(1)=1$

ولدينا $g(1)=0$ إذن المعادلة $y=x-1$

الاستنتاج g زوجية ومنه g' فردية إذن :

$g'(-1)=-g'(1)=-1$ و $g(-1)=g(1)=0$

والمعادلة هي : $y=-x-1$